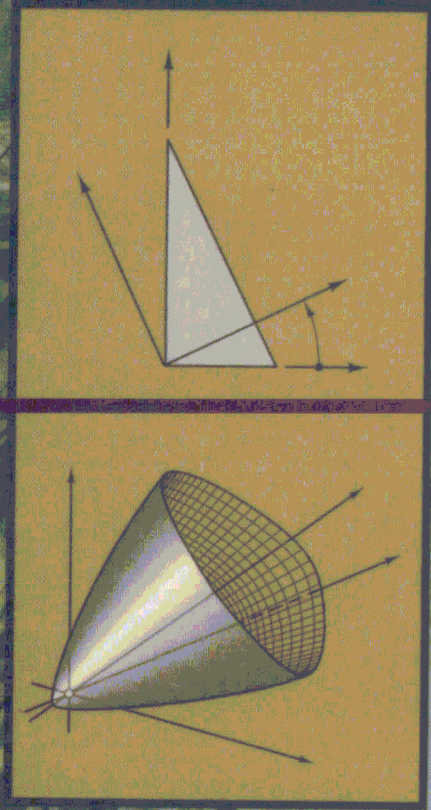
MECÁNICA de SÓLIDOS

SEGUNDA EDICIÓN



EGOR P. POPOV

Pearson Educación

Principales ecuaciones elásticas

Carga axial

Esfuerzo normal

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Desplazamiento

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

Torsión

Esfuerzo cortante en una flecha circular

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p}$$

Ángulo de torsión en un miembro circular

$$\phi = \frac{TL}{I_p G}$$

Esfuerzo cortante en una flecha rectangular

$$\tau = \frac{T}{\alpha\, bt^2}$$

Esfuerzo cortante en un tubo de pared delgada

$$\tau = \frac{T}{2t\textcircled{A}}$$

Transformación del esfuerzo

Esfuerzos normales principales

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Esfuerzos cortantes máximo y mínimo

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Flexión

Esfuerzo normal en un miembro recto

$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

Flexión asimétrica

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha$$

Cortante

Flujo y esfuerzo cortante debido a fuerza cortante

$$q = \tau t = \frac{VQ}{I}, \qquad \tau = \frac{VQ}{It}$$

Propiedades mecánicas del material

Razón de Poisson

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\text{lat}}}{\varepsilon_{\text{long}}}$$

Ley generalizada de Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

donde el módulo cortante

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Dilatación

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Módulo volumétrico

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Deflexión de vigas

Relaciones entre q, V y M

$$\frac{dV}{dx} = q(x), \qquad \frac{dM}{dx} = V(x)$$

Curva elástica

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}, \qquad EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^3} = V(x), \qquad EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)$$

Pandeo

Carga crítica axial

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

Esfuerzo crítico axial

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{P_{\text{cr}}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(KL/r)^2}$$

Radio de giro

$$r = r_{\text{mín}} = \sqrt{\frac{I_{\text{mín}}}{A}}$$

531 P829 2000

Símbolos de letra redonda o romana

- $\textcircled{A}$ área limitada por la línea central del perímetro de un tubo delgado
- A área, área de sección transversal
- c distancia del eje neutro o del centro de torsión a una fibra extrema
- E módulo de elasticidad en tensión o compresión
- F fuerza
- f frecuencia, coeficiente de flexibilidad
- G módulo de elasticidad en cortante
- I momento de inercia de un área transversal
- I_p momento polar de inercia de un área transversal
- K factor de concentración de esfuerzos, factor de longitud efectiva de columnas
- k constante de resorte; k = kilolibra = kip = 1000 lb.
- L longitud; $L_e = KL$ longitud efectiva de columna
- M momento, momento flexionante, masa
- M_p momento plástico
- m masa, momento causado por una fuerza virtual unitaria
- P fuerza, carga concentrada
- p intensidad de presión, fuerza axial debida a una fuerza unitaria
- Q primer momento o momento estático del área A_{fghj} respecto al eje neutro
- q intensidad de carga distribuida, flujo cortante
- R reacción, radio
- r radio, radio de giro
- S módulo de sección elástico ($S = I/c$)
- T par de torsión, temperatura
- t espesor, ancho, desviación tangencial
- U energía de deformación unitaria
- u fuerza interna causada por una carga virtual unitaria, desplazamiento axial o radial
- V fuerza cortante (a menudo vertical), volumen
- v deflexión de viga, velocidad
- W peso total, trabajo
- w peso o carga por unidad de longitud
- Z módulo de sección plástico
- AE rigidez axial; EI rigidez flexionante; GI_p rigidez torsional

- Tornillo micrométrico
- Vernier
- Reloj Comparador

Símbolos de letras griegas

- α (alpha) Coeficiente de expansión térmica, ángulo general
- γ (gamma) deformación unitaria cortante, peso por volumen unitario
- Δ (delta) deformación o deflexión total, cambio de cualquier función designada
- ε (epsilon) deformación unitaria normal
- θ (theta) ángulo de la pendiente de una curva elástica, ángulo de inclinación de una línea sobre un cuerpo
- κ (kappa) curvatura
- λ (lambda) valor propio en problemas de pandeo de columnas
- ν (nu) razón de Poisson
- ρ (rho) radio, radio de curvatura
- σ (sigma) esfuerzo de tensión o de compresión (es decir, esfuerzo normal)
- τ (tau) esfuerzo cortante
- ϕ (phi) ángulo total de torsión, ángulo general

Mecánica de Sólidos

Mecánica de Sólidos

Segunda edición

Egor P. Popov
University of California-Berkeley

Toader A. Balan
Technical University of Moldova, Chisinau

TRADUCCIÓN: **José de la Cera Alonso**
Ingeniero Civil,
Universidad Nacional Autónoma de México
Diplomado en Ingeniería,
Universidad Técnica de Münich, Alemania
Profesor titular,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Unidad Azcapotzalco

REVISIÓN TÉCNICA: **Javier León Cárdenas**
Jefe de la Carrera de Ingeniería Mecánica,
Escuela de Ingeniería, Universidad La Salle

Pearson Educación

MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

Datos de catalogación bibliográfica

POPOV, E. P.

Mecánica de sólidos

PEARSON EDUCACIÓN, MÉXICO, 2000

ISBN: 970-17-0398-7
Materia: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 Páginas: 888

Versión en español de la obra titulada *Engineering Mechanics of Solids, Second Edition*, de Egor P. Popov, publicada originalmente en inglés por Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

Esta edición en español es la única autorizada.

Original English language title by
Prentice-Hall, Inc.
Copyright © 1999
All rights reserved
ISBN 0-13-726159-4

Edición en español:
Editor: José Luis Vázquez
Supervisor de traducción: Jorge Bonilla Talavera
Supervisor de producción: Óscar Ávalos Salcedo

Edición en inglés:
Acquisitions Editor: *Eric Svendsen*
Editorial/Production Supervision: *Rose Kernan*
Editor-in-Chief: *Marcia Horton*
Managing Editor: *Eileen Clark*
Copy Editing: *Patricia Daly*
Cover Designer: *Bruce Kenselaar*
Assistant Vice-President of Production and Manufacturing: *David W. Riccardi*
Manufacturing Buyer: *Pat Brown*
Editorial Assistant: *Griffin Cable*

SEGUNDA EDICIÓN, 2000

D.R. © 2000 por Addison Wesley Longman México, S. A. de C.V.
Calle 4 No. 25-2do. piso
Fracc. Industrial Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Reg. Núm. 1031

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.
El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

ISBN 970-17-0398-7

Impreso en México. *Printed in Mexico*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 03 02 01 00

FEB

PROGRAMAS EDUCATIVOS, S. A. DE C.V.
CALZ. CHABACANO No. 65, LOCAL A
COL. ASTURIAS, DELEG. CUAUHTEMOC,
C.P. 06850, MÉXICO, D.F.

EMPRESA CERTIFICADA POR EL
INSTITUTO MEXICANO DE NORMALIZACIÓN
Y CERTIFICACIÓN A.C., BAJO LA NORMA
ISO-9002: 1994/NMX-CC-004: 1995
CON EL No. DE REGISTRO RSC-048

2000

A la memoria de mi querida
Irene

Contenido

Prefacio, xv

1 Esfuerzo, 1

1-1. Introducción, 1

Parte A Conceptos generales: Esfuerzo, 3

1-2. Método de las secciones, 3

1-3. Definición de esfuerzo, 4

1-4. Tensor esfuerzo, 7

1-5. Ecuaciones diferenciales de equilibrio, 10

Parte B Análisis de esfuerzo de barras cargadas axialmente, 12

1-6. Esfuerzo normal máximo en barras cargadas axialmente, 12

1-7. Esfuerzos sobre secciones inclinadas en barras cargadas axialmente, 15

1-8. Esfuerzos cortantes, 19

1-9. Análisis de los esfuerzos normales y cortantes, 22

1-10. Resistencia del miembro como criterio de diseño, 31

1-11. Diseño determinístico de miembros: barras cargadas axialmente, 33

1-12. Base probabilística para el diseño estructural, 37

Problemas, 43

2 Deformación unitaria, 57

2-1. Introducción, 57

2-2. La prueba de tensión y la deformación unitaria normal, 57

2-3. Relaciones esfuerzo-deformación unitaria, 60

2-4. Ley de Hooke, 66
2-5. Observaciones adicionales acerca de las relaciones esfuerzo-deformación unitaria, 68
2-6. Razón de Poisson, 70
2-7. Deformación unitaria térmica y deformación, 71
2-8. Otras idealizaciones de las relaciones constitutivas, 72
2-9. Materiales linealmente viscoelásticos, 76
2-10. Carga cíclica: Fatiga, 81
Problemas, 88

3 Deformación axial de barras: Sistemas estáticamente determinados, 91
3-1. Introducción, 91
3-2. Deformación de barras axialmente cargadas, 92
3-3. Principio de Saint-Venant y concentraciones de esfuerzos, 104
3-4. La prueba de tensión revisitada, 109
3-5. Energía de deformación elástica para esfuerzo uniaxial, 111
3-6. Deflexiones por el método de la energía, 115
3-7. Cargas dinámicas y de impacto, 116
Problemas, 120

4 Deformación axial de barras: Sistemas estáticamente indeterminados, 131
4-1. Introducción, 131
4-2. Consideraciones generales, 131
4-3. Método de las fuerzas de análisis, 132
4-4. Introducción al método de los desplazamientos, 138
4-5. Método de los desplazamientos con varios grados de libertad, 141
4-6. Problemas no lineales estáticamente indeterminados, 144
4-7. Enfoque de la ecuación diferencial para desviaciones, 157
Problemas, 161

5 Ley de Hooke generalizada: recipientes a presión, 169

5-1. Introducción, 169

Parte A Relaciones constitutivas para cortante, 170

5-2. Relaciones esfuerzo-deformación unitaria para cortante, 170

5-3. Energía de deformación unitaria elástica para esfuerzos cortantes, 172

Parte B Conceptos generalizados de la deformación unitaria y ley de Hooke, 173

5-4. Definición matemática de la deformación unitaria, 173

5-5. Tensor deformación unitaria, 176

5-6. Ley de Hooke generalizada para materiales isotrópicos, 177

5-7. Relaciones entre E, G y ν, 181

5-8. Dilatación y módulo volumétrico, 183

Parte C Recipientes a presión de pared delgada, 184

5-9. Recipientes a presión cilíndricos y esféricos, 184

5-10. Observaciones sobre recipientes a presión, de pared delgada, 188

Parte D Cilindros de pared gruesa, 190

5-11. Introducción, 190

5-12. Solución del problema general, 191

5-13. Casos especiales, 196

5-14. Comportamiento de cilindros de pared gruesa idealmente plásticos, 198

Problemas, 202

6 Torsión, 207

6-1. Introducción, 207

6-2. Aplicación del método de las secciones, 208

Parte A Torsión de barras circulares elásticas, 210

6-3. Hipótesis básicas para miembros circulares, 210

6-4. La fórmula de la torsión, 211

6-5. Observaciones sobre la fórmula de la torsión, 241

6-6. Diseño de miembros circulares en torsión por resistencia, 218

6-7. Concentraciones de esfuerzos, 221

6-8. Ángulo de torsión de miembros circulares, 222
6-9. Problemas estáticamente indeterminados, 228
6-10. Enfoque alternativo de la ecuación diferencial para problemas de torsión, 231
6-11. Energía y cargas de impacto, 233
6-12. Coples de ejes o flechas, 235
Parte B Torsión de barras circulares inelásticas, 237
6-13. Esfuerzos y deformaciones cortantes en flechas circulares en el rango inelástico, 237
Parte C Torsión de miembros sólidos no circulares, 242
6-14. Barras sólidas con cualquier sección transversal, 242
6-15. Alabeo de secciones abiertas de pared delgada, 247
Parte D Torsión de miembros tubulares de pared delgada, 248
6-16. Miembros huecos de pared delgada, 248
Problemas, 253

7 Estática de vigas, 267
7-1. Introducción, 267
Parte A Cálculo de reacciones, 268
7-2. Convenciones diagramáticas para soportes y cargas, 268
7-3. Cálculos de reacciones en vigas, 270
Parte B Enfoque directo para *P*, *V* y *M*, 275
7-4. Aplicación del método de las secciones, 275
7-5. Fuerza axial en vigas, 276
7-6. Fuerza cortante en vigas, 277
7-7. Momento flexionante en vigas, 278
7-8. Diagramas de *P*, *V* y *M*, 281
Parte C *V* y *M* por integración, 291
7-9. Ecuaciones diferenciales de equilibrio para un elemento de viga, 291
7-10. Diagramas de fuerza cortante por integración de la carga, 293
7-11. Diagramas de momento por integración de la fuerza cortante, 295

7-12. Efecto de momentos concentrados sobre los diagramas de momento, 301
7-13. Diagramas de momento y la curva elástica, 305
Parte D *V* y *M* por funciones de singularidad, 306
7-14. Aplicaciones de las funciones de singularidad, 307
Problemas, 313

8 Flexión simétrica en vigas, 325
8-1. Introducción, 325
8-2. Hipótesis cinemática básica, 326
8-3. La fórmula de la flexión elástica, 328
8-4. Cálculo del momento de inercia, 335
8-5. Aplicaciones de la fórmula de la flexión elástica, 338
8-6. Concentraciones de esfuerzos, 344
8-7. Energía de deformación elástica en flexión pura, 347
8-8. Flexión inelástica de vigas, 348
8-9. Vigas de sección transversal compuesta, 356
8-10. Barras curvas, 361
Problemas, 367

9 Flexión asimétrica de vigas, 379
9-1. Introducción, 379
Parte A Secciones transversales doblemente simétricas, 380
9-2. Flexión con relación a ambos ejes principales, 380
9-3. Flexión elástica con cargas axiales, 384
9-4. Flexión inelástica con cargas axiales, 394
Parte B Vigas de sección transversal arbitraria, 397
9-5. Observaciones preliminares, 397
9-6. Momentos y productos de inercia de superficies, 397
9-7. Ejes principales de inercia, 398
9-8. Flexión de vigas con sección transversal arbitraria, 401
Problemas, 407

10 Esfuerzos cortantes en vigas, 415
10-1. Introducción, 415
10-2. Observaciones preliminares, 415
10-3. Flujo de cortante, 419
10-4. La fórmula del esfuerzo cortante para vigas, 425
10-5. Alabeo de secciones planas debido al cortante, 432
10-6. Algunas limitaciones de la fórmula del esfuerzo cortante, 438
10-7. Esfuerzo cortante en patines de vigas, 439
10-8. Centro de cortante, 441
10-9. Esfuerzos cortantes directos y torsionantes combinados, 446
10-10. Esfuerzos en resortes helicoidales estrechamente enrollados, 448
10-11. Deflexiones de resortes helicoidales estrechamente enrollados, 451
Problemas, 454

11 Transformaciones de esfuerzos y deformaciones unitarias, 469
11-1. Introducción, 469
Parte A Transformación de esfuerzos, 470
11-2. El problema básico, 470
11-3. Transformación de esfuerzos en problemas bidimensionales, 473
11-4. Esfuerzos principales en problemas bidimensionales, 476
11-5. Esfuerzos cortantes máximos en problemas bidimensionales, 477
11-6. Círculo de Mohr de esfuerzos para problemas bidimensionales, 481
11-7. Construcción de círculos de Mohr para la transformación de esfuerzos, 483
11-8. Esfuerzos principales para un estado general de esfuerzo, 491
11-9. Círculo de Mohr para un estado general de esfuerzo, 495

Parte B Transformación de la deformación unitaria, 498
11-10. Deformaciones unitarias en dos dimensiones, 498
11-11. Transformación de la deformación unitaria en dos dimensiones: Enfoque geométrico, 499
11-12. Transformación de la deformación unitaria en dos dimensiones: Enfoque analítico, 502
11-13. Círculo de Mohr para deformación unitaria bidimensional, 504
11-14. Rosetas de deformación unitaria, 507
Problemas, 511

12 Fluencia y criterios de fractura, 519
12-1. Introducción, 519
12-2. Teoría del esfuerzo cortante máximo, 521
12-3. Teoría de la energía de distorsión máxima, 523
12-4. Comparación de las teorías del cortante máximo y de la energía de distorsión para esfuerzo plano, 527
12-5. Teoría del esfuerzo normal máximo, 528
12-6. Comparación de los criterios de fluencia y de fractura, 528
12-7. Superficie de falla para materiales frágiles, 532
Problemas, 535

13 Análisis del esfuerzo elástico, 537
13-1. Introducción, 537
Parte A Análisis del esfuerzo elástico, 539
13-2. Estado de esfuerzo para algunos casos básicos, 539
13-3. Exactitud comparativa de las soluciones para vigas, 546
13-4. Métodos experimentales del análisis elástico, 549
Parte B Diseño elástico por resistencia, 551
13-5. Diseño de miembros cargados axialmente, 551
13-6. Diseño de miembros en torsión, 551
13-7. Criterios de diseño para vigas prismáticas, 552

13-8. Diseño de vigas prismáticas, 555
13-9. Diseño de vigas no prismáticas, 561
13-10. Diseño de miembros complejos, 563
Problemas, 567

14 Deflexiones en vigas por integración directa, 582
14-1. Introducción, 582
14-2. Relación momento-curvatura, 583
14-3. Ecuación diferencial gobernante, 585
14-4. Deducción alternativa de la ecuación gobernante, 587
14-5. Formas alternativas de la ecuación gobernante, 588
14-6. Condiciones de frontera, 589
14-7. Soluciones por integración directa, 591
14-8. Funciones de singularidad para vigas, 608
14-9. Deflexiones por superposición, 610
14-10. Deflexiones en flexión asimétrica, 615
14-11. Método de la energía para deflexiones e impacto, 617
14-12. Deflexión inelástica de vigas, 620
Problemas, 624

15 Deflexiones en vigas por el método área-momento, 635
15-1. Observaciones generales, 635
15-2. Introducción al método área-momento 636
15-3. Teoremas área-momento, 636
15-4. Vigas estáticamente indeterminadas, 650
Problemas, 660

16 Columnas, 667
16-1. Introducción, 667
16-2. Ejemplos de inestabilidad, 669
16-3. Criterios para la estabilidad del equilibrio, 672
Parte A Teoría del pandeo de columnas, 677
16-4. Carga de Euler para columnas con extremos articulados, 677
16-5. Carga de Euler para columnas con restricciones de extremo diferentes, 679

16-6. Limitaciones de las fórmulas de Euler, 682
16-7. Fórmulas generalizadas para la carga de pandeo de Euler, 684
16-8. Cargas excéntricas y la fórmula de la secante, 687
16-9. Vigas-columnas, 690
16-10. Ecuaciones diferenciales alternativas para vigas-columnas, 694
Parte B Diseño de columnas, 699
16-11. Consideraciones generales, 699
16-12. Columnas cargadas concéntricamente, 702
16-13. Columnas cargadas excéntricamente 710
16-14. Estabilidad lateral de vigas, 717
Problemas, 718

17 Energía y trabajo virtual, 732
17-1. Introducción, 732
Parte A Energía de deformación elástica y trabajo externo, 733
17-2. Energía de deformación elástica, 733
17-3. Desplazamientos por conservación de la energía, 735
Parte B Métodos de trabajo virtual, 736
17-4. Principio del trabajo virtual, 736
17-5. Fuerzas virtuales para deflexiones, 740
17-6. Ecuaciones de fuerza virtual para sistemas elásticos, 742
17-7. Fuerzas virtuales para problemas indeterminados, 748
17-8. Desplazamientos virtuales para equilibrio, 751
17-9. Trabajo virtual para sistemas discretos, 755
Problemas, 760

18 Métodos clásicos de energía, 771
18-1. Introducción, 771
18-2. Observaciones generales, 772
18-3. Teoremas de la energía de deformación y de la energía de deformación complementaria, 772
18-4. Teoremas de Castigliano, 776

18-5. Sistemas estáticamente indeterminados, 782
18-6. Energía elástica para cargas de pandeo, 786
Problemas, 789

19 Análisis elástico de sistemas, 791
19-1. Introducción, 791
19-2. Dos métodos básicos de análisis elástico, 792
19-3. Método de las fuerzas, 792
19-4. Reciprocidad de los coeficientes de flexibilidad, 795
19-5. Introducción al método de los desplazamientos, 802
19-6. Observaciones adicionales sobre el método de los desplazamientos, 806
19-7. Reciprocidad de los coeficientes de rigidez, 808
Problemas, 815

20 Análisis plástico al límite, 819
20-1. Introducción, 819
20-2. Análisis plástico al límite de vigas, 821
20-3. Vigas y marcos continuos, 834
Problemas, 837

Apéndice: Tablas, 841

Respuestas a problemas impares alternados, 855

Índice, 861

Prefacio

La segunda edición de *Mecánica de Sólidos* ha sido modificada considerablemente, pero conserva su carácter de texto completo tradicional sobre mecánica de sólidos con aspectos y temas avanzados. Para permitir una mayor flexibilidad en la selección de los temas por asignar, el texto ha sido subdividido en un mayor número de capítulos. Así, el maestro podrá omitir cuidadosamente el material que no desea tratar, sin pérdida de continuidad.

En esta nueva revisión se considera un buen número de temas de vanguardia. Se proporciona una expresión analítica avanzada para la carga cíclica y se presenta una novedosa superficie de falla para materiales *frágiles*. Esto último complementa la famosa superficie de fluencia de van Mises para materiales *dúctiles*. Se incluyen los fundamentos de la base probabilística del diseño estructural, mientras que los temas más especializados al respecto se han omitido en esta edición. El capítulo sobre las propiedades mecánicas de los materiales ha sido ampliado considerablemente. Se tiene ahora un tratamiento más amplio de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria verdaderos, así como nuevas secciones sobre fatiga y comportamiento viscoelástico.

En el texto se prefiere el sistema de unidades SI, especialmente en los problemas propuestos a los estudiantes. Las tablas numéricas dan una opción entre las unidades SI y las del sistema inglés.

En virtud de los temas escogidos, pensamos que el texto es lo suficientemente general como para que resulte de utilidad a los ingenieros civiles, mecánicos y aeronáuticos.

La nueva edición se benefició con el apoyo entusiasta del Dr. Toader A. Balan, quien fue de gran ayuda al ofrecer útiles sugerencias a lo largo del texto. Específicamente, contribuyó en forma considerable en el capítulo sobre las propiedades mecánicas de los materiales, al sugerir la presentación de una formulación analítica elegante del comportamiento cíclico de los materiales inelásticos,así como deducir una novedosa expresión para la superficie de falla de los materiales frágiles.

Estoy en deuda con los profesores Keith Hjelmstad de la Universidad de Illinois-Urbana y Vassilis Panoskaltsis de la Universidad Case Western Reserve por examinar meticulosamente el manuscrito y ofrecer sugerencias importantes. Me siento sinceramente agradecido a los muchos colegas de la Universidad de California, en Berkeley, en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental, quienes durante varios años influyeron considerablemente en el desarrollo y crecimiento de este libro. Entre ellos, es un placer particular dar las gracias a los profesores A. C. Scordelis, R. W. Clough, R. L. Taylor, E. L. Wilson y a los difuntos profesores H. D. Eberhart y R. Seban, de ingeniería mecánica.

Es también un placer reconocer la ayuda del profesor A. der Kiureghian de la Universidad de California, en Berkeley, quien aportó útiles sugerencias para la sección sobre la base probabilística del diseño estructural; del profesor J. L. Meek de la Universidad de Queensland, Australia, quien influyó en el desarrollo de la sección sobre trabajo virtual de sistemas discretos, y del profesor Dr. S. Nagarajan, investigador en la Lockheed Missiles & Space Company, quien contribuyó a la formulación del método de los desplazamientos, en el capítulo 19. Rose Kernan, de la editorial Prentice Hall, ofreció invaluable ayuda para darle gran forma a este libro.

Egor P. Popov
Berkeley

1

Esfuerzo

1-1. Introducción

En toda construcción de ingeniería, a las partes componentes de una estructura o máquina se deben asignar tamaños físicos definidos. Estas partes deben ser adecuadamente proporcionadas para resistir las fuerzas reales o probables que puedan llegar a actuar sobre ellas. Así, las paredes de un recipiente a presión deben tener la resistencia adecuada para soportar la presión interior; los pisos de un edificio deben ser suficientemente fuertes para el fin a que están destinados; la flecha o árbol de una máquina debe ser de tamaño adecuado para poder transmitir el par de torsión requerido; el ala de un avión debe resistir con seguridad las cargas aerodinámicas que se presentan durante el despegue, el vuelo y el aterrizaje. De la misma manera, las partes de una estructura compuesta deben ser suficientemente rígidas para no desviarse excesivamente al operar bajo las cargas impuestas. El piso de un edificio puede ser suficientemente fuerte y, sin embargo, presentar flechas o desviaciones excesivas que en algunos casos pueden causar desalineamiento del equipo de manufactura o en otros casos conducir al agrietamiento del plafón colocado bajo él. Además, un miembro puede ser tan delgado o esbelto que al estar sometido a cargas de compresión, sufra el colapso por pandeo (es decir, la configuración inicial de un miembro puede volverse inestable). La posibilidad de determinar la

1

Esfuerzo

1-1. Introducción

En toda construcción de ingeniería, a las partes componentes de una estructura o máquina se deben asignar tamaños físicos definidos. Estas partes deben ser adecuadamente proporcionadas para resistir las fuerzas reales o probables que puedan llegar a actuar sobre ellas. Así, las paredes de un recipiente a presión deben tener la resistencia adecuada para soportar la presión interior; los pisos de un edificio deben ser suficientemente fuertes para el fin a que están destinados; la flecha o árbol de una máquina debe ser de tamaño adecuado para poder transmitir el par de torsión requerido; el ala de un avión debe resistir con seguridad las cargas aerodinámicas que se presentan durante el despegue, el vuelo y el aterrizaje. De la misma manera, las partes de una estructura compuesta deben ser suficientemente rígidas para no desviarse excesivamente al operar bajo las cargas impuestas. El piso de un edificio puede ser suficientemente fuerte y, sin embargo, presentar flechas o desviaciones excesivas que en algunos casos pueden causar desalineamiento del equipo de manufactura o en otros casos conducir al agrietamiento del plafón colocado bajo él. Además, un miembro puede ser tan delgado o esbelto que al estar sometido a cargas de compresión, sufra el colapso por pandeo (es decir, la configuración inicial de un miembro puede volverse inestable). La posibilidad de determinar la

carga máxima que una columna esbelta puede tomar antes de pandearse o el nivel seguro de vacío que puede mantenerse en un recipiente, es de gran importancia práctica.

En la práctica de la ingeniería, tales requisitos deben cumplirse con el mínimo gasto de un material dado. Aparte del costo, a veces, como en el diseño de satélites, la factibilidad y éxito de toda la misión puede depender del peso de una carga. El tema de la *mecánica de materiales*, o de la *resistencia de materiales*, como ha sido llamado tradicionalmente, implica métodos analíticos para determinar la **resistencia**, la **rigidez** (características de deformación) y la **estabilidad** de los diversos miembros sometidos a carga. Alternativamente, el tema puede llamarse *mecánica de los cuerpos sólidos deformables* o simplemente *mecánica de sólidos.*

La mecánica de sólidos es una disciplina bastante antigua que puede considerarse que nace con los trabajos de Galileo en la primera parte del siglo XVII. Antes de estos trabajos e investigaciones sobre el comportamiento de los cuerpos sólidos sometidos a cargas, los constructores se guiaban por reglas empíricas y experiencias acumuladas durante años. Galileo fue el primero en intentar explicar el comportamiento de algunos miembros bajo carga con una base racional. Él estudió miembros en tensión y compresión, y vigas empleadas notablemente en la construcción de cascos de buques para la marina italiana. Por supuesto, mucho se ha avanzado desde entonces, pero debe notarse de paso que mucho se debe en el desarrollo de esta ciencia a los investigadores franceses, entre los que se cuentan Coulomb, Poisson, Navier, St. Venant y Cauchy, quienes trabajaron a principios del siglo XIX, dejando una indeleble huella en esta disciplina.

El tema de la mecánica de sólidos toca todas las ramas de la ingeniería, sorprendentemente con muchas aplicaciones. Sus métodos son necesarios para los diseñadores de estructuras fuera de la costa; para los ingenieros civiles en el diseño de puentes y edificios; para los ingenieros de minas y los ingenieros y arquitectos interesados en estructuras; para los ingenieros nucleares que ven el diseño de componentes de reactores; para los ingenieros mecánicos y químicos, que confían en los métodos de esta ciencia para el diseño de maquinaria y recipientes a presión; para los metalurgistas, que necesitan los conceptos fundamentales de esta ciencia para entender cómo mejorar más los materiales existentes y, finalmente, para los ingenieros electricistas, debido a la importancia de los aspectos de ingeniería mecánica de muchas partes del equipo eléctrico. La mecánica de sólidos, en contraste con la teoría matemática de la mecánica del medio continuo, tiene métodos característicos propios, aunque los dos enfoques se traslapan. Aquélla es una disciplina definida y una de las materias fundamentales del currículum de ingeniería, junto con otras materias básicas, como la mecánica de fluidos, la termodinámica y la teoría eléctrica.

El comportamiento de un miembro sometido a fuerzas depende no sólo de las leyes fundamentales de la mecánica newtoniana que rigen el equilibrio de las fuerzas, sino también de las *características* mecánicas de los materiales de que está hecho el miembro. La información necesaria relativa a los materiales proviene de los laboratorios, donde los materiales son sometidos a la acción de fuerzas conocidas con precisión y donde el comportamiento de probetas de ensayo es observado con particular interés respecto a sus propiedades de ruptura, deformaciones, etc. La determina-

ción de tales fenómenos es una parte vital del tema, pero el estudio de esta rama se deja a otros libros.[1] Los resultados finales de dichas investigaciones son de interés aquí, pero este libro trata la parte analítica y matemática del tema y no la parte experimental. Por estas razones, se ve que la mecánica de sólidos es una ciencia mixta de experimentación y postulados newtonianos de la mecánica analítica. Suponemos que el lector está familiarizado con esos dos aspectos. En el desarrollo de este tema, la estática juega un papel especialmente importante.

Este texto se limitará a los temas más simples de la mecánica de sólidos. A pesar de la relativa simplicidad de los métodos empleados aquí, los procedimientos resultantes son sumamente útiles pues son aplicables a un vasto número de problemas técnicos importantes.

La mejor manera de dominar el tema es resolver un buen número de ejercicios. El número de fórmulas básicas necesarias para el análisis y diseño de miembros estructurales y de máquinas por los métodos de la mecánica de sólidos es relativamente pequeño; sin embargo, a lo largo de este estudio el lector debe desarrollar la capacidad para *visualizar* un problema y la naturaleza de las cantidades que son calculadas. *Croquis completos, cuidadosamente dibujados, de los problemas por resolver, darán grandes dividendos en el dominio rápido y completo de esta ciencia.*

Son tres las partes principales de este capítulo. Se tratan primero los conceptos generales relativos al esfuerzo; le sigue, luego, un caso particular de distribución de esfuerzos en miembros cargados axialmente, y en la parte última del capítulo se analizan los criterios de diseño por resistencia con base en el esfuerzo.

Parte A CONCEPTOS GENERALES: ESFUERZO

1-2. Método de las secciones

Uno de los problemas principales de la mecánica de sólidos es la investigación de la resistencia interna de un cuerpo; es decir, *la naturaleza de las fuerzas que se generan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas aplicadas externamente.* Para tal fin se emplea un método uniforme de enfoque. Se prepara un croquis completo del miembro bajo investigación, sobre el cual se muestran *todas* las fuerzas externas que actúan sobre él en sus respectivos puntos de aplicación. Tal croquis se denomina diagrama de *cuerpo libre.* Todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, incluidas las fuerzas

[1] W. D. Callister, *Materials Science and Engineering* (Nueva York: Wiley, 1985). J. F. Shackelford, *Introduction to Materials Science for Engineers* (Nueva York: Macmillan, 1985). L. H. Van Vlack, *Materials Science for Engineers,* 5a. ed. (Reading, MA: Addison-Wesley, 1985).

reactivas causadas por los soportes, así como el peso propio[2] del cuerpo debido a su masa, son consideradas como fuerzas externas. Además, como un cuerpo estable en reposo está en equilibrio, las fuerzas que actúan sobre él satisfacen las ecuaciones del equilibrio estático. Entonces, si las fuerzas que actúan sobre un cuerpo como el mostrado en la figura 1-1(a) satisfacen las ecuaciones de equilibrio estático y se muestran todas actuando en él, el croquis representa un diagrama de cuerpo libre. Luego, como la determinación de las fuerzas internas causadas por las fuerzas externas es uno de los fines principales de esta ciencia, se pasa una sección arbitraria por el cuerpo, separándolo completamente en dos partes. El resultado de tal proceso puede verse en las figuras 1-1(b) y (c), donde un plano arbitrario *ABCD* separa el cuerpo original de la figura 1-1(a) en dos partes *distintas.* A este proceso se le llamará *método de las secciones.* Entonces, si todo el cuerpo está en equilibrio, *cualquier parte* de él debe también estar en equilibrio. Sin embargo, para tales partes de un cuerpo, algunas de las fuerzas necesarias para mantener el equilibrio deben actuar en la sección cortada. Estas consideraciones conducen a la siguiente conclusión fundamental: *Las fuerzas aplicadas externamente a un lado de un corte arbitrario deben ser equilibradas por las fuerzas internas desarrolladas en el corte* o, brevemente, las fuerzas externas están equilibradas por las fuerzas internas. Veremos luego que los planos de corte son orientados en direcciones particulares para satisfacer requisitos especiales. El método de las secciones es el primer paso en la resolución de *todos* los problemas en que se investigan fuerzas internas.

Al analizar el método de las secciones es importante notar que si bien algunos cuerpos móviles no están en equilibrio estático, sí lo están en equilibrio dinámico. Esos problemas pueden reducirse a problemas de equilibrio estático. Primero se calcula la aceleración a de la parte en consideración; luego se multiplica ésta por la masa m del cuerpo y se obtiene una fuerza $F = ma$. Si la fuerza así calculada se aplica al cuerpo en su centro de masa en un sentido opuesto al de la aceleración, el problema dinámico se reduce a uno de estática. Éste es el *principio de d'Alembert.* Según este punto de vista, todos los cuerpos pueden considerarse instantáneamente en un estado de equilibrio estático. Por consiguiente, para cualquier cuerpo, se encuentre éste en equilibrio estático o dinámico, puede prepararse un diagrama de cuerpo libre sobre el cual se muestren las fuerzas necesarias para mantener todo el cuerpo en equilibrio. De ahí en adelante, el problema es el mismo que el analizado anteriormente.

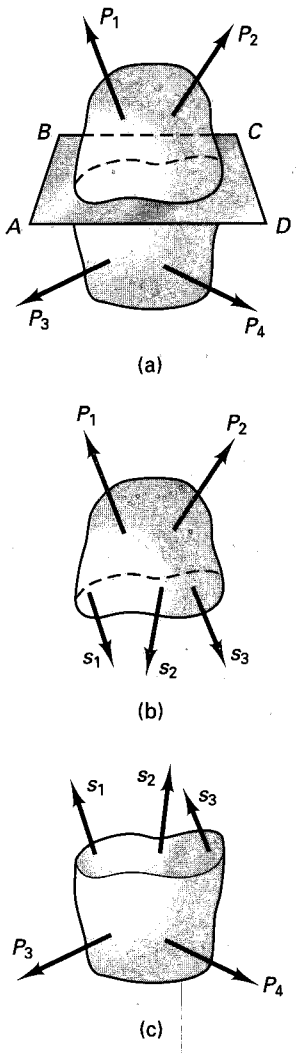


Fig. 1-1 Seccionamiento de un cuerpo.

1-3. Definición de esfuerzo

En general, las fuerzas internas que actúan sobre áreas infinitesimales de un corte, son de magnitudes y direcciones variables, como se mostró en las figuras 1-1(b) y (c) y se muestra de nuevo en la figura 1-2(a). Esas fuerzas

[2]Estrictamente hablando, el peso del cuerpo, o más generalmente, las fuerzas de inercia debidas a la aceleración, etc. son "fuerzas de cuerpo" y actúan a través del cuerpo de manera asociada con las unidades de volumen del cuerpo. Sin embargo, en muchos casos, esas fuerzas de cuerpo pueden considerarse cargas externas que actúan a través del centro de masa del cuerpo.

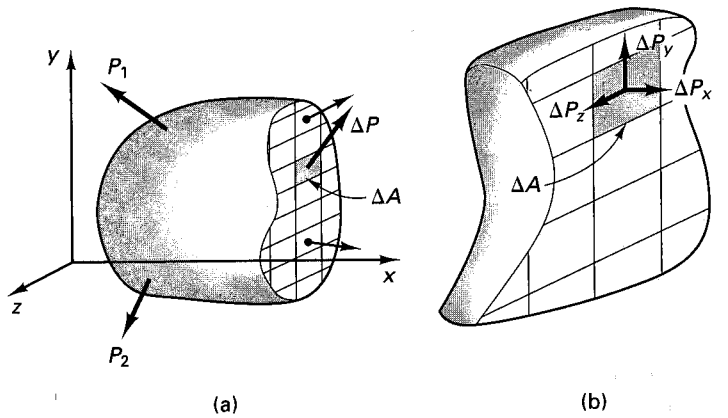


Fig. 1-2 Cuerpo seccionado: (a) cuerpo libre con algunas fuerzas internas, (b) vista amplificada con componentes de $\Delta \boldsymbol{P}$.

son de naturaleza vectorial y mantienen en equilibrio las fuerzas aplicadas externamente. En la mecánica de sólidos es particularmente importante determinar la intensidad de esas fuerzas sobre las diversas porciones de una sección ya que la resistencia a la deformación y a las fuerzas depende de esa intensidad. En general, tales fuerzas varían de punto a punto y están inclinadas con respecto al plano de la sección. Es conveniente resolver esas intensidades perpendicular y paralelamente a la sección investigada. Por ejemplo, las componentes de un vector fuerza $\Delta \boldsymbol{P}$ que actúa sobre un área ΔA se muestran en la figura 1-2(b). En este diagrama particular, la sección por el cuerpo es perpendicular al eje x y las direcciones de ΔP_x y de la normal a ΔA coinciden. La componente paralela a la sección se divide adicionalmente en componentes a lo largo de los ejes y y z. En este texto, como las direcciones de los vectores fuerza y sus componentes son en general conocidas, se usa su representación a escala empleando letras cursivas en vez de negritas.

Como las componentes de la intensidad de una fuerza por unidad de área, es decir, del *esfuerzo*, son ciertas sólo en un punto, la definición[3] matemática del esfuerzo es

$$\tau_{xx} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \qquad \tau_{xy} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \qquad y \qquad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A}$$

donde, en los tres casos, el primer subíndice de τ indica que considera el plano perpendicular al eje x y el segundo designa la dirección de la componente del esfuerzo. En la próxima sección consideraremos todas las posibles combinaciones de subíndices para esfuerzos.

La intensidad de la fuerza perpendicular o normal a la sección se llama *esfuerzo normal* en un punto. Es habitual llamar *esfuerzos de tensión* a los esfuerzos normales que generan tensión sobre la superficie de una sección. Por otra parte, aquellos que empujan contra ella son *esfuerzos de compresión.* En este libro, los esfuerzos normales serán usualmente designados

[3]Cuando $\Delta A \to 0$, surgen algunas cuestiones desde el punto de vista atómico al definir el esfuerzo de esta manera. Sin embargo, un modelo homogéneo (uniforme) para materia no homogénea parece haber funcionado bien.

por la letra σ en vez de por un doble subíndice sobre τ. Un solo subíndice basta entonces para designar la dirección del eje. Las otras componentes de la intensidad de la fuerza actúan paralelamente al plano del área elemental. Esas componentes se llaman *esfuerzos cortantes*. Los esfuerzos cortantes serán siempre designados por τ.

El lector debe formarse una idea clara de los esfuerzos llamados normales y de aquellos llamados cortantes. Repitiendo, los esfuerzos normales resultan de componentes de fuerzas perpendiculares al plano de corte y los esfuerzos cortantes resultan de las componentes tangenciales al plano de corte.

De acuerdo con las definiciones, como ellos representan la intensidad de una fuerza sobre un área, los esfuerzos se miden en unidades de fuerza dividida entre unidades de área. En el sistema inglés, las unidades para el esfuerzo son libras por pulgada cuadrada, abreviado *psi*. En muchos casos será conveniente usar como unidad de fuerza el término *kip* que significa kilolibra o mil libras. El esfuerzo en kips por pulgada cuadrada se abrevia *ksi*. Debe observarse que la unidad libra mencionada aquí, implica una libra-fuerza, no una libra-masa. Tales ambigüedades se evitan en la versión modernizada del sistema métrico decimal, que se conoce como Sistema Internacional de Unidades o unidades SI.[4] Las unidades SI se emplean cada vez más y se usan ampliamente en este texto junto con el sistema de unidades inglés. Las unidades básicas del SI son el *metro* (m) para longitudes, el *kilogramo* (kg) para masa y el *segundo* (s) para el tiempo. La unidad derivada para el área es un *metro cuadrado* (m^2) y para la aceleración, un *metro por segundo cuadrado* (m/s^2). La unidad de fuerza se define como una masa unitaria sometida a una aceleración unitaria, es decir, un *kilogramo-metro por segundo cuadrado* ($kg \cdot m/s^2$) que se designa como *newton* (N). La unidad de esfuerzo es el *newton por metro cuadrado* (N/m^2), designada también *pascal* (Pa). Se recomiendan los prefijos múltiplos y submúltiplos que representan pasos de 1000. Por ejemplo, la fuerza puede expresarse en *milinewton* (1 mN = 0.001 N), *newton* o *kilonewton* (1 kN = 1000 N), la longitud en *milímetros* (1 mm = 0.001 m), *metro* o *kilómetro* (1 km = 1000 m) y el esfuerzo en *kilopascal* (1 kPa = 10^3 Pa), *megapascal* (1 MPa = 10^6 Pa) o *gigapascal* (1 GPa = 10^9 Pa), etcétera.[5]

El esfuerzo expresado numéricamente en unidades de N/m^2 puede parecer muy pequeño a quienes están familiarizados con el sistema de unidades inglés. Esto se debe a que la fuerza de un newton es pequeña en relación con una libra-fuerza y un metro cuadrado está asociado con un área mucho mayor que una pulgada cuadrada. Por tanto, suele ser más conveniente, en la mayor parte de las aplicaciones, pensar en términos de una fuerza de un newton que actúa sobre un milímetro cuadrado. Las unidades para tal cantidad son N/mm^2, que corresponden a un *megapascal* (MPa).

[4]Del francés, Systéme International d'Unités.

[5]Una presentación detallada de las unidades SI, incluidos factores de conversión, tipografía SI y uso, puede encontrarse en una amplia guía publicada por la American Society for Testing and Materials, titulada ASTM *Standard for Metric Practice* E-380-86. Por conveniencia, se incluye una breve tabla de factores de conversión en la cubierta interior de la parte posterior de este texto.

En el forro posterior de este libro se dan algunos factores de conversión de unidades del sistema inglés a unidades del SI. Conviene recordar que aproximadamente 1 in ≈ 25 mm, 1 lb-fuerza ≈ 4.4 newtons, 1 psi ≈ 7000 Pa o 1 ksi ≈ 7 MPa.

Debe hacerse énfasis en que los *esfuerzos multiplicados por las respectivas áreas sobre las que ellos actúan dan fuerzas.* En una sección *imaginaria*, una suma vectorial de esas fuerzas, llamada *resultante de esfuerzos, mantiene un cuerpo en equilibrio.* En la mecánica de sólidos, las resultantes de esfuerzos en una sección dada por lo general se determinan primero, y luego, aplicando las fórmulas ya establecidas, se determinan los esfuerzos.

1-4. Tensor esfuerzo

Si, además de la sección implicada en el cuerpo libre de la figura 1-2, se pasa otro plano por el cuerpo a una distancia infinitesimal y paralelo al primero, quedará aislada una rebanada elemental. Entonces, si se pasan otros dos pares de planos normales al primer par, quedará aislado del cuerpo un cubo de dimensiones infinitesimales. Este cubo se muestra en la figura 1-3(a). Todos los esfuerzos que actúan sobre él están identificados en el diagrama. Como se indicó antes, los primeros subíndices sobre las τ asocian el esfuerzo con un plano perpendicular a un eje dado; los segundos subíndices designan el sentido del esfuerzo. Sobre las *caras cercanas* del cubo (es decir, sobre las caras alejadas del origen), los sentidos del esfuerzo son positivos si ellos coinciden con los sentidos positivos de los ejes. Sobre las caras del cubo hacia el origen, del concepto acción-reacción de equilibrio, los esfuerzos positivos actúan en sentido opuesto al sentido positivo de los ejes. (Nótese que para los esfuerzos normales, al cambiar el símbolo para el esfuerzo normal de τ a σ, un solo subíndice sobre σ es suficiente para definir esta cantidad sin ambigüedad.) Las designaciones para los es-

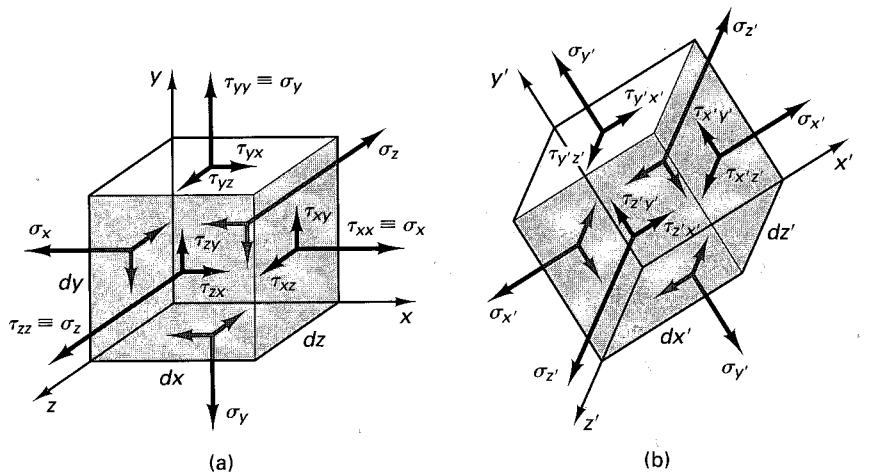


Fig. 1-3 (a) Estado general de esfuerzo actuando sobre un elemento infinitesimal en el sistema coordenado inicial. (b) Estado general de esfuerzo actuando sobre un elemento infinitesimal definido en un sistema girado de ejes coordenados. Todos los esfuerzos tienen sentido positivo.

fuerzos mostradas en la figura 1-3(a) se usan ampliamente en las teorías matemáticas de la elasticidad y la plasticidad.

Si en un punto se escoge un conjunto diferente de ejes, los esfuerzos correspondientes son como se muestran en la figura 1-3(b). Esos esfuerzos están relacionados, pero en general no son iguales a los mostrados en la figura 1-3(a). El proceso de cambiar esfuerzos de un conjunto de ejes coordenados a otro se llama *transformación de esfuerzos*. El estado de esfuerzo en un punto que puede ser definido por tres componentes sobre cada uno de los tres ejes mutuamente perpendiculares (ortogonales), se llama en terminología matemática *tensor*. Procesos matemáticos precisos se aplican para transformar tensores, incluidos los esfuerzos, de un conjunto de ejes a otro. Un análisis más completo de este problema se verá en el capítulo 11.

Un examen de los símbolos para los esfuerzos en la figura 1-3(a) muestra que hay tres esfuerzos normales: $\tau_{xx} \equiv \sigma_x, \tau_{yy} \equiv \sigma_y, \tau_{zz} \equiv \sigma_z$ y seis esfuerzos cortantes: $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$. En contraste, un vector fuerza $\boldsymbol{P}$ tiene sólo tres componentes: P_x, P_y y P_z. Éstas pueden escribirse de manera ordenada como un vector columna:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \tag{1-1a}$$

En forma análoga, las componentes de esfuerzo pueden ordenarse como sigue:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{1-1b}$$

Ésta es una representación matricial del *tensor esfuerzo*. Se trata de un tensor de segundo rango que requiere dos índices para identificar sus elementos o componentes. Un vector es un tensor de primer rango y un escalar es un tensor de rango cero. A veces, por brevedad, un tensor esfuerzo se escribe en notación indexada como τ_{ij}, donde se entiende que i y j pueden tomar las designaciones x, y y z como se notó en la ecuación 1-1b.

A continuación se mostrará que el tensor esfuerzo es simétrico (es decir, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$). Esto se infiere directamente de los requisitos de equilibrio para un elemento. Para este fin, sean dx, dy y dz las dimensiones de un elemento infinitesimal y sumemos los momentos de las fuerzas respecto a un eje como el eje z en la figura 1-4. Sólo los esfuerzos que aparecen en el problema se muestran en la figura. Despreciando los infinitesimales de orden superior,[6] este proceso es equivalente a tomar momentos respecto al eje z en la figura 1-4(a) o respecto al punto C en su representación bidimensional en la figura 1-4(b). Se tiene, entonces,

$$M_C = 0 \curvearrowright + \qquad + (\tau_{yx})(dx\,dz)(dy) - (\tau_{xy})(dy\,dz)(dx) = 0$$

[6]Existe la posibilidad de un cambio infinitesimal en esfuerzo de una cara del cubo a otra y la posibilidad de la presencia de fuerzas de cuerpo (inerciales). Considerando primero un elemento $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ y procediendo al límite, puede demostrarse rigurosamente que esas cantidades son de orden superior y, por tanto, despreciables.

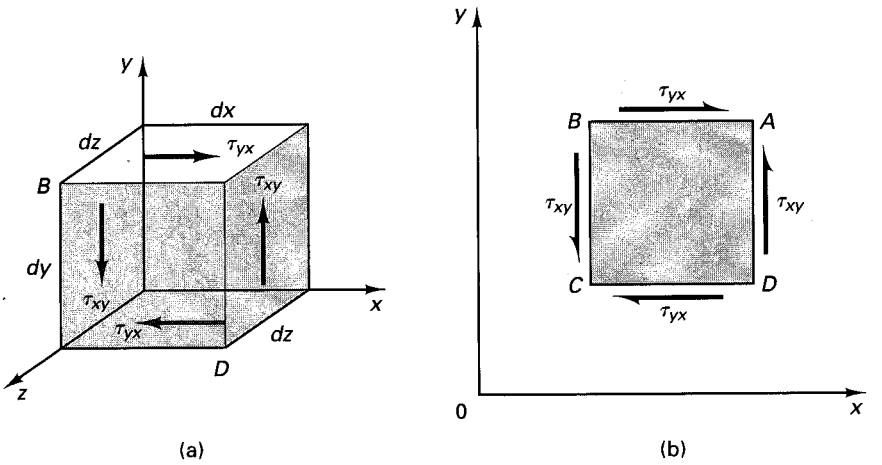


Fig. 1-4 Elementos en cortante puro.

donde las expresiones en paréntesis corresponden respectivamente a esfuerzo, área y brazo de momento. Simplificando,

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \tag{1-2}$$

En forma similar, puede mostrarse que $\tau_{xz} = \tau_x$ y que $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Por consiguiente, los subíndices para los esfuerzos cortantes son conmutativos (es decir, su orden puede intercambiarse) y el tensor esfuerzo es simétrico.

La implicación de la ecuación 1-2 es muy importante. El hecho de que los subíndices son conmutativos significa que los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares de un elemento infinitesimal son numéricamente iguales y que $\sum M_Z = 0$ no se satisface por un sólo par de esfuerzos cortantes. Sobre diagramas, como en la figura 1-4(b), las puntas de las flechas de los esfuerzos cortantes deben encontrarse en esquinas diametralmente opuestas de un elemento para que se satisfagan las condiciones de equilibrio.

En la mayoría de las situaciones subsecuentes consideradas en este texto, más de dos pares de esfuerzos cortantes rara vez actuarán simultáneamente sobre un elemento. Por consiguiente, los subíndices usados antes para identificar los planos y sentidos de los esfuerzos cortantes resultan superfluos. En tales casos, los esfuerzos cortantes serán designados por τ sin ningún subíndice. Sin embargo, debe recordarse que los esfuerzos cortantes siempre se presentan en dos pares.

Esta simplificación de la notación puede usarse convenientemente para el estado de esfuerzo mostrado en la figura 1-5. Los esfuerzos bidimensionales mostrados en la figura se denominan *esfuerzos en el plano*. En representación matricial tales esfuerzos pueden escribirse como

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1-3}$$

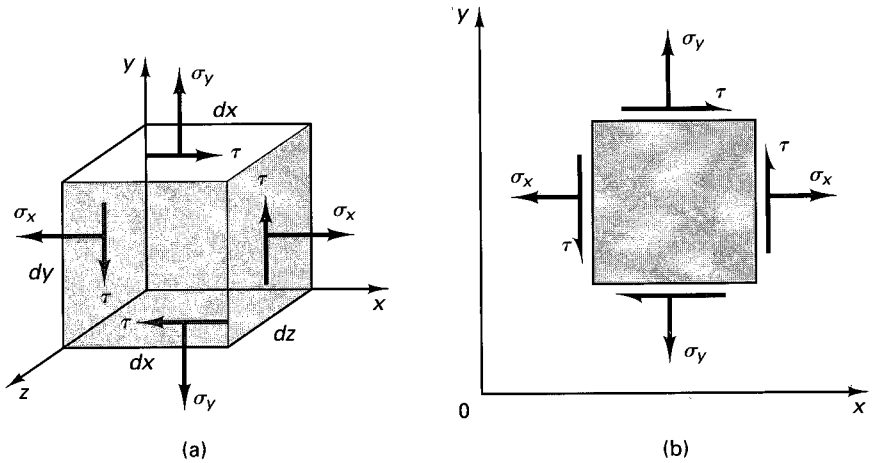


Fig. 1-5 Elementos de esfuerzo en un plano.

Debe notarse que el sistema de ejes seleccionado inicialmente puede no dar la información más importante sobre el esfuerzo en un punto. Entonces, usando los procedimientos de la transformación de esfuerzos, los esfuerzos se examinan en otros planos. Usando tales procedimientos, se mostrará luego que existe un conjunto particular de coordenadas que diagonaliza al tensor esfuerzo, que entonces toma la forma

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{1-4}$$

Nótese la ausencia de esfuerzos cortantes. Para el caso tridimensional, se dice que los esfuerzos son *triaxiales*, ya que son necesarios tres esfuerzos para describir completamente el estado de esfuerzo.

Para esfuerzo plano, $\sigma_3 = 0$ y el estado de esfuerzo es *biaxial*. Tales esfuerzos ocurren, por ejemplo, en láminas delgadas sometidas a esfuerzo en dos direcciones mutuamente perpendiculares. En miembros cargados axialmente, que se verán en la próxima sección, sólo queda un elemento del tensor esfuerzo; tal estado se denomina *uniaxial*. En el capítulo 11 se analizará un problema inverso:[7] cómo puede este término único descomponerse, para dar cuatro o más elementos de un tensor esfuerzo.

1-5. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

Un elemento infinitesimal de un cuerpo debe estar en equilibrio. Para el caso bidimensional, el sistema de esfuerzos que actúan sobre un elemento infinitesimal $(dx)(dy)(1)$ se muestra en la figura 1-6. En esta deducción, el

[7]Algunos lectores podrían preferir en este momento estudiar las primeras secciones del capítulo 11.

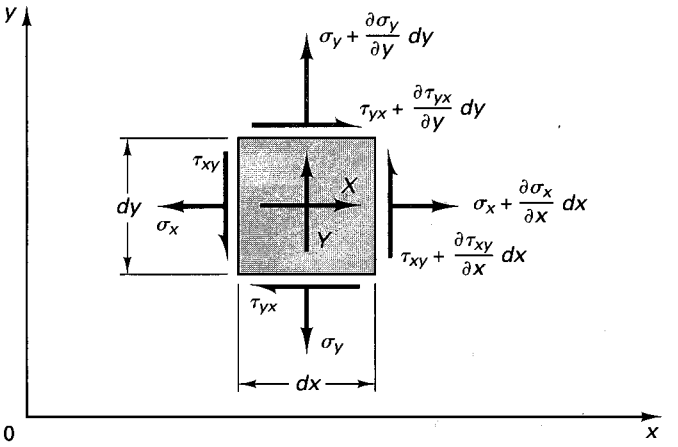


Fig. 1-6 Elemento infinitesimal con esfuerzos y fuerzas de cuerpo.

elemento es de espesor unitario en la dirección perpendicular al plano del papel. Note que se toma en cuenta la posibilidad de un incremento en los esfuerzos de una cara del elemento a la otra. Por ejemplo, como la razón de cambio de σ_x en la dirección x es $\partial\sigma_x/\partial x$ y se da un paso de magnitud dx, el incremento es $(\partial\sigma_x/\partial x)dx$. La notación de derivada parcial tiene que usarse para diferenciar entre las direcciones.

Las fuerzas inerciales o de cuerpo, como las causadas por el peso o por efectos magnéticos, se designan X y Y y están asociadas con el volumen unitario del material. Con esas notaciones,

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow +, \qquad \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right)(dy \times 1) - \sigma_x(dy \times 1)$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy\right)(dx \times 1) - \tau_{yx}(dx \times 1) + X(dx\, dy \times 1) = 0$$

Simplificando y recordando que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ se cumple, obtenemos la ecuación básica de equilibrio para la dirección x. Esta ecuación, junto con una análoga para la dirección y, tienen la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \tag{1-5}$$

El equilibrio por momento del elemento, $\Sigma M_z = 0$, se satisface ya que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Puede demostrarse que para el caso tridimensional, una ecuación típica de un conjunto de tres, es

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

Observe que en la deducción de las ecuaciones previas, no se han usado las propiedades mecánicas del material. Esto significa que esas ecuaciones son aplicables ya sea a material elástico, plástico o viscoelástico. Es también muy importante notar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar los esfuerzos desconocidos. En el caso bidimensional, dado por la ecuación 1-5, hay tres esfuerzos desconocidos, σ_x, σ_y y τ_{xy} y sólo dos ecuaciones. Para el caso tridimensional, hay seis esfuerzos, pero sólo tres ecuaciones. Así entonces, todos los problemas de análisis de esfuerzos son de forma interna estáticamente *indeterminados*. En la Sección 5-14 se da un simple ejemplo de cómo una ecuación de *equilibrio estático* es complementada por requisitos *cinemáticos* y por *propiedades mecánicas del material* para la resolución de un problema. En la mecánica de sólidos, tal como se presenta en este texto, esta indeterminación se elimina introduciendo hipótesis apropiadas, lo que es equivalente a tener ecuaciones adicionales.

Un *procedimiento numérico* que implica volver discreto un cuerpo en un gran número de *pequeños elementos finitos*, en vez de los infinitesimales de antes, se usa ahora con frecuencia en problemas complejos. Tal análisis con elementos finitos depende de las computadoras electrónicas de alta velocidad para resolver grandes sistemas de ecuaciones simultáneas. En el método del elemento finito, así como en el enfoque matemático, las ecuaciones de la estática son complementadas por las relaciones cinemáticas y por las propiedades mecánicas del material. Unos cuantos ejemplos presentados más tarde en este texto muestran las comparaciones entre las soluciones "exactas" de la teoría matemática de la elasticidad y las encontradas al aplicar la técnica del elemento finito y/o las soluciones convencionales basadas en los métodos de la mecánica de sólidos.

Parte B Análisis de esfuerzo de barras cargadas axialmente

1-6. Esfuerzo normal máximo en barras cargadas axialmente

En la mayor parte de las situaciones prácticas con barras cargadas axialmente, es conveniente determinar directamente el esfuerzo normal máximo. Esos esfuerzos se desarrollan *sobre secciones perpendiculares al eje de la barra*. Para tales secciones, el área de la sección transversal de una barra es un mínimo y la componente de la fuerza aplicada es un máximo, lo que resulta en un esfuerzo normal máximo. El procedimiento para determinar este esfuerzo se muestra en la figura 1-7.

Aquí, como se muestra en la figura 1-7(a), la fuerza axial $\boldsymbol{P}$ es aplicada a la barra prismática en su extremo derecho. Por equilibrio, una fuerza igual pero opuesta $\boldsymbol{P}$ debe actuar en su extremo izquierdo. Para distinguir entre la fuerza aplicada y la reacción se traza una rayita a través del vector

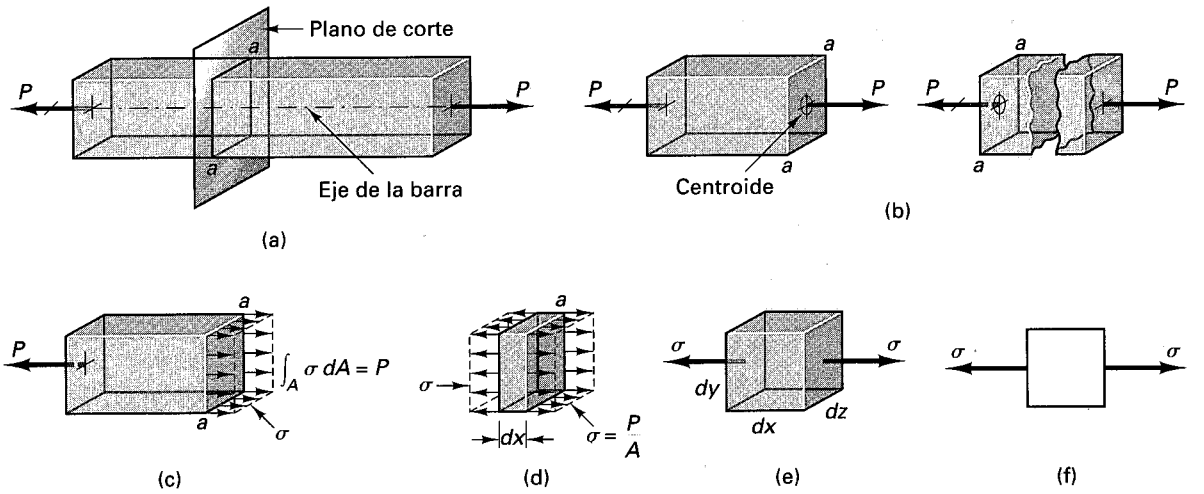


Fig. 1-7 Pasos sucesivos en la determinación del esfuerzo normal máximo en una barra cargada axialmente.

fuerza de reacción ***P***. Esta forma de identificación se usará frecuentemente en este texto. Encontrar las reacciones es usualmente el primer paso esencial en la resolución de problemas.

Para determinar los esfuerzos se dibuja un diagrama de cuerpo libre para la parte izquierda o para la parte derecha de la barra dividida por el plano de corte, como en la figura 1-7(b). En cualquier sección, el vector fuerza ***P*** pasa por el *centroide* de la barra. Como se muestra en la figura 1-7(c), la reacción sobre el extremo izquierdo es equilibrada en la sección *a-a* por un *esfuerzo normal uniformemente distribuido* σ. La suma de esos esfuerzos multiplicados por sus respectivas áreas genera una resultante de esfuerzos que es *estáticamente equivalente* a la fuerza *P*. En la figura 1-7(d) se muestra un rebanada delgada de la barra con esfuerzos normales iguales uniformemente distribuidos de sentido opuesto sobre las dos secciones paralelas. Este estado de esfuerzo *uniaxial* puede representarse sobre un cubo infinitesimal, como se muestra en la figura 1-7(e). Sin embargo, se usa comúnmente un diagrama simplificado como el de la figura 1-7(f).

La ecuación básica para determinar directamente el esfuerzo normal máximo en una barra cargada axialmente se da aquí en la forma habitual, es decir, sin ningún subíndice sobre σ. Sin embargo, los subíndices se agregan con frecuencia para indicar el sentido del eje de la barra. Esta ecuación da el esfuerzo normal máximo en una sección perpendicular al eje del miembro. Entonces,

$$\sigma = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{P}{A} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right] \text{o} \left[\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right] \tag{1-6}$$

donde P es la fuerza axial aplicada y A es el área de la sección transversal del miembro. En los cálculos es conveniente usar $\text{N/mm}^2 = \text{MPa}$ en el sistema SI de unidades y *ksi* en el sistema inglés.

Es conveniente notar que el esfuerzo normal σ dado por la ecuación 1-6 y representado esquemáticamente en la figura 1-7(e), es una descripción completa del estado de esfuerzo en una barra cargada axialmente. Sólo queda el término diagonal σ_x en la representación matricial del tensor esfuerzo dado por la ecuación 1-1b. Este término restante está asociado con la dirección del eje de la barra.

La ecuación 1-6 se aplica estrictamente sólo a barras *prismáticas* (es decir, a barras que tienen área transversal constante). Sin embargo, la ecuación es razonablemente exacta para miembros ligeramente ahusados.[8] Véase la Sección 3-3 donde se analizan situaciones en que ocurren cambios abruptos del área transversal, ocasionando severas perturbaciones en el esfuerzo.

Como se indicó antes, la resultante de esfuerzo para uno uniformemente distribuido, actúa por el centroide del área de una sección transversal y garantiza el equilibrio de un miembro axialmente cargado. Si la carga es más compleja, como la de la parte de máquina mostrada en la figura 1-8, la distribución del esfuerzo no es uniforme. Aquí, en la sección *a-a*, además de la fuerza axial P, se desarrolla también un momento flexionante M. Tales problemas se tratarán en el capítulo 8.

Un razonamiento similar se aplica a miembros cargados axialmente en compresión y puede entonces usarse la ecuación 1-6. Sin embargo, debe tenerse cuidado al investigar los miembros en compresión. Éstos pueden ser tan esbeltos que no se comporten de la manera esperada. Por ejemplo, una caña de pescar común, bajo una fuerza de compresión axial pequeña, tiene la tendencia a pandearse lateralmente y a colapsarse. La consideración de tal *inestabilidad* de los miembros en compresión se verá en el capítulo 16. *La ecuación 1-6 es aplicable sólo a miembros robustos cargados axialmente en compresión* (es decir, bloques cortos). Como se mostrará en el capítulo 16, un bloque cuya *menor* dimensión es aproximadamente un décimo de su longitud puede considerarse usualmente como un bloque corto. Por ejemplo, una pieza de madera de 50×100 mm puede tener 500 mm de longitud y aún considerarse como un bloque corto.

Algunas veces los esfuerzos de compresión aparecen cuando un cuerpo está soportado por otro. Si la resultante de las fuerzas aplicadas coincide con el centroide del área de contacto entre los dos cuerpos, la intensidad de las fuerzas o esfuerzo entre los cuerpos puede determinarse de nuevo con la ecuación 1-6. Es costumbre llamar a este esfuerzo normal *esfuerzo de aplastamiento*. La figura 1-9, donde un bloque corto se apoya sobre una zapata de concreto y ésta se apoya sobre el suelo, ilustra tal esfuerzo. Numerosas situaciones similares aparecen en problemas mecánicos bajo las arandelas empleadas para distribuir fuerzas concentradas. Esos esfuerzos de aplastamiento pueden aproximarse dividiendo la fuerza aplicada P entre el área correspondiente de contacto, obteniendo así un *esfuerzo de aplastamiento nominal.*

Al aceptar la ecuación 1-6, debe tenerse en cuenta que el comportamiento del material está *idealizado*. Cada partícula de un cuerpo se supone que contribuye igualmente a resisitir la fuerza. Se implica una perfecta

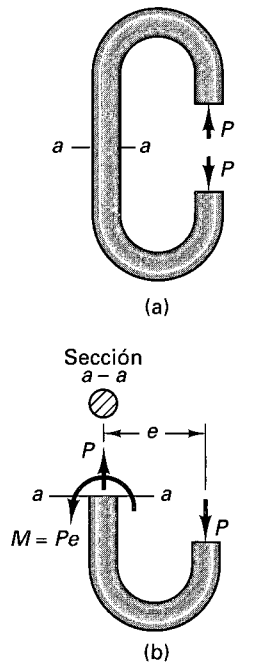


Fig. 1-8 Miembro con una distribución no uniforme del esfuerzo en la sección *a-a*.

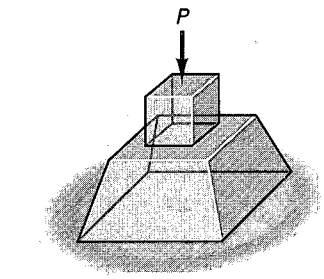


Fig. 1-9 Esfuerzos de apoyo que se presentan entre el dado y la zapata así como entre la zapata y el suelo.

[8]Para soluciones exactas de barras ahusadas, véase S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1970), pág. 109.

homogeneidad del material por tal suposición. Los materiales reales, como los metales, consisten en un gran número de granos, mientras que la madera es fibrosa. En materiales reales, algunas partículas contribuyen más a resistir una fuerza que otras. Las distribuciones ideales de esfuerzos como las que se muestran en las figuras 1-7(d) y (e) no existen en realidad si la escala escogida es suficientemente pequeña. La verdadera distribución de esfuerzos varía en cada caso en particular y es sumamente irregular, como se muestra en la figura 1-10(a). Sin embargo, en promedio, hablando estadísticamente, los cálculos basados en la ecuación 1-6 son correctos y, por consiguiente, el esfuerzo promedio calculado representa una cantidad altamente significativa.

Es también importante notar que las ecuaciones básicas para determinar esfuerzos, tal como la ecuación 1-6, suponen un *material inicialmente libre de esfuerzos.* Sin embargo, al ser fabricados, los materiales suelen ser alisados, resaltados, forjados, soldados, doblados y martillados. En las fundiciones, los materiales no se enfrían uniformemente. Esos procesos pueden inducir altos esfuerzos internos llamados *esfuerzos residuales*. Por ejemplo, las placas calientes de acero durante una operación de alisado son jaladas entre rodillos, como se muestra de manera esquemática en la figura 1-10(b). Este proceso ocasiona el desarrollo de mayores esfuerzos normales cerca de las superficies exteriores que en la mitad de la placa. Esos esfuerzos equivalen a un esfuerzo promedio normal σ_{prom} que puede considerarse que genera una fuerza que impulsa la placa a través de los rodillos. Al salir de éstos, la placa que se muestra en la figura 1-10(c) es relevada de esta fuerza, y de acuerdo con la ecuación 1-6, el σ_{prom} es restado de los esfuerzos que existían durante el alisado. El patrón de los esfuerzos normales residuales se muestra en la figura 1-10(c). Esos esfuerzos residuales son autoequilibrantes (es decir, están en equilibrio sin ninguna fuerza aplicada externamente). En los problemas reales, tales esfuerzos residuales pueden ser de gran tamaño y deben ser investigados cuidadosamente y luego sumados a los esfuerzos calculados para el material inicialmente libre de esfuerzos.

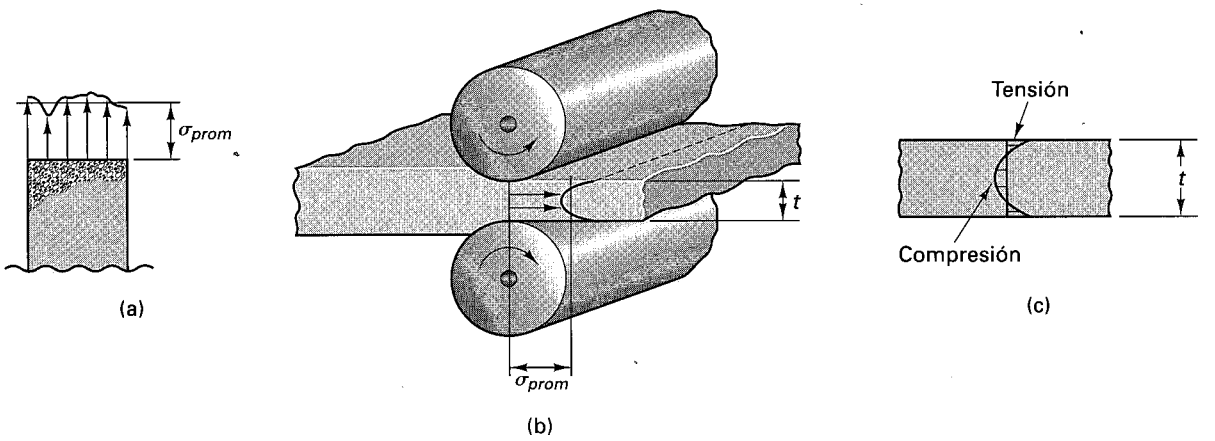


Fig. 1-10 (a) Ilustración esquemática de irregularidad en los esfuerzos en el material debido a falta de homogeneidad, (b) variación del esfuerzo de tensión a través de una placa durante una operación de alisado y (c) esfuerzos residuales en una placa alisada.

1-7. Esfuerzo sobre secciones inclinadas en barras cargadas axialmente

Usaremos el enfoque tradicional de la mecánica de sólidos para determinar los esfuerzos internos sobre secciones inclinadas arbitrariamente en barras cargadas axialmente. Los primeros pasos de este procedimiento están ilustrados en la figura 1-11. Aquí, como una fuerza axial ***P*** está aplicada sobre el extremo derecho de una barra prismática, por equilibrio, una fuerza igual pero opuesta ***P*** debe actuar sobre el extremo izquierdo.

En este problema, después de haber determinado la fuerza reactiva ***P***, se dibujan diagramas de cuerpo libre para los segmentos de la barra, aislados por secciones como la *a-a* o *b-b*. En ambos casos, la fuerza ***P*** requerida por equilibrio se muestra en las secciones. Sin embargo, para obtener los esfuerzos convencionales, que son los más convenientes en el análisis de esfuerzos, la fuerza ***P*** se reemplaza por sus componentes a lo largo de ejes seleccionados. Una línea ondulada sobre los vectores ***P*** indica su reemplazo por componentes. Para fines ilustrativos, se gana poco al considerar el caso mostrado en la figura 1-11(b), que requiere tres componentes de fuerza. El análisis simplemente se vuelve muy complicado. Más bien, el caso de la figura 1-11(c), con sólo dos componentes de P en el plano de simetría de la sección transversal de la barra, se considerará en detalle. Una de esas componentes es normal a la sección; la otra está en el plano de la sección.

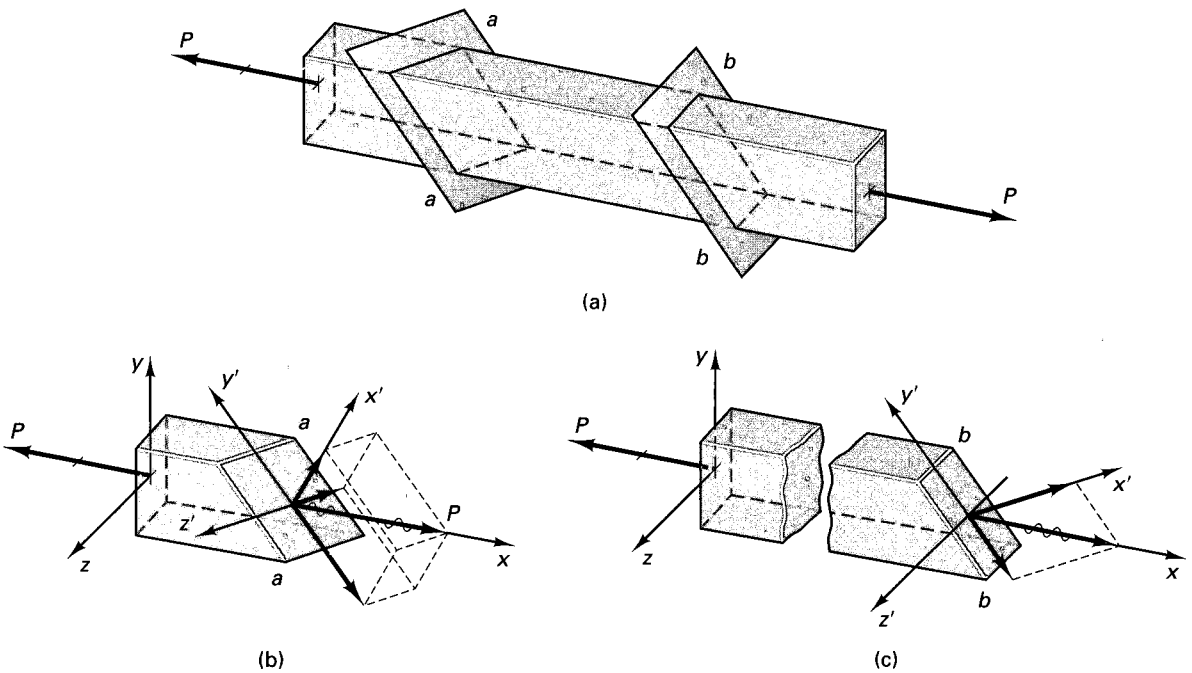


Fig. 1-11 Seccionamiento de una barra prismática por planos arbitrarios.

Como ejemplo de un análisis detallado de los esfuerzos en una barra sobre planos inclinados, considere dos secciones 90° aparte, perpendiculares a los lados de la barra, como se muestra en la figura 1-12(a). La sección *a-a* forma un ángulo θ con la vertical. Una parte aislada de la barra a la izquierda de esta sección se muestra en la figura 1-12(b). Nótese que la normal a la sección que coincide con el eje *x* también forma un ángulo θ con el eje *x*. *La fuerza aplicada, la reacción, así como la fuerza equilibrante P en la sección, actúan todas a través del centroide de la sección de la barra.* Como se muestra en la figura 1-12(b), la fuerza equilibrante *P* se descompone en dos componentes: la componente de fuerza normal, $P \cos \theta$, y la componente del cortante, $P \operatorname{sen} \theta$. El área de la sección transversal inclinada es $A/\cos \theta$. Por tanto, el esfuerzo normal σ_θ y el esfuerzo cortante τ_θ, mostrados en las figuras 1-12(c) y (d), están dados por las dos ecuaciones siguientes:

$$\sigma_\theta = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{P \cos \theta}{A/\cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta \qquad (1\text{-}7a)$$

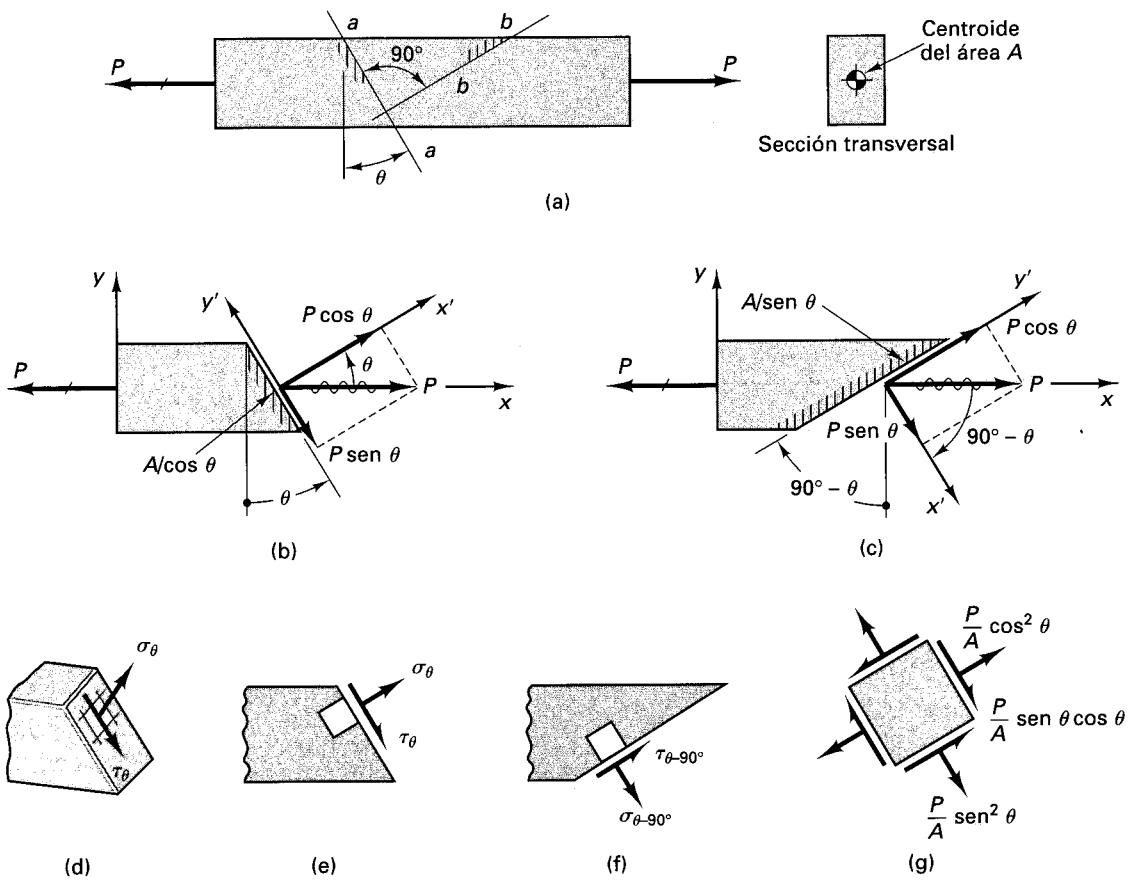


Fig. 1-12 Seccionamiento de una barra prismática por planos mutuamente perpendiculares.

y

$$\tau_\theta = -\frac{P \operatorname{sen}\theta}{A/\cos\theta} = \frac{P}{A} \operatorname{sen}\theta\cos\theta \qquad (1\text{-}7b)$$

El signo negativo en la ecuación 1-7b se usa de acuerdo con la convención de signos para los esfuerzos cortantes adoptada antes. Véase, por ejemplo, la figura 1-11. La necesidad de un signo negativo es evidente notando que la fuerza cortante P sen θ actúa en sentido opuesto al del eje y'.

Es importante notar que el procedimiento básico de la mecánica de sólidos usado aquí da el esfuerzo *promedio* o *medio* en una sección. Esos esfuerzos son determinados de las fuerzas axiales necesarias para el equilibrio en una sección. Por consiguiente, ellos *siempre* satisfacen a la *estática.* Sin embargo, con base en los requisitos adicionales de la *cinemática* (deformaciones geométricas) y de las *propiedades mecánicas del material*, se sabe que grandes esfuerzos *locales* aparecen en la proximidad de fuerzas concentradas. Esto también ocurre en los cambios abruptos de áreas transversales. Los esfuerzos promedio en una sección son exactos a una distancia aproximadamente igual a la altura del miembro desde las fuerzas concentradas o desde los cambios abruptos en el área transversal. El uso de este procedimiento simplificado será racionalizado en la Sección 3-3 como el *principio de Saint-Venant.*

Las ecuaciones 1-7a y 1-7b muestran que los esfuerzos normal y cortante varían con el ángulo θ. El sentido de esos esfuerzos se muestra en las figuras 1-12(d) y (e). El esfuerzo normal σ_θ alcanza su valor máximo en $\theta = 0°$ (es decir, cuando la sección es perpendicular al eje de la barra). El esfuerzo cortante correspondiente es cero. Esto nos lleva a la conclusión de que el esfuerzo normal máximo $\sigma_{máx}$ en una barra cargada axialmente puede ser determinado simplemente con la siguiente ecuación:

$$\sigma_{máx} = \sigma_x = \frac{P}{A} \qquad (1\text{-}8)$$

donde P es la fuerza aplicada y A es el área de la sección transversal de la barra. Esto corresponde precisamente a la ecuación 1-6 establecida antes sobre una base más intuitiva.

Las ecuaciones 1-7(a) y 1-7(b) también muestran que para $\theta = \pm 90°$, los esfuerzos normal y cortante desaparecen, ya que ningún esfuerzo actúa a lo largo de las fronteras (superficies) libres superior e inferior de la barra.

Para encontrar el esfuerzo cortante máximo que actúa en una barra debe diferenciarse la ecuación 1-7(b) con respecto a θ e igualar a cero la derivada. Al efectuar esta operación y simplificar los resultados, se obtiene

$$\tan\theta = \pm 1 \qquad (1\text{-}9)$$

de donde se concluye que $\tau_{máx}$ ocurre sobre planos a $+45°$ o $-45°$ con el eje de la barra. Como usualmente no es importante el sentido en que actúa un esfuerzo cortante, al sustituir cualquiera de los valores anteriores de θ en la ecuación 1-7(b), se encuentra

$$\tau_{máx} = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_x}{2} \qquad (1\text{-}10)$$

Por lo tanto, el esfuerzo cortante máximo en una barra cargada axialmente es sólo la mitad del valor del esfuerzo normal máximo.

Siguiendo el mismo procedimiento pueden encontrarse los esfuerzos normal y cortante sobre la sección *b-b*. Observando que el ángulo que localiza este plano respecto a la vertical se mide más fácilmente en sentido horario que en sentido antihorario, como en el caso anterior, este ángulo debe tratarse como una cantidad negativa en la ecuación 1-7(b). Por tanto, se usará el subíndice $-(90° - \theta) = \theta - 90°$ al designar los esfuerzos. De la figura 1-12(e), se obtiene

$$\sigma_{\theta-90°} = \frac{P \operatorname{sen}\theta}{A/\operatorname{sen}\theta} = \frac{P}{A} \operatorname{sen}^2\theta \qquad (1\text{-}11)$$

y

$$\tau_{\theta-90°} = \frac{P \cos\theta}{A/\operatorname{sen}\theta} = \frac{P}{A} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad (1\text{-}12)$$

Nótese que, en este caso, como la fuerza cortante y el eje y' tienen el mismo sentido, la expresión en la ecuación 1-12 es positiva. La ecuación 1-12 puede obtenerse de la ecuación 1-7b sustituyendo el ángulo $\theta - 90°$. El sentido de $\sigma_{\theta-90°}$ y $\tau_{\theta-90°}$ se muestra en la figura 1-12(f).

Los resultados combinados del análisis para las secciones *a-a* y *b-b* se muestran sobre un elemento infinitesimal en la figura 1-12(g). Note que los esfuerzos normales sobre las caras adyacentes del elemento no son iguales, mientras que los esfuerzos cortantes sí lo son. Esto está en completo acuerdo con la anterior conclusión general obtenida en la Sección 1-4, de que los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares deben ser iguales.

1-8. Esfuerzos cortantes

Algunos materiales de la ingeniería (por ejemplo, el acero al bajo carbono) son más débiles en cortante que en tensión, y, bajo cargas grandes, se desarrollan deslizamientos a lo largo de sus planos de esfuerzo cortante máximo. De acuerdo con las ecuaciones 1-9 y 1-10, esos *planos de deslizamiento* en una probeta a tensión forman ángulos de 45° con el eje de la barra, y es donde se presentan los esfuerzos cortantes máximos $\tau_{máx} = P/2A$. Sobre las superficies pulidas de una probeta, esas líneas pueden ser observadas fácilmente y se llaman *líneas de Lüders.*[9] Este tipo de comportamiento del material corresponde a una *falla dúctil.*

En muchas aplicaciones rutinarias de la ingeniería, grandes esfuerzos cortantes pueden desarrollarse en posiciones críticas. Determinar tales esfuerzos con precisión suele ser difícil. Sin embargo, *suponiendo* que en el plano de una sección se desarrolla un *esfuerzo cortante uniformemente distribuido*, puede encontrarse fácilmente una solución. Usando este enfoque, el esfuerzo cortante promedio τ_{prom} se determina dividiendo la fuerza cortante V en el plano de la sección entre el área correspondiente A.

[9]También conocidas como *líneas de Piobert.* Nombradas en honor, respectivamente, de los citados investigadores alemán y francés del siglo XIX.

$$\tau_{prom} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{V}{A} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] \text{o} \left[\frac{lb}{in^2}\right] \qquad (1\text{-}13)$$

En la figura 1-13 se muestran algunos ejemplos de dónde puede usarse convenientemente la ecuación 1-13. En la figura 1-13(a) se muestra un pequeño bloque unido con pegamento a otro bloque más grande. Separando el bloque superior del inferior por una sección imaginaria se obtiene el diagrama de equilibrio mostrado en la figura 1-13(b). El pequeño par aplicado *Pe*, que genera pequeños esfuerzos normales perpendiculares a la sección *a-a*, es comúnmente despreciado. Con base en esto, τ_{prom}, mostrado en la figura 1-13(c), puede encontrarse usando la ecuación 1-13 dividiendo *P* entre el área *A* de la sección *a-a*. Un procedimiento similar se usa para determinar τ_{prom} en el problema mostrado en la figura 1-13(d). Sin embargo, en este caso, *dos* superficies pegadas están disponibles para transferir la carga aplicada *P*. El mismo enfoque, usando secciones imaginarias, es aplicable a miembros sólidos.

Ejemplos de dos conexiones atornilladas se muestran en las figuras 1-14(a) y (e). Esas conexiones pueden analizarse de dos maneras distintas. Según una de ellas, se supone que un tornillo apretado desarrolla una fuerza de apriete suficientemente grande tal que la fricción desarrollada entre las superficies en contacto impide que la junta se deslice. Para tales diseños se emplean comúnmente tornillos de alta resistencia. Un enfoque alternativo ampliamente usado supone que ocurre un deslizamiento tal que la fuerza aplicada es transferida primero a un tornillo y luego del tornillo a la placa conectora, como se ilustra en las figuras 1-14(b) y (f). Para determinar τ_{prom} en esos tornillos, se usa simplemente el área transversal *A* de un tornillo en vez del área de la superficie de contacto de la junta para calcular el esfuerzo cortante promedio. Se dice que el tornillo mostrado en la figura 1-14(a) está en cortante *simple*, mientras que el mostrado en la figura 1-14(e) está en cortante *doble*.

En conexiones soldadas, requiere consideración otro aspecto del problema. En casos como los de las figuras 1-14(a) y (e), cuando la fuerza *P* es aplicada, una presión muy irregular se desarrolla entre un tornillo y las placas. La intensidad nominal *promedio* de la presión se obtiene dividiendo la fuerza transmitida entre el área proyectada del tornillo sobre la placa. A éste se le llama *esfuerzo de aplastamiento*. El esfuerzo de aplastamiento en la figura 1-14(a) es $\sigma_b = P/td$, donde *t* es el espesor de la placa y *d* es el diámetro del tornillo. Para el caso en la figura 1-14(e), los esfuerzos de aplastamiento para la placa media y las placas exteriores son $\sigma_1 = P/t_1 d$ y $\sigma_2 = P/2t_2 d$, respectivamente.

El mismo procedimiento se aplica también a conexiones remachadas.

En el enfoque previo de diseño, ha sido despreciada la resistencia friccional entre las superficies en contacto en los conectores. Sin embargo, si la fuerza de apriete desarrollada por un conector es suficientemente grande y confiable, la capacidad de una junta puede ser determinada con base en la fuerza de fricción entre las superficies en contacto. Esta condición se muestra en la figura 1-15. Con el uso de tornillos de alta resistencia con rendimiento del orden de 100 ksi (700 MPa), éste es un método aceptable en el diseño estructural de acero. El apriete requerido de tales tornillos se especifica usualmente como aproximadamente el 70% de su resistencia a la

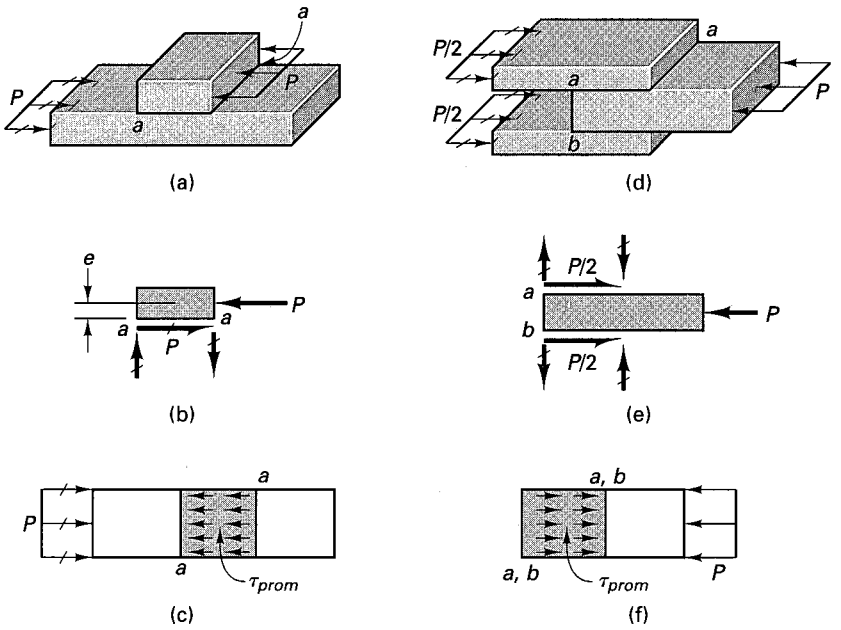


Fig. 1-13 Condiciones de carga que causan esfuerzos cortantes entre las interfaces de bloques unidos con pegamento.

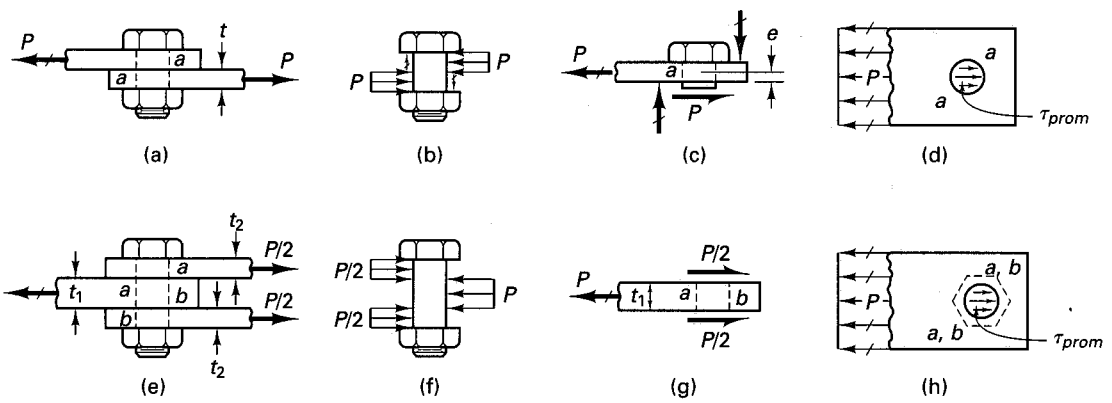


Fig. 1-14 Condiciones de carga que causan esfuerzos cortantes y de aplastamiento en tornillos.

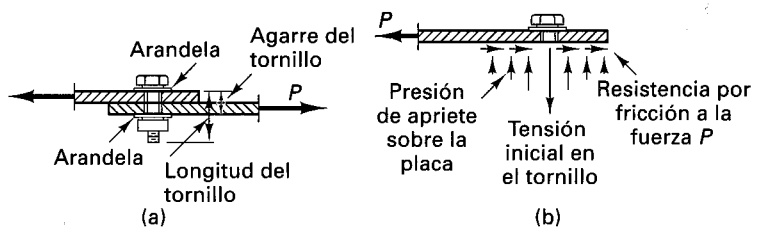


Fig. 1-15

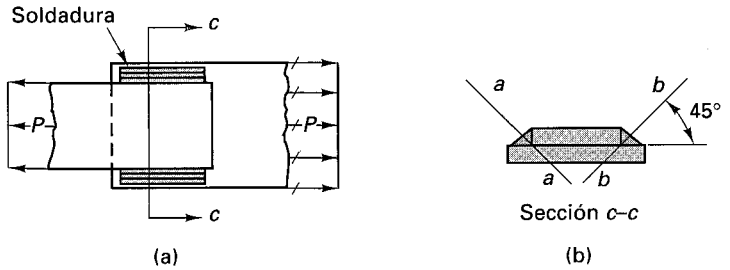


Fig. 1-16 Condición de carga que causa un esfuerzo cortante crítico en dos planos de soldaduras de filete.

tensión. Para los fines de un análisis simplificado, se especifica un esfuerzo cortante permisible basado en el área nominal de un tornillo. Esos esfuerzos se basan en experimentos. Esto permite que el diseño de conexiones, al usar tornillos de alta resistencia, se lleve a cabo de la misma manera que para los tornillos o los remaches ordinarios.

Otra manera de unir miembros entre sí es por medio de soldadura. Un ejemplo de una conexión con soldaduras de filete se muestra en la figura 1-16. El esfuerzo cortante máximo ocurre en los planos *a-a* y *b-b*, como se muestra en la figura 1-16(b). La capacidad de tales soldaduras es usualmente dada en unidades de fuerza por unidad de longitud de soldadura.

1-9. Análisis de los esfuerzos normales y cortantes

Una vez que la fuerza axial P o la fuerza cortante V, así como el área A, han sido determinadas en un problema dado, pueden aplicarse fácilmente las ecuaciones 1-6 y 1-13 para calcular los esfuerzos normal y cortante. Esas ecuaciones que dan, respectivamente, las magnitudes máximas de los esfuerzos normal y cortante, son particularmente importantes, ya que determinan la demanda máxima sobre la resistencia de un material. Esos esfuerzos máximos ocurren en una sección de área transversal *mínima* y/o de fuerza axial máxima. Tales secciones se llaman *secciones críticas*. En los problemas más simples, la sección crítica para el arreglo particular que se analiza puede encontrarse usualmente por inspección. En otros problemas, esto puede requerir un extenso análisis, el cual suele hacerse ahora con ayuda de una computadora. El determinar la fuerza P o V que actúa en un miembro es por lo general una tarea más difícil. En la mayor parte de los problemas tratados en este texto, esta última información se obtiene por estática.

Para el equilibrio de un cuerpo en el espacio, las ecuaciones de la estática requieren del cumplimiento de las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \Sigma F_x = 0 & \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma F_z = 0 & \Sigma M_z = 0 \end{array} \qquad (1\text{-}14)$$

La primera columna de la ecuación 1-14 establece que la suma de *todas* las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en cualquier dirección (x, y, z) debe ser cero. La segunda columna establece que para tener equilibrio, la suma de los momentos de *todas* las fuerzas respecto a *cualquier* eje paralelo a cualquier dirección (x, y, z) debe también ser cero. En un problema en un *plano* (es decir, todos los miembros y fuerzas se encuentran en un solo plano, tal como el plano x-y), las relaciones $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma M_y = 0$, si bien aún válidas, son triviales.

Esas ecuaciones de la estática son directamente aplicables a cuerpos sólidos deformables. Las deformaciones toleradas en las estructuras son usualmente despreciables en comparación con las dimensiones de éstas. Por tanto, *con el fin de obtener las fuerzas en los miembros, se usan las dimensiones iniciales no deformadas de los miembros.*

Si las ecuaciones de la estática son suficientes para determinar las reacciones externas así como los esfuerzos internos resultantes, un sistema estructural es *estáticamente determinado*. Un ejemplo se muestra en la figura 1-17(a). Sin embargo, si para la misma viga y condiciones de carga se proporcionan soportes adicionales, como en las figuras 1-17(b) y (c), el número de ecuaciones *independientes* de la estática es insuficiente para encontrar las reacciones. En la figura 1-17(b), cualquiera de las reacciones verticales puede suprimirse y el sistema estructural permanece estable. Similarmente, dos reacciones cualquiera pueden suprimirse en la viga de la figura 1-17(c). Esas dos vigas son estáticamente *indeterminadas.* Las reacciones que pueden suprimirse dejando un sistema estable estáticamente determinado son superfluas o *redundantes*. Tales redundancias pueden surgir también dentro del sistema interno de fuerzas. Dependiendo del número de fuerzas internas redundantes o reacciones, se dice que el sistema es indeterminado de *primer grado*, como en la figura 1-17(b), de *segundo grado*, como en la figura 1-17(c), etc. Múltiples grados de indeterminación estática aparecen con frecuencia en la práctica y uno de los objetivos importantes de este tema es proporcionar una introducción a los métodos de resolución de tales problemas. Los procedimientos para resolver estos problemas se presentarán gradualmente.

Las ecuaciones 1-14 ya deben ser familiares para el lector. Sin embargo, se dan ahora varios ejemplos donde son aplicables, poniendo énfasis en los procedimientos de resolución empleados comúnmente en la mecánica de sólidos. Los ejemplos determinados estáticamente servirán como un repaso informal de algunos de los principios de la estática y mostrarán las aplicaciones de las ecuaciones 1-6 y 1-13.

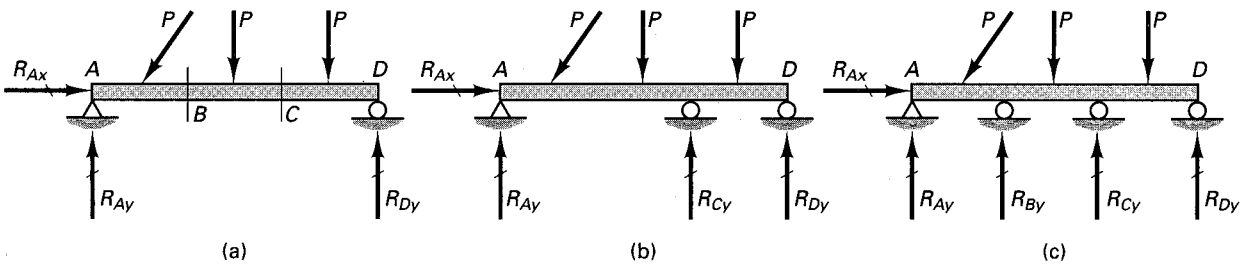


Fig. 1-17 Vigas idénticas con cargas idénticas con diferentes condiciones en los apoyos: (a) estáticamente determinada, (b) estáticamente indeterminada de primer grado, (c) estáticamente indeterminada de segundo grado.

Ejemplo 1-1

La viga BE en la figura 1-18(a) se usa en una máquina elevadora. Ésta se encuentra anclada con dos pernos en B, y en C descansa sobre un parapeto. Los detalles esenciales se dan en la figura. Note que los pernos están roscados, como se muestra en la figura 1-18(d), con $d = 16$ mm en la raíz de las roscas. Si la máquina está sometida a una fuerza de 10 kN, determine el esfuerzo en los pernos BD y el esfuerzo de aplastamiento en C. Suponga que el peso de la viga es imperceptible en comparación con la carga considerada.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, la situación real se idealiza y se dibuja un diagrama de cuerpo libre sobre el cual se indican todas las fuerzas conocidas y desconocidas. Éste se muestra en la figura 1-18(b). Las reacciones verticales en B y C son desconocidas. Se designan por R_{By} y R_{Cy}, respectivamente, donde el primer subíndice identifica la localización y el segundo la línea de acción de la fuerza desconocida. Como los pernos largos BD no son eficaces para resistir la fuerza horizontal, se supone sólo una reacción horizontal desconocida en C y se designa como R_{Cx}. La fuerza aplicada conocida P se muestra en su posición correcta. Después de dibujar un diagrama de

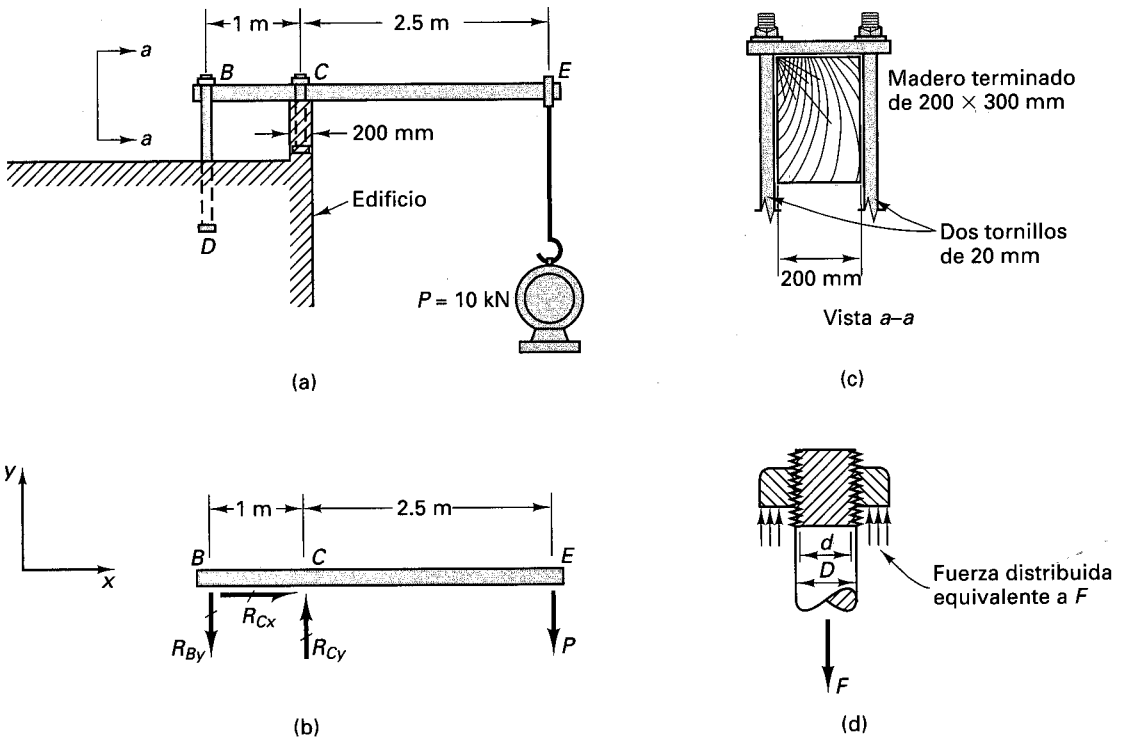


Fig. 1-18

cuerpo libre se aplican las ecuaciones de estática y se calculan las fuerzas desconocidas.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{Cx} = 0$$

$$\Sigma M_B = 0 \curvearrowleft + \qquad 10(2.5 + 1) - R_{Cy} \times 1 = 0 \qquad R_{Cy} = 35 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma M_c = 0 \curvearrowleft + \qquad 10 \times 2.5 - R_{By} \times 1 = 0 \qquad R_{By} = 25 \text{ kN} \uparrow$$

Comprobación: $\Sigma F_y = 0 \uparrow + \qquad -25 + 35 - 10 = 0$

Estos pasos completan y verifican el trabajo de determinar las fuerzas. Se determinan a continuación las diversas áreas del material que resiste a esas fuerzas y se aplica la ecuación 1-6.

Área transversal de un tornillo de 20 mm: $A = \pi 10^2 = 314 \text{ mm}^2$. Ésta no es el área mínima de un tornillo, ya que las roscas la reducen.

El área transversal de un tornillo de 20 mm en la raíz de las roscas es

$$A_{\text{neta}} = \pi\, 8^2 = 201 \text{ mm}^2$$

Esfuerzo[10] normal de tensión máximo en cada uno de los dos tornillos *BD*:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{R_{By}}{2A} = \frac{25 \times 10^3}{2 \times 201} = 62 \text{ N/mm}^2 = 62 \text{ MPa}$$

Esfuerzo de tensión en el vástago de los tornillos *BD*:

$$\sigma = \frac{25 \times 10^3}{2 \times 314} = 39.8 \text{ N/mm}^2 = 39.8 \text{ MPa}$$

Área de contacto en *C*:

$$A = 200 \times 200 = 40 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

Esfuerzo de aplastamiento en *C*:

$$\sigma_b = \frac{R_{Cy}}{A} = \frac{35 \times 10^3}{40 \times 10^3} = 0.875 \text{ N/mm}^2 = 0.875 \text{ MPa}$$

El esfuerzo calculado para el vástago del tornillo puede representarse en la forma de la ecuación 1-1b como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +39.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

donde el eje *y* se toma en la dirección de la carga aplicada. En los problemas comunes, está implicado el resultado completo, pero rara vez se escribe con detalle.

---

[10]Véase también el análisis sobre concentraciones de esfuerzos en la Sección 3-3.

Ejemplo 1-2

La zapata de concreto que se muestra en la figura 1-19(a) está cargada en su parte superior con una carga uniformemente distribuida de 20 kN/m^2. Investigue el estado de esfuerzo en un nivel a 1 m arriba de la base. El concreto tiene un peso específico de aproximadamente 25 kN/m^3.

SOLUCIÓN

En este problema, el peso propio de la estructura es considerable y debe incluirse en los cálculos.

Peso de toda la zapata:

$$W = [(0.5 + 1.5)/2] \times 0.5 \times 2 \times 25 = 25 \text{ kN}$$

Fuerza aplicada total:

$$P = 20 \times 0.5 \times 0.5 = 5 \text{ kN}$$

De $\Sigma F_y = 0$, la reacción en la base es

$$R = W + P = 30 \text{ kN}$$

Esas fuerzas se muestran en forma esquemática en los diagramas como fuerzas concentradas que actúan en sus centroides respectivos. Luego, para determinar el esfuerzo en el nivel deseado, el cuerpo se corta en dos partes

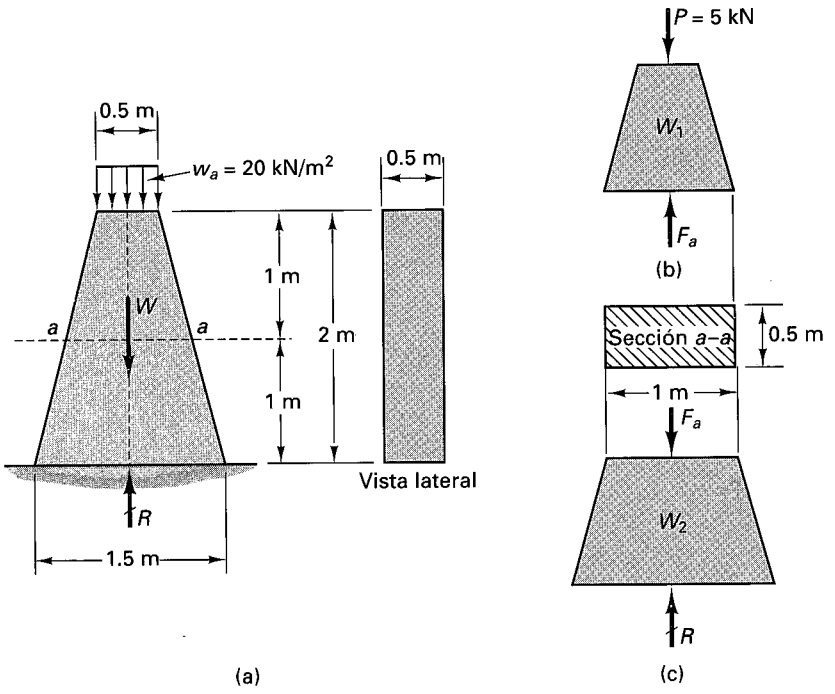


Fig. 1-19

separadas. Un diagrama de cuerpo libre para cualquier parte es suficiente para resolver el problema, pero para fines de comparación, el problema es resuelto de ambas maneras.

Usando la parte superior de la zapata como cuerpo libre, figura 1-19(b), el peso de la zapata arriba de la sección es:

$$W_1 = (0.5 + 1) \times 0.5 \times 1 \times 25/2 = 9.4 \text{ kN}$$

De $\Sigma F_y = 0$, la fuerza en la sección:

$$F_a = P + W_1 = 14.4 \text{ kN}$$

Por consiguiente, usando la ecuación 1-6, el esfuerzo normal en el nivel *a-a* es

$$\sigma_a = \frac{F_a}{A} = \frac{14.4}{0.5 \times 1} = 28.8 \text{ kN/m}^2$$

Este esfuerzo es de compresión, ya que F_a actúa sobre la sección.

Usando la parte inferior de la zapata como cuerpo libre, figura 1-19(c), el peso de la zapata debajo de la sección:

$$W_2 = (1 + 1.5) \times 0.5 \times 1 \times 25/2 = 15.6 \text{ kN}$$

De $\Sigma F_y = 0$, la fuerza en la sección:

$$F_a = R - W_2 = 14.4 \text{ kN}$$

El resto del problema es igual que antes. La zapata considerada aquí tiene un eje vertical de simetría, lo que hace posible la aplicación de la ecuación 1-6.[11]

Ejemplo 1-3

Una ménsula de peso imperceptible mostrada en la figura 1-20(a) está cargada con una fuerza vertical P de 3 kips. Para fines de conexión, los extremos de la barra están escindidos como se muestra en la figura, formándose una horquilla. Las dimensiones pertinentes se muestran en la figura. Encuentre los esfuerzos axiales en los miembros AB y BC y los esfuerzos de aplastamiento y cortante en el pasador C. Todos los pasadores tienen 0.375 in de diámetro.

SOLUCIÓN

Primero se dibuja un diagrama idealizado de cuerpo libre de las dos barras articuladas en sus extremos; véase la figura 1-20(b). Como no hay fuerzas intermedias actuando sobre las barras y la fuerza aplicada actúa por el nudo en B, las fuerzas en las barras están dirigidas a lo largo de las líneas AB y BC, y las barras AB y BC quedan cargadas axialmente. Las magnitudes

[11]Estrictamente hablando, la solución obtenida no es exacta, ya que los lados de la zapata están inclinados. Si el ángulo incluido entre esos lados es grande, esta solución es inadecuada. Para detalles adicionales, véase S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed. (Nueva York: McGraw-Hill, 1970), pág. 110.

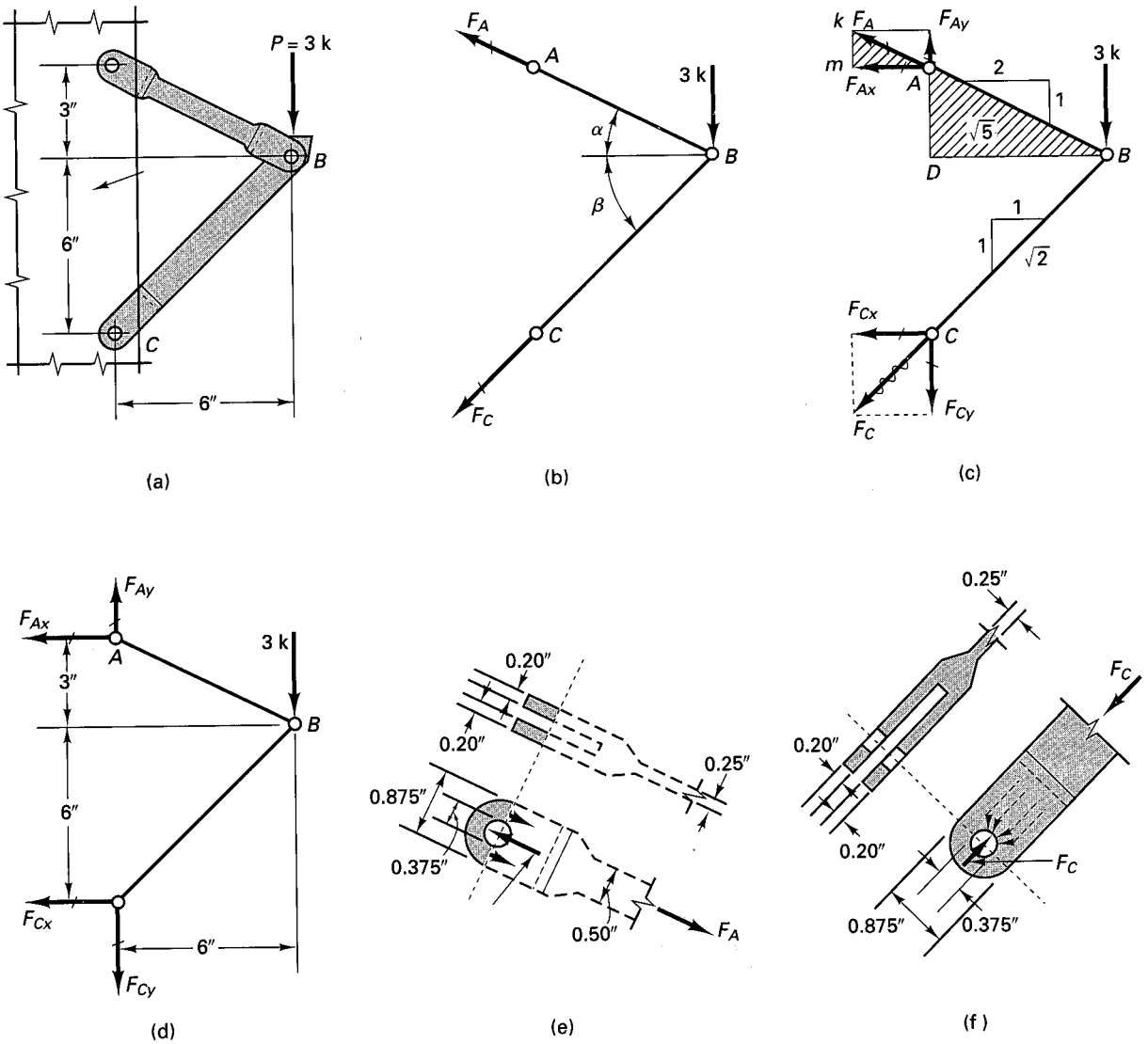


Fig. 1-20

de las fuerzas son desconocidas y se designan F_A y F_C en el diagrama.[12] Esas fuerzas pueden determinarse gráficamente completando un triángulo de fuerzas FA, FC y P. Esas fuerzas pueden encontrarse también analíticamente a partir de dos ecuaciones simultáneas $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_x = 0$, escritas en términos de las incógnitas F_A y F_C, una fuerza conocida P y dos ángulos conocidos α y β. Ambos procedimientos son posibles. Sin embargo, en este

[12]En las armaduras es conveniente suponer que todas las fuerzas desconocidas son de tensión. Una respuesta negativa en la solución indica entonces que la barra está en compresión.

libro, es conveniente proceder de distinta manera. En vez de tratar las fuerzas F_A y F_C directamente, se usan sus componentes; y en vez de $\Sigma F = 0$, $\Sigma M = 0$ será la herramienta principal.

Cualquier fuerza puede descomponerse en componentes. Por ejemplo, F_A puede descomponerse en F_{Ax} y F_{Ay}, como en la figura 1-20(c). Por el contrario, si cualquiera de las componentes de una fuerza dirigida se conoce, la fuerza misma puede determinarse. Esto se infiere de la semejanza entre dimensiones y triángulos de fuerzas. En la figura 1-20(c), los triángulos *Akm* y *BAD* son triángulos semejantes (ambos se muestran sombreados en el diagrama). Por tanto, si F_{Ax} es conocida

$$F_A = (AB/DB)F_{Ax}$$

Similarmente, $F_{Ayy} = (AD/DB)F_{Ax}$. Nótese, además, que AB/DB o AD/DB son razones; por consiguiente pueden usarse dimensiones relativas de los miembros. Tales dimensiones relativas se muestran por un pequeño triángulo sobre el miembro AB y también sobre BC. En el presente problema,

$$F_A = (\sqrt{5}/2)F_{Ax} \qquad \text{y} \qquad F_{Ay} = F_{Ax}/2$$

Adoptando el procedimiento de descomponer fuerzas se dibuja un diagrama revisado de cuerpo libre en la figura 1-20(d). Dos componentes de fuerza son necesarias en los nodos. Después de que las fuerzas son determinadas por estática, se aplica la ecuación 1-6 varias veces, pensando en términos de un cuerpo libre de un miembro individual:

$$\Sigma M_C = 0 \curvearrowleft + \qquad + F_{Ax}(3 + 6) - 3(6) = 0 \qquad F_{Ax} = +2\text{ k}$$

$$F_{Ay} = F_{Ax}/2 = 2/2 = +1\text{ k}$$

$$F_A = 2(\sqrt{5}/2) = +2.23\text{ k}$$

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright + \qquad + 3(6) + F_{Cx}(9) = 0, \qquad F_{Cx} = -2\text{ k}$$

$$F_{Cy} = F_{Cx} = -2\text{ k}$$

$$F_C = \sqrt{2}(-2) = -2.83\text{ k}$$

Comprobación $\Sigma F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Cx} = 2 - 2 = 0$

$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{Ay} - F_{Cy} - P = 1 - (-2) - 3 = 0$$

Esfuerzo de tensión en la barra AB:

$$\sigma_{AB} = \frac{F_A}{A} = \frac{2.23}{0.25 \times 0.50} = 17.8\text{ ksi}$$

Esfuerzo de tensión en la horquilla de la barra AB, figura 1-20(e):

$$(\sigma_{AB})_{\text{horquilla}} = \frac{F_A}{A_{\text{neta}}} = \frac{2.23}{2 \times 0.20 \times (0.875 - 0.375)} = 11.2\text{ ksi}$$

Esfuerzo de compresión en la barra BC:

$$\sigma_{BC} = \frac{F_C}{A} = \frac{2.83}{0.875 \times 0.25} = 12.9\text{ ksi}$$

En el miembro en compresión, la sección neta en la horquilla no tiene que ser investigada; véase en la figura 1-20(f) la transferencia de fuerzas. El esfuerzo de aplastamiento en el pasador es más crítico. El aplastamiento entre el pasador C y la horquilla es:

$$\sigma_b = \frac{F_C}{A_{\text{aplastamiento}}} = \frac{2.83}{0.375 \times 0.20 \times 2} = 18.8 \text{ ksi}$$

Aplastamiento entre el pasador C y la placa principal:

$$\sigma_b = \frac{F_C}{A} = \frac{2.83}{0.375 \times 0.25} = 30.2 \text{ ksi}$$

Cortante doble en el pasador C:

$$\tau = \frac{F_C}{A} = \frac{2.83}{2\pi(0.375/2)^2} = 12.9 \text{ ksi}$$

Para tener un análisis completo de esta ménsula, otros pasadores deben ser investigados. Sin embargo, puede verse por inspección que los otros pasadores en este caso están esforzados la misma cantidad calculada o una cantidad menor.

Las ventajas del método usado en el último ejemplo para encontrar fuerzas en miembros deben ahora ser obvias. El método puede también aplicarse con éxito en un problema como el mostrado en la figura 1-21. La fuerza F_A transmitida por el miembro curvo AB actúa por los puntos A y B ya que las fuerzas aplicadas en A y B deben ser colineales. Resolviendo esta fuerza en A', puede seguirse el mismo procedimiento. Las líneas onduladas en F_A y F_C indican que esas fuerzas están reemplazadas por las dos componentes mostradas. Alternativamente, la fuerza F_A puede descomponerse en A y como $F_{Ay} = (y/x)F_{Ax}$, la aplicación de $\Sigma M_C = 0$ da F_{Ax}.

En marcos, donde las fuerzas aplicadas no pasan por un nodo, proceda como antes tanto como sea posible. Luego aísle un miembro individual y usando su diagrama de cuerpo libre complete la determinación de las fuerzas. Si sobre la estructura actúan fuerzas inclinadas, divida éstas en componentes convenientes.

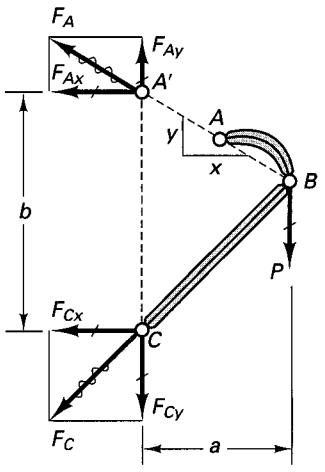


Fig. 1-21

Ejemplo 1-4

Considere el sistema idealizado que se muestra en la figura 1-22, donde una masa de 5 kg gira sobre un plano sin fricción a 10 Hz. Si una barra ligera CD está unida en C y su esfuerzo puede alcanzar el valor de 200 MPa, ¿cuál es el tamaño requerido de la barra? Desprecie el peso de la barra y suponga que ésta está recalcada en sus extremos para compensar la presencia de las roscas.

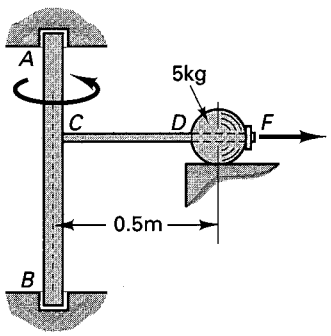


Fig. 1-22

SOLUCIÓN

La velocidad angular ω de la barra es de 20π rad/s. La aceleración α de la masa hacia el centro de rotación es $\omega^2 R$, donde R es la distancia CD. Multiplicando la masa m por la aceleración, se obtiene la fuerza F que actúa

sobre la barra. Como se muestra en la figura, de acuerdo con el principio de d'Alembert, esta fuerza actúa en sentido opuesto al de la aceleración. Por lo tanto,

$$F = ma = m\omega^2 R = 5 \times (20\pi)^2 \times 0.500 = 9870 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9870 \text{ N}$$

$$A_{\text{neta}} = \frac{9870}{200} = 49.3 \text{ mm}^2$$

Una barra redonda de 8 mm con área $A = 50.3$ mm^2 sería satisfactoria.

El tirón adicional en C causado por la masa de la barra, que no fue considerado, es

$$F_1 = \int_0^R (m_1\, dr)\, \omega^2 r$$

donde m_1 es la masa de la barra por unidad de longitud y $(m_1\, dr)$ es su masa infinitesimal a una distancia variable r desde la barra vertical AB. El tirón total en C causado por la barra y la masa de 5 kg en el extremo es $F + F_1$.

1-10. Resistencia del miembro como criterio de diseño

El propósito de calcular esfuerzos en miembros de un sistema estructural es compararlos con las resistencias del material determinadas experimentalmente y garantizar así el desempeño deseado. Las pruebas físicas de los materiales en un laboratorio proporcionan información respecto a la resistencia de los materiales frente a esfuerzos. En un laboratorio, las probetas de material conocido, el proceso de fabricación y el tratamiento térmico son cuidadosamente preparados a las dimensiones deseadas. Luego esas probetas se someten a fuerzas conocidas sucesivamente crecientes. En la prueba más común, una barra redonda o rectangular se somete a tensión y la probeta se carga hasta que finalmente se rompe. La fuerza necesaria para causar la ruptura se llama carga *última*. Dividiendo esta carga última entre el área transversal *original* de la probeta se obtiene la *resistencia última* (esfuerzo) de un material. La prueba de tensión se usa extensamente. Sin embargo, se hacen también pruebas de compresión, flexión, torsión y cortante.[13] Las Tablas 1A y B del apéndice dan las resistencias últimas y otras propiedades físicas de algunos materiales.

En aplicaciones donde una fuerza aparece y desaparece en la estructura cierto número de veces, los materiales no pueden resistir el esfuerzo último de una prueba estática. En tales casos, la "resistencia última" depende del número de veces que es aplicada la fuerza cuando el material trabaja a un nivel particular de esfuerzo. Tales puntos experimentales indican el número de

[13]La ASTM (American Society for Testing and Materials, 1916 Race St. Filadelfia, PA 19103) publica un *Annual Book of ASTM Standards* (*Libro anual de Normas ASTM*) que consta ahora de 66 volúmenes, divididos en 16 secciones, dando la clasificación de materiales, especificaciones estándar ASTM y métodos detallados de pruebas. La designación ASTM de materiales como el acero A36 será usada frecuentemente en este libro.

ciclos requeridos para romper la probeta a un esfuerzo particular bajo la aplicación de una carga fluctuante. Tales pruebas se llaman "pruebas de fatiga" y las curvas correspondientes se denominan diagramas *S-N* (esfuerzo-número). Este comportamiento se analiza en la Sección 2-10 del capítulo siguiente.

Las deformaciones dependientes del esfuerzo pueden jugar también un papel clave al seleccionar el esfuerzo permisible para un material dado, ya que algunos materiales se deforman en una cantidad no permisible antes de fracturarse. Algunos materiales se deforman plásticamente bajo una carga sostenida, fenómeno llamado *flujo plástico*. Las experiencias con turbinas, pernos apretados en equipo mecánico y vigas de madera o de concreto reforzado, señalan algunos de los casos en que el flujo plástico puede ser un problema. En algunos casos, la velocidad de aplicación de la carga tiene un efecto mayor, ya que ciertos materiales se vuelven considerablemente más fuertes bajo cargas aplicadas rápidamente. De la misma manera, el efecto de la temperatura usualmente tiene una influencia muy importante sobre el límite de fatiga. Algunos de esos temas serán analizados con mayor amplitud en las Secciones 2-8 y 2-9. A nivel de diseño, la mayor parte de esos problemas pueden ser controlados reduciendo los esfuerzos de diseño.

Los hechos antes mencionados, aunados a la imposibilidad de determinar exactamente los esfuerzos en estructuras y máquinas complicadas, requieren de una reducción considerable del esfuerzo comparado con la resistencia última de un material en una prueba estática. Por ejemplo, el acero común resistirá un esfuerzo último en tensión de 500 MPa (70 ksi) y aún más. Sin embargo, se deforma algo repentina y severamente bajo esfuerzos de aproximadamente 350 MPa (50 ksi). En los Estados Unidos es costumbre usar un esfuerzo permisible de alrededor de 200 MPa (30 ksi) para trabajo estructural. Este esfuerzo permisible es reducido aún más a cerca de 100 MPa (15 ksi) para partes que están sometidas a cargas alternantes debido a las características de fatiga del material. *Las propiedades de fatiga de materiales son de la mayor importancia en equipo mecánico.*

El escoger un esfuerzo permisible apropiado se complica más porque ya hay una *gran incertidumbre en las magnitudes de las cargas aplicadas.* Durante la vida de una máquina o una estructura, es casi seguro que ocurrirán sobrecargas ocasionales, pero éstas, en el mejor de los casos, sólo pueden ser estimadas.

Esos difíciles problemas se resuelven ahora por medio de dos enfoques alternativos. En el enfoque tradicional, con el espíritu de la mecánica clásica, se asignan *magnitudes únicas* a las fuerzas aplicadas así como a los *esfuerzos permisibles.* De esta manera, esos dos parámetros principales son conocidos con precisión (es decir, están determinados) en el proceso de diseño. Este enfoque *determinístico* se emplea comúnmente en la práctica y nos apegaremos a él en este texto. Sin embargo, conforme la complejidad de los sistemas de *hardware* de la ingeniería se incrementa, menos confianza puede darse a experiencias pasadas y a un número limitado de experimentos. Más bien, después de la identificación de los parámetros principales de un problema dado de análisis de esfuerzos, la variabilidad estadística de éstos se mide recurriendo al método *probabilístico* de estimar la seguridad estructural. Este enfoque ha encontrado una acogida favorable en el diseño de aeronaves avanzadas y de estructuras fuera de la costa, y se está aplicando cada vez más en el diseño estructural de edificios y puentes. Un

breve análisis del enfoque probabilístico al diseño estructural se incluye en la Sección 1-12. El enfoque determinístico tradicional se analiza a continuación.

1-11. Diseño determinístico de miembros: barras cargadas axialmente

En el diseño determinístico de miembros se calcula la resultante de esfuerzos en la sección más esforzada aplicando la mecánica convencional. Para barras cargadas axialmente, esto significa determinar la fuerza axial interna P más grande en una sección transversal mínima. Luego, para el material seleccionado, se escoge un esfuerzo permisible σ_{perm}.

Las asociaciones de ingenieros, las grandes empresas, así como las autoridades municipales, estatales y federales, prescriben o recomiendan[14] los esfuerzos permisibles para diversos materiales, dependiendo de su aplicación. Tales esfuerzos suelen llamarse a veces esfuerzos permisibles en las *fibras*[15].

De acuerdo con la ecuación 1-6, el esfuerzo multiplicado por el área es igual a una fuerza, los esfuerzos permisibles y últimos pueden convertirse en las fuerzas o "cargas" permisibles y últimas, respectivamente, que un miembro puede resistir. También puede establecerse una razón importante:

$$\frac{\text{carga última para un miembro}}{\text{carga permisible para un miembro}}$$

Ésta es la definición básica del *factor de seguridad*, F.S. Esta razón siempre debe ser mayor que la unidad. Tradicionalmente este factor se replantea en términos de esfuerzos como

$$\text{F.S.} = \frac{\text{resistencia máxima útil del material (esfuerzo)}}{\text{esfuerzo permisible}}$$

y se usa ampliamente no sólo para miembros cargados axialmente, sino también para cualquier tipo de miembro y condiciones de carga. Como será evidente después, aunque en algunos casos es satisfactoria la definición del F.S. en términos de esfuerzos elásticos, ello puede conducir a falsas apreciaciones en otros.

En la industria aeronáutica, el término *factor de seguridad* es reemplazado por otro, que se define como

$$\frac{\text{carga última}}{\text{carga de diseño}} - 1$$

[14]Por ejemplo, véase el *Manual* del American Institute of Steel Construction, el código de construcción de edificios de cualquier ciudad grande, el ANC-5 *Strength of Aircrafts Elements* (ANC-5 *Resistencia de elementos de aeronaves*) publicado por el Army-Navy Civil Committee on Aircraft Design Criteria (comité civil de la marina y el ejército sobre criterios de diseño de aeronaves), etcétera.

[15]El término *fibra* en este sentido se usa por dos razones. Muchos experimentos se hicieron originalmente sobre madera, que es de naturaleza fibrosa. Además, en varias de las deducciones que siguen, el concepto de una fibra o filamento continuo en un miembro es usado convenientemente para visualizar su acción.

y se conoce como *margen de seguridad*. En el pasado, esta razón se expresaba usualmente como

$$\frac{\text{esfuerzo último}}{\text{esfuerzo máximo causado por la carga de diseño}} - 1$$

Los métodos analíticos más nuevos, algunos de los cuales se señalarán en el texto conforme aparezcan, pueden proporcionar estimaciones razonables de las cargas últimas para sistemas complejos y deben usarse en la definición básica del factor de seguridad así como del margen de seguridad. Por ejemplo, para cargas estáticas, en vez de diseñar miembros bajo cargas de trabajo usando esfuerzos permisibles, un enfoque alternativo consistente en seleccionar tamaños de miembros en función de sus *cargas últimas* o *límites*, está siendo adoptado en forma extensa. En tales casos, la carga última se obtiene multiplicando las cargas de trabajo por *factores de carga* escogidos apropiadamente. Para barras en tensión o compresión simple, esto conduce a los mismos resultados. En muchos casos pueden obtenerse resultados significativamente diferentes, cuando el comportamiento poco elástico es más complejo. Sin embargo, en este texto seguiremos básicamente el enfoque del *diseño por esfuerzos permisibles* (ASD por sus siglas en inglés).

La aplicación del enfoque ASD para miembros axialmente cargados es simple y directa. De la ecuación 1-6, se infiere que el área neta requerida A de un miembro es

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} \tag{1-15}$$

donde P es la fuerza axial aplicada y σ_{perm} es el esfuerzo permisible. La ecuación 1-15 es por lo general aplicable a miembros en tensión y a bloques cortos en compresión. *Para miembros esbeltos en compresión se presenta el problema de su estabilidad y deben aplicarse los métodos que se indican en el capítulo 16.*

La simplicidad de la ecuación 1-15 no tiene que ver con su importancia. Un gran número de problemas que requieren su uso surgen en la práctica. Los siguientes problemas ilustran algunas aplicaciones de la ecuación 1-15 y proporcionan un repaso adicional de la estática.

Ejemplo 1-5

Reduzca el tamaño de la barra AB en el ejemplo 1-3 al emplear un material mejor como el acero al cromo vanadio. La resistencia última de este acero es aproximadamente de 120 ksi. Use un factor de seguridad de 2.5.

SOLUCIÓN

$\sigma_{perm} = 120/2.5 = 48$ ksi. Del ejemplo 1-3, fuerza en la barra AB: $F_A = +2.23$ kips. Área requerida: $A_{neta} = 2.23/48 = 0.0464$ in^2. Adoptamos: una barra de 0.20 in por 0.25 in con un área de $(0.20)(0.25) = 0.050$ in^2 que

y se conoce como *margen de seguridad*. En el pasado, esta razón se expresaba usualmente como

$$\frac{\text{esfuerzo último}}{\text{esfuerzo máximo causado por la carga de diseño}} - 1$$

Los métodos analíticos más nuevos, algunos de los cuales se señalarán en el texto conforme aparezcan, pueden proporcionar estimaciones razonables de las cargas últimas para sistemas complejos y deben usarse en la definición básica del factor de seguridad así como del margen de seguridad. Por ejemplo, para cargas estáticas, en vez de diseñar miembros bajo cargas de trabajo usando esfuerzos permisibles, un enfoque alternativo consistente en seleccionar tamaños de miembros en función de sus *cargas últimas* o *límites*, está siendo adoptado en forma extensa. En tales casos, la carga última se obtiene multiplicando las cargas de trabajo por *factores de carga* escogidos apropiadamente. Para barras en tensión o compresión simple, esto conduce a los mismos resultados. En muchos casos pueden obtenerse resultados significativamente diferentes, cuando el comportamiento poco elástico es más complejo. Sin embargo, en este texto seguiremos básicamente el enfoque del *diseño por esfuerzos permisibles* (ASD por sus siglas en inglés).

La aplicación del enfoque ASD para miembros axialmente cargados es simple y directa. De la ecuación 1-6, se infiere que el área neta requerida A de un miembro es

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} \tag{1-15}$$

donde P es la fuerza axial aplicada y σ_{perm} es el esfuerzo permisible. La ecuación 1-15 es por lo general aplicable a miembros en tensión y a bloques cortos en compresión. *Para miembros esbeltos en compresión se presenta el problema de su estabilidad y deben aplicarse los métodos que se indican en el capítulo 16.*

La simplicidad de la ecuación 1-15 no tiene que ver con su importancia. Un gran número de problemas que requieren su uso surgen en la práctica. Los siguientes problemas ilustran algunas aplicaciones de la ecuación 1-15 y proporcionan un repaso adicional de la estática.

Ejemplo 1-5

Reduzca el tamaño de la barra AB en el ejemplo 1-3 al emplear un material mejor como el acero al cromo vanadio. La resistencia última de este acero es aproximadamente de 120 ksi. Use un factor de seguridad de 2.5.

SOLUCIÓN

$\sigma_{perm} = 120/2.5 = 48$ ksi. Del ejemplo 1-3, fuerza en la barra AB: $F_A = +2.23$ kips. Área requerida: $A_{neta} = 2.23/48 = 0.0464$ in^2. Adoptamos: una barra de 0.20 in por 0.25 in con un área de $(0.20)(0.25) = 0.050$ in^2 que

es ligeramente mayor que el área requerida. Son posibles muchas otras proporciones de la barra.

Con el área transversal seleccionada, el esfuerzo real o de trabajo es algo menor que el esfuerzo permisible: $\sigma_{real} = 2.23/(0.050) = 44.6$ ksi. El factor de seguridad real es $120/(44.6) = 2.69$, y el margen real de seguridad es 1.69.

En un rediseño completo, la horquilla y los pasadores deben ser revisados también y, si es posible, reducirse sus dimensiones.

Ejemplo 1-6

Seleccione los miembros *FC* y *CB* para la armadura de la figura 1-23(a) para que tomen una fuerza inclinada P de 650 kN. Considere un esfuerzo permisible de tensión de 140 MPa.

SOLUCIÓN

Si todos los miembros de la armadura van a diseñarse, deben encontrarse las fuerzas en todos ellos. En la práctica, esto se hace ahora usando programas de computadora desarrollados con base en el análisis estructural matricial[16] o analizando directamente la armadura por el método de los nodos. Sin embargo, si sólo unos cuantos miembros van a diseñarse o revisarse, el método de las secciones ilustrado aquí es más rápido.

Por lo general se entiende que una armadura plana, como la de la figura, es estable en dirección perpendicular al plano del papel. En la práctica esto se logra introduciendo riostras en ángulo recto al plano de la armadura. En este ejemplo, no se lleva a cabo el diseño de miembros en compresión, ya que se tratarán en el capítulo sobre columnas.

Para determinar las fuerzas en los miembros que van a diseñarse, se calculan primero las reacciones de toda la estructura. Esto se hace sin tomar en cuenta la estructuración interna. Sólo componentes de reacción y fuerzas, localizadas en sus puntos de aplicación, se indican sobre el diagrama de cuerpo libre de toda la estructura; véase la figura 1-23(b). Después de calculadas las reacciones, se usan los diagramas de cuerpo libre de una parte de la estructura para calcular las fuerzas en los miembros considerados; véanse las figuras 1-23(c) y (d).

Usando el diagrama de cuerpo libre en la figura 1-23(b),

$$\sum F_x = 0 \qquad R_{Dx} - 520 = 0 \qquad R_{Dx} = 520 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0 \curvearrowright + \qquad R_{Dy} \times 3 - 390 \times 0.5 - 520 \times 1.5 = 0$$

$$R_{Dy} = 325 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = 0 \curvearrowleft + \qquad R_E \times 3 + 520 \times 1.5 - 390 \times 2.5 = 0$$

$$R_E = 65 \text{ kN}$$

[16]Véase, por ejemplo, O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, vol.1, 4a. ed. (Londres: McGraw-Hill, 1989).

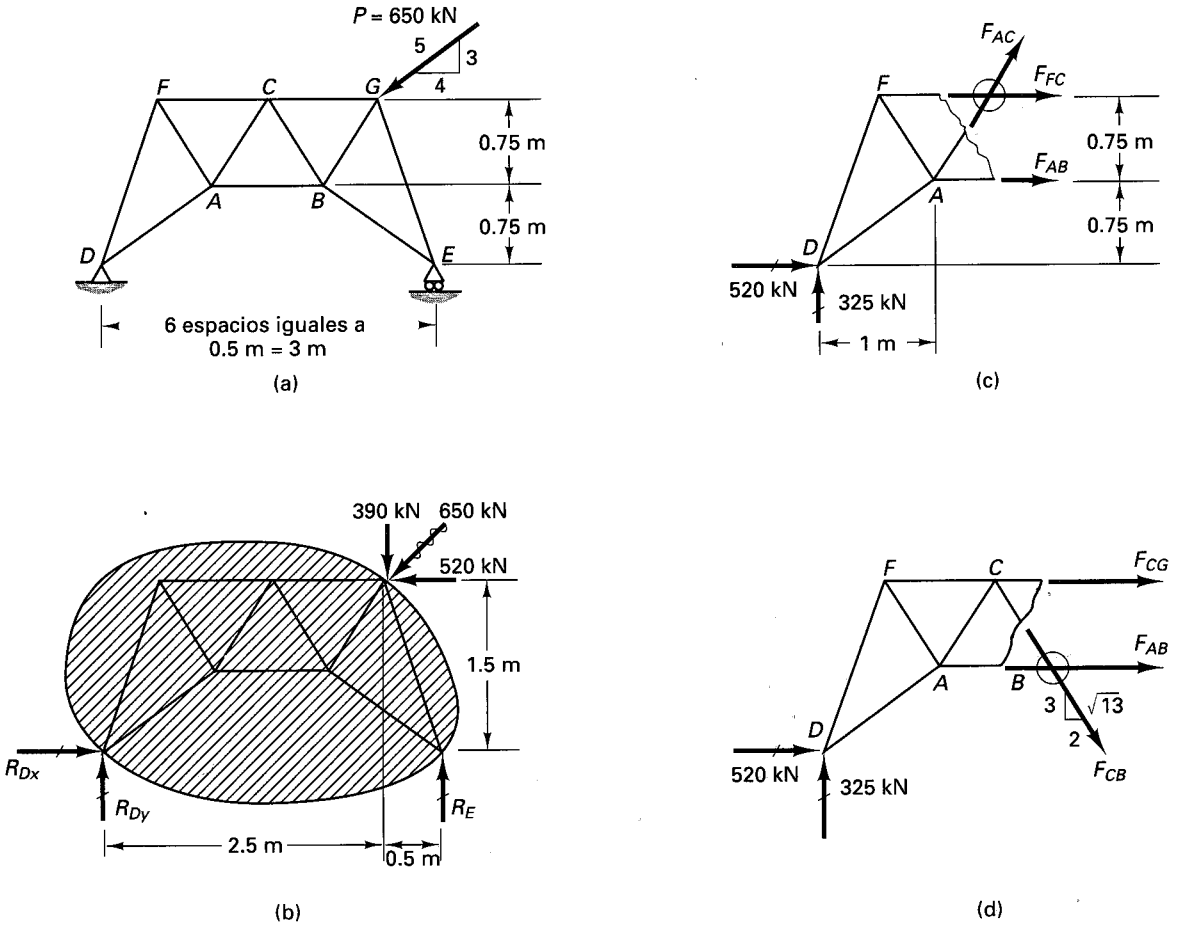


Fig. 1-23

Comprobación: $\Sigma F_y = 0 \quad 325 - 390 + 65 = 0$

Usando el diagrama de cuerpo libre de la figura 1-23(c),

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright + \qquad F_{FC} \times 0.75 + 325 \times 1 - 520 \times 0.75 = 0$$

$$F_{FC} = +86.7 \text{ kN}$$

$$A_{FC} = Ff_{FC}/\sigma_{\text{perm}} = 86.7 \times 10^3/140 = 620 \text{ mm}^2$$

(use una barra de 12.5 × 50mm)

Usando el diagrama de cuerpo libre en la figura 1-23(d),

$$\Sigma F_y = 0 \qquad -(F_{CB})_y + 325 = 0 \qquad (F_{CB})_y = +325 \text{ kN}$$

$$F_{CB} = \sqrt{13}(F_{CB})_y/3 = +391 \text{ kN}$$

$$A_{CB} = F_{CB}/\sigma_{perm} = 391 \times 10^3/140 = 2790 \text{ mm}^2$$

(use dos barras de 30×50 mm)

1-12. Base probabilística para el diseño estructural

En el diseño convencional (determinístico) de miembros, la posibilidad de falla se reduce a niveles aceptablemente pequeños por medio de factores de seguridad basados en el buen juicio, a partir de rendimientos pasados con y sin éxito. En cambio, en el enfoque probabilístico, la variabilidad en las propiedades del material, las tolerancias en los tamaños de fabricación, las incertidumbres en la carga y aun las aproximaciones de diseño son estimadas con base estadística. En la medida de lo posible, los criterios propuestos son calibrados contra casos bien establecidos, ya que ignorar las aplicaciones pasadas que han tenido éxito, está fuera de consideración. El enfoque probabilístico tiene la ventaja de ser consistente en los factores de seguridad, no sólo para miembros individuales sino también para conjuntos estructurales complejos. Los análisis importantes de riesgo de sistemas ingenieriles completos se basan en las mismas premisas.

Base teórica En terminología estadística, el conjunto de datos de resultados de pruebas $X_1, X_2, \ldots, X_n$ se denomina *población muestra*, donde cada X_i se llama una *muestra* (observación numérica). En el análisis de tales conjuntos de datos, varias cantidades de mayor importancia son en general calculadas. Una de esas es la *media de la muestra* (promedio), designada por $\overline{X}$; otra es la *variancia de la muestra*, designada por S^2. Para n muestras, esas cantidades se definen como

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1-16}$$

y

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \tag{1-17}$$

La raíz cuadrada positiva de la variancia de la muestra (es decir, S) se llama *desviación estándar de la muestra*. Dividiendo S entre $\overline{X}$, se obtiene el *coeficiente de variancia*, designado V:

$$V = S/\overline{X} \tag{1-18}$$

Las cantidades $\overline{X}$, S (o S^2), y V juegan papeles dominantes en la teoría de la probabilidad. La media es el *valor esperado de la muestra*; la desviación estándar, S, es una *medida de la dispersión* de los datos y el coeficiente de variación, V, es una medida adimensional de la cantidad de variabilidad relativa al valor de la media.

Una *distribución de frecuencia* proporciona un resumen compacto de un conjunto de datos. El primer paso para construir una distribución de

frecuencia es dividir el eje de medición relevante en una colección de intervalos sin traslape tal que cada observación en el conjunto de datos esté contenida en uno de esos intervalos. Cada uno de los intervalos resultantes se llama un *intervalo de clase* o simplemente una clase.

Una representación gráfica de una distribución de frecuencias puede obtenerse construyendo un *histograma*, en el cual las fronteras de intervalos adyacentes de clases se marcan sobre el eje horizontal y las distribuciones de frecuencias se marcan sobre el eje vertical.

El término *probabilidad* puede explicarse usando conceptos clásicos de probabilidad, según los cuales puede decirse que *si hay n posibilidades igualmente factibles, de las cuales una debe ocurrir y* s *se consideran como favorables, o como "éxitos", entonces la probabilidad de un "éxito" está dada por* s/n.

Para aproximar la dispersión de los datos observados se usan las *funciones de densidad de probabilidad,* las cuales se integran para obtener probabilidades. En la probabilidad aplicada las funciones más ampliamente usadas se basan en la distribución *normal* o *gaussiana*.[17] La forma analítica de tal función de una variable aleatoria Z, es decir $f_z(z)$, está dada por

$$f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_z} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu_z}{\sigma_z}\right)^2\right] \tag{1-19}$$

donde

$$\mu_z = \int_{-\infty}^{+\infty} z f_z(z)\, dz \tag{1-20}$$

y

$$\sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\mu_z)^2 f_z(z)\, dz \tag{1-21}$$

La constante $1/\sqrt{2\pi}$ en la ecuación 1-19 se selecciona de manera que el diagrama de frecuencia normalizada encierre un área unitaria; es decir

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_z(z)\, dz = 1 \tag{1-22}$$

lo que implica que la ocurrencia de Z dentro de todo su rango es una certeza.

En las ecuaciones previas μ_z es la *media* y σ_z es la *desviación estándar* de las densidades de probabilidad. Una función típica de densidad de Z con distribución normal se muestra en la figura 1-24. Debe notarse que en las aplicaciones, el modelo teórico se selecciona usualmente haciendo $\mu_z = \overline{X}$, and $\sigma_z = S$.

Algunas propiedades interesantes de $f_z(z)$ están ilustradas en la figura 1-25. En la figura 1-25(a) puede verse que la probabilidad de la ocurrencia de un resultado entre una desviación estándar a cada lado de la media es 88.27%. Como se muestra en la figura 1-25(b), entre dos desviaciones estándar a cada lado de la media, este valor es de 95.45%. Las áreas encerradas bajo las colas de la curva que están a tres desviaciones estándar de la media son sólo 0.135% de los resultados totales. Como se verá después, el

[17]Llamada así en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855), quien primero presentó esta función con base en consideraciones teóricas.

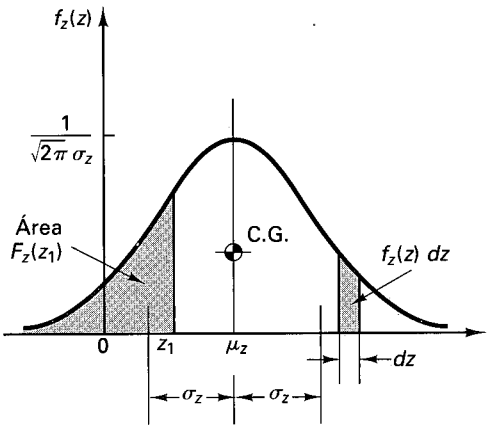


Fig. 1-24 Función de densidad de probabilidad normal de Z.

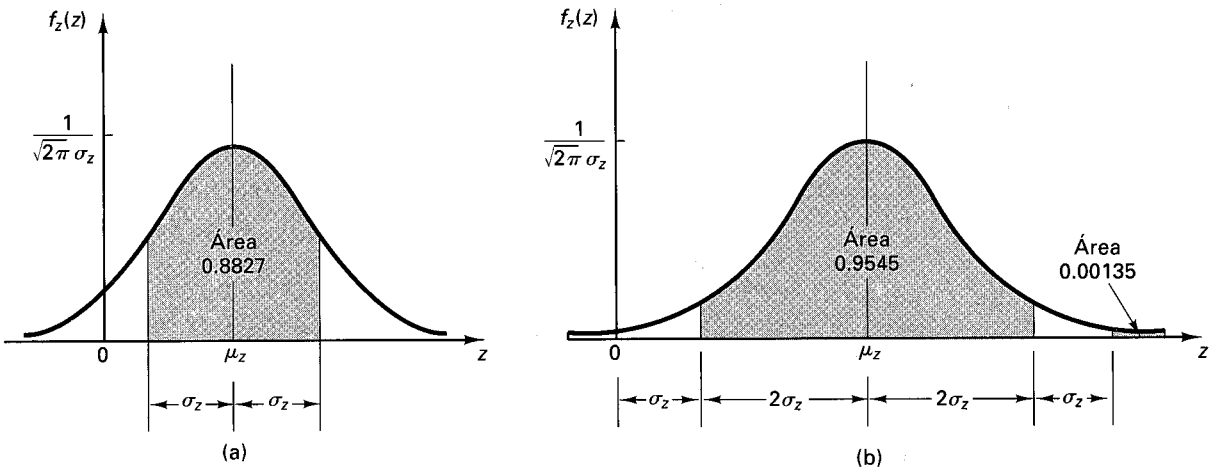


Fig. 1-25 Ejemplos de probabilidades de resultados bajo diferentes cantidades de desviación estándar desde la media.

pequeño número de resultados probables que ocurren bajo $f_z(z)$ a varias desviaciones estándar alejadas de la media, es de la mayor importancia en la estimación de la seguridad estructural.

Evidencia experimental Como un ejemplo del enfoque probabilístico basado en la estadística, considere el comportamiento de las probetas para tres conjuntos de experimentos similares. Para un conjunto, los resultados experimentales de varias pruebas de compresión en bloques cortos de madera idénticos están graficados en la figura 1-26(a).[18] Resultados similares se muestran para columnas cortas de acero en la figura 1-26(b)[19] y

[18]Véase J. M. Illston, J. M. Dinwoodie y A. A. Smith, *Concrete, Timber and Metals* (Nueva York: Van Nostrand Reinhold, 1979), figura 14.3, pág. 439, Crown Copyright, ©Building Research Establishment, Reino Unido.

[19]Véase T. V. Galambos y M. K. Ravindra, "Tentative load and resistance design criteria for steel buildings", en *Research Report No. 18*, Structural Division, Washington University, 1973.

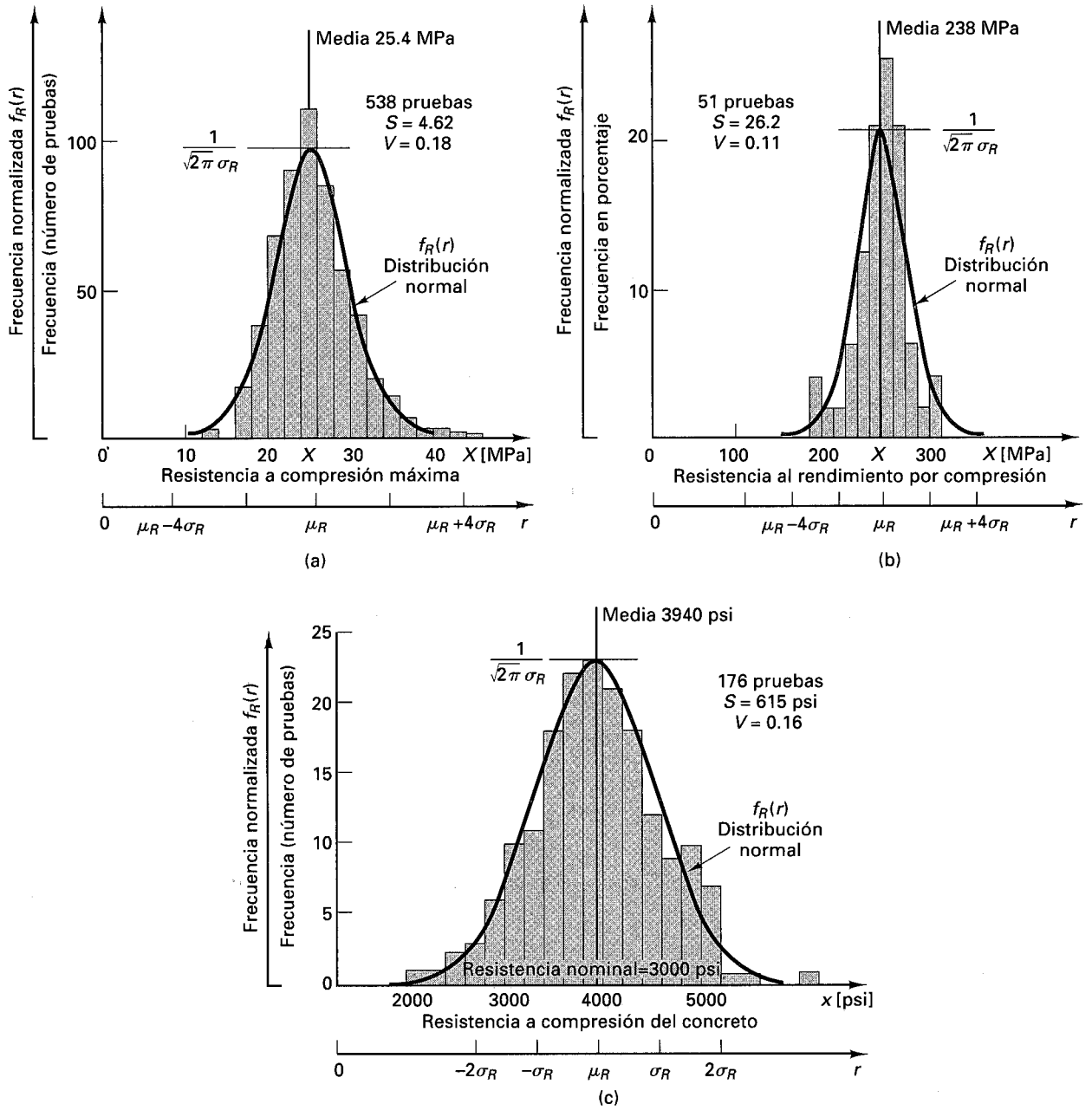


Fig. 1-26 (a) Histograma de máxima resistencia en compresión para el pinabete occidental (madera); (b) diagrama de frecuencias de la resistencia al rendimiento por compresión de aceros ASTM grados A7 y A36; (c) concreto.

de concreto en la figura 1-26(c).[20] Los anchos de las barras en esos histogramas corresponden a un rango estrecho de esfuerzos de compresión para los cuales un número dado de probetas fueron aplastadas (madera y concreto) o bien fluyeron (acero). En esos diagramas, las escalas interiores se aplican a resultados experimentales directos.

En la figura 1-26, además de los histogramas, se muestran también curvas teóricas para los tres casos. Las curvas de campana son las funciones de densidad de probabilidad de la resistencia R del material.

Formulaciones prácticas Para obtener una estimación probabilística de la seguridad estructural de un miembro o una estructura, se debe tener una función de densidad de resistencia $f_R(r)$ calculada estadísticamente, tal como se trató antes y una función de densidad del efecto de carga correspondiente. Los estudios estadísticos muestran que como las cargas son susceptibles a variaciones, sus efectos sobre un miembro o una estructura pueden expresarse en forma probabilística. Tales efectos de las cargas, parecidos a la $f_R(r)$, se designarán por $f_Q(q)$. Para un miembro o estructura dados, esas funciones definen el comportamiento del mismo parámetro crítico, tal como fuerza, esfuerzo o deflexión. Dos de esas funciones que definen probabilísticamente el efecto de la carga $f_Q(q)$ *y la resistencia* $f_R(r)$ para una fuerza que actúa sobre un miembro se muestran en la figura 1-27. Para fines de ilustración, se supone que el efecto de la carga $f_Q(q)$ tiene una mayor desviación estándar (es decir, una mayor dispersión de la carga) que para la resistencia del miembro.

En el diseño convencional (determinístico), las magnitudes de las cargas usualmente se fijan arriba de la media observada. Esta condición se representa por Q_n en la figura 1-27. Por otra parte, para evitar posibles rechazos, un distribuidor proporcionará comúnmente el material con una resistencia promedio ligeramente mayor que la especificada. Por esta razón, la resistencia nominal calculada del miembro R_n estará por debajo de la media. Con base en esto, el factor de seguridad convencional se define simplemente como R_n/Q_n.

En realidad, tanto Q *como* R *son cantidades inciertas y no hay una respuesta única al problema de la seguridad.* Para ilustrar la interacción entre las dos variables principales en la figura 1-28, $f_R(r)$ se muestra a lo largo del eje horizontal y $f_Q(q)$ se traza a lo largo del eje vertical. Para el conjunto de un número infinito de posibles resultados, una línea a 45° que corresponde a $R = Q$ divide la gráfica en dos regiones. Para $R > Q$, no puede ocurrir ninguna falla. Por ejemplo, para el rango de pequeños y grandes resultados Q_1, Q_2, Q_3, los resultados de resistencia, R_1, R_2, R_3, respectivamente, bastan para preservar la integridad de un miembro. Sin embargo, para resultados Q_3 y R_1 con un punto común en D y fallando en la región donde $R < Q$, tendrá lugar una falla.

Si bien es ilustrativo, el proceso anterior es difícil de aplicar en la práctica. Afortunadamente puede demostrarse matemáticamente que para una

[20]Véase J. G. Macgregor, *Reinforced Concrete, Mechanics and Design*, 3a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996).

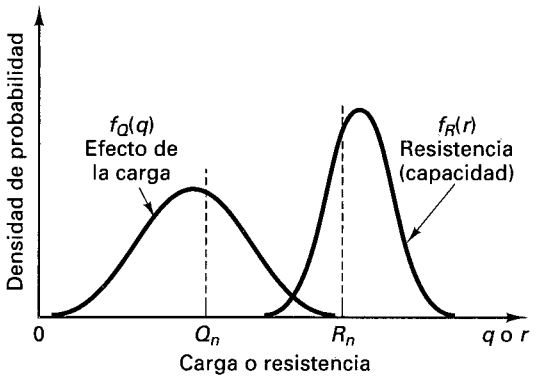


Fig. 1-27 Funciones de densidad de probabilidad para las dos variables aleatorias principales (carga y resistencia).

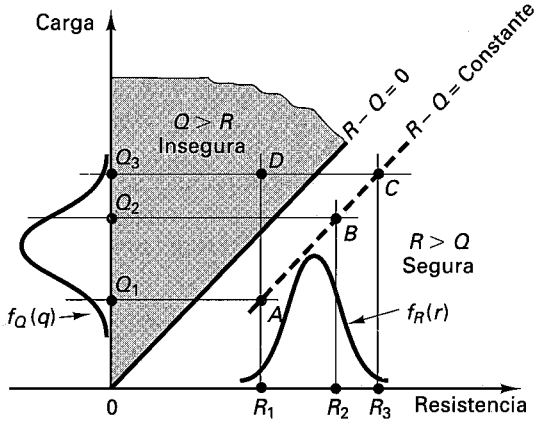


Fig. 1-28 Definición probabilística de regiones estructurales seguras e inseguras.

distribución normal de R y Q su diferencia (es decir, $R - Q$) es también una distribución normal. De esta manera, la información implicada en la figura 1-28 puede comprimirse en una sola función de densidad de probabilidad como la mostrada en la figura 1-29. En este diagrama la *probabilidad de falla* p_f está dada por el área bajo la cola de la curva a la izquierda del origen. Una posible magnitud de una p_f puede estimarse de la figura 1-25(b). Un miembro resistirá en todos los casos a la derecha del origen.

Además de los estados límites de falla enfatizados antes, el enfoque probabilístico es adecuado para otras situaciones. Importantes entre éstos están los estados límites de servicio. El control de las desviaciones máximas o las limitaciones de las vibraciones no deseadas pueden también tratarse en términos probabilísticos.

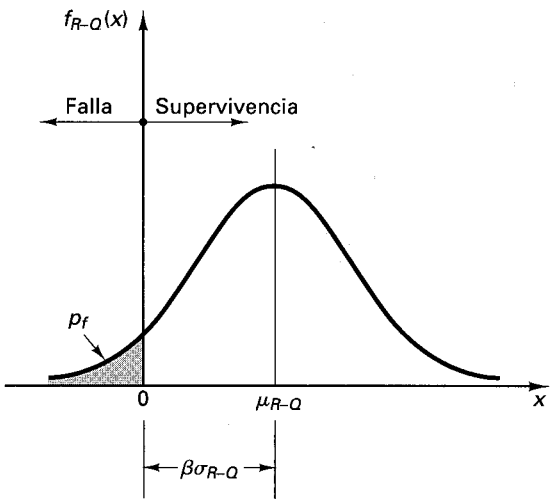


Fig. 1-29 Función de densidad de probabilidad normal.

PROBLEMAS

Sección 1-5

1-1. Verifique la ecuación de equilibrio 1-5 para la dirección x con ayuda de un croquis, similar al de la figura 1-6, donde se muestren los incrementos de esfuerzo para esfuerzos tridimensionales.

1-2. Demuestre que las ecuaciones diferenciales de equilibrio para un problema de esfuerzo en un plano bidimensional en coordenadas polares son

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

Los símbolos están definidos en la figura. Las fuerzas de cuerpo se desprecian en esta formulación.

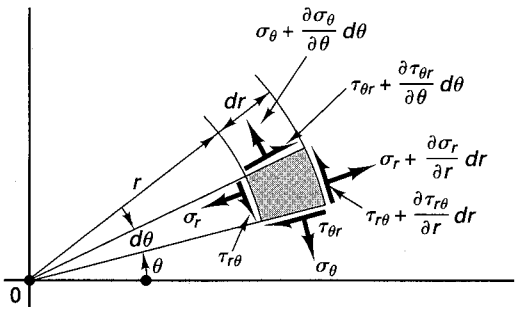


Fig. P1-2

Sección 1-6

1-3. Si se aplica una fuerza axial de tensión de 110 kips a un miembro hecho con un perfil W 8 × 24, ¿cuál es el esfuerzo de tensión? ¿Cuál será el esfuerzo si el miembro es un perfil C 12 × 20.7? Para la designación y áreas de las secciones transversales de esos miembros, véanse las Tablas 4A y 5 en el apéndice.

1-4. Una zapata de cimentación de concreto, común en la construcción de residencias, es similar a la mostrada en la figura 1-9. Si se estima que la construcción del piso y las cargas aplicadas (llamadas cargas vivas) son de 50 lb/ft^2 y que la zapata soporta 40 ft^2 de piso, ¿cuál es la magnitud de la fuerza aplicada P? Si el poste de madera es de $5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$ in en sección transversal, ¿cuál es el esfuerzo axial en el poste y el esfuerzo de apoyo sobre la zapata de concreto? Si la zapata es de 16 × 16 in en la base, ¿cuál es el esfuerzo de apoyo sobre el suelo en lb/ft^2? Desprecie el peso de la zapata.

1-5. Un eslabón cargado axialmente con la sección transversal T mostrada en la figura está sometido a un esfuerzo uniforme de tensión de 150 MPa. Determine la magnitud de la fuerza aplicada y la posición de la resultante de los esfuerzos. Todas las dimensiones están en milímetros.

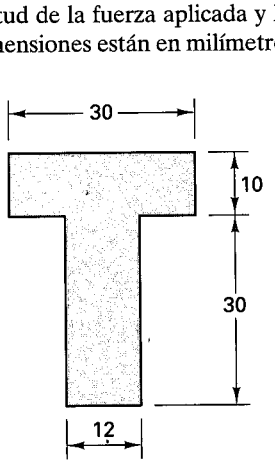


Fig. P1-5

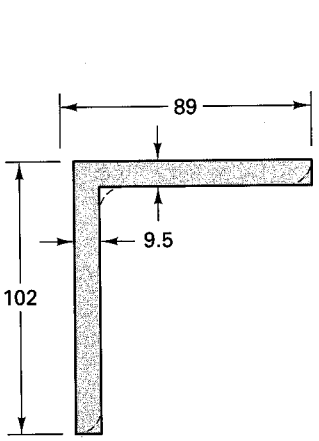


Fig. P1-6

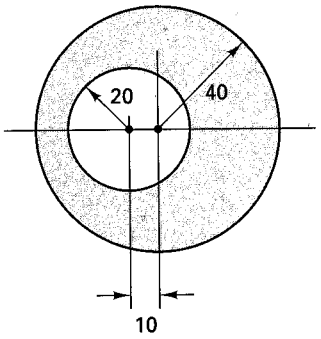


Fig. P1-7

1-6. Un ángulo corto de acero de 102 × 89 × 9.5 mm está sometido a una fuerza de compresión que genera un esfuerzo uniformemente distribuido de 16 ksi. Idealice la sección transversal como se muestra en la figura y compárela con el valor de $A = 1720$ mm^2 dado en los manuales, donde se considera el refinamiento del redondeo de las esquinas. Determine la ubicación del esfuerzo resultante. Compárela con los valores de los manuales de 24.3 mm y 30.8 mm.

1-7 y 1-8. Miembros cortos de aluminio tienen las secciones transversales mostradas en las figuras. Si cada uno de ellos está sometido a una fuerza axial de compresión de 100 kN, encuentre los puntos de aplicación para esas fuerzas de manera que ellas no generen flexión. Todas las dimensiones están en mm.

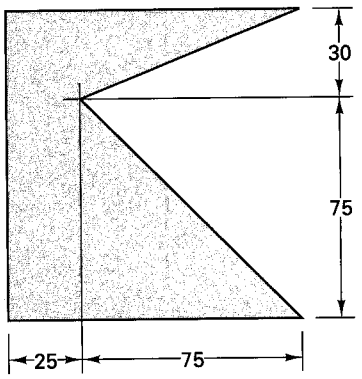


Fig. P1-8

1-9. Una barra de sección transversal variable, empotrada en su extremo izquierdo, está sometida a dos fuerzas concentradas, P_1 y P_2, como se muestra en la figura. (a) Encuentre el esfuerzo axial máximo si $P_1 = 50$ kN y $P_2 = 40$ kN, $A_1 = 60$ mm^2 y $A_2 = 30$ mm^2. (b) En dos diagramas separados, grafique la fuerza axial y el esfuerzo axial a lo largo de la barra.

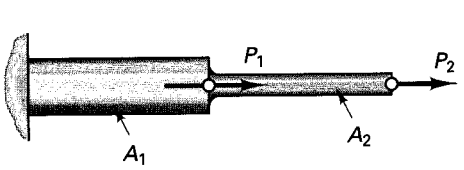


Fig. P1-9

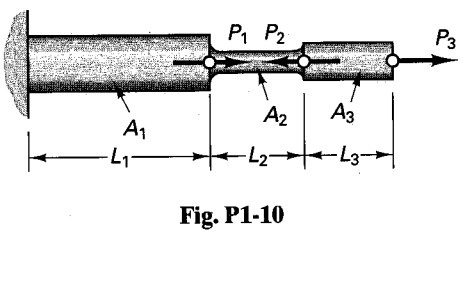


Fig. P1-10

1-10. Una barra de sección transversal variable, empotrada en su extremo izquierdo, está sometida a las tres fuerzas, $P_1 = 4$ kN, $P_2 = -2$ kN y $P_3 = 3$ kN, como se muestra en la figura. En dos diagramas separados, grafique la fuerza axial y el esfuerzo axial a lo largo de la barra. Considere $A_1 = 200$ mm^2, $A_2 = 100$ mm^2 y $A_3 = 150$ mm^2.

1-11. Repita el problema 1-10 con el sentido de la fuerza P_2 invertido.

1-12. Determine los esfuerzos de aplastamiento en A, B y C causados por la fuerza aplicada en la estructura de madera mostrada en la figura. Todos los tamaños de miembros son nominales. Véanse en la Tabla 9 del apéndice los tamaños estándar de la madera estructural.

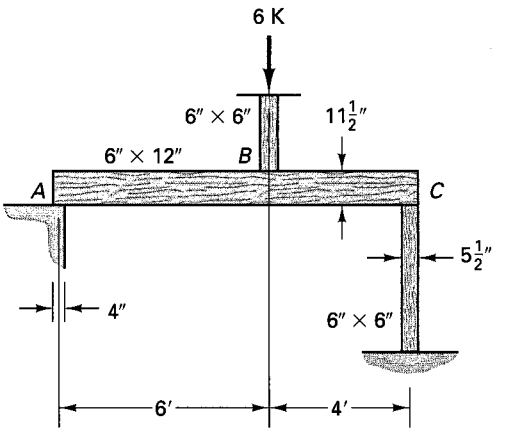


Fig. P1-12

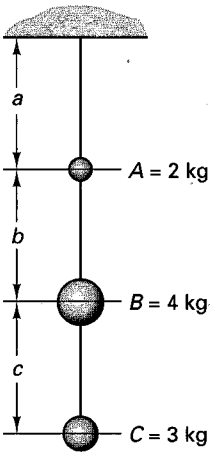


Fig. P1-13

1-13. Tres esferas metálicas están suspendidas de tres alambres de igual longitud arregladas como se muestra en la figura P1-13. Las masas de las esferas, comenzando por arriba, son de 2 kg, 4 kg y 3 kg. En el mismo orden, comenzando por arriba, los alambres tienen los siguientes diámetros: 2 mm, 1.5 mm y 1 mm, respectivamente. (a) Determine cuál es el alambre más esforzado, (b) cambiando la posición de las esferas optimice la localización de éstas para obtener un sistema con esfuerzos mínimos.

Secciones 1-6 y 1-7

1-14. Sobre la misma gráfica trace el esfuerzo normal σ_θ y el esfuerzo cortante τ_θ en función del ángulo θ definido en la figura 1-12. El ángulo θ, sobre el eje de las abscisas, debe variar entre 0° y 360°. Identifique los valores máximos y mínimos para esas funciones.

1-15. En la figura 1-12(a), determine los ángulos θ donde las magnitudes de σ_θ y τ_θ sean iguales.

1-16. Usando ejes coordenados polares y sobre la misma gráfica, trace σ_θ y τ_θ en función del ángulo θ definido en la figura 1-12. Identifique los valores máximos y mínimos para esas funciones.

1-17. Una barra cuadrada de 10 mm de lado está sometida a una fuerza de tensión $P = 20$ kN, como se muestra en la figura 1-12(a). (a) Usando estática, determine los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre las secciones *a-a* y *b-b* para $\theta = 30°$. (b) Verifique los resultados usando las ecuaciones 1-7a y 1-7b. (c) Muestre los resultados como en la figura 1-12(g).

1-18. Repita el problema 1-17 para una barra cuadrada de 1/2 in de lado con $P = 5$ kips y $\theta = 20°$.

1-19. Con un empalme con $\alpha = 20°$, traslapado y unido con pegamento, va a formarse un miembro rectangular de 10×20 mm, como se muestra en la figura. Suponiendo que la resistencia por cortante de la junta pegada controla el diseño, ¿qué fuerza axial P puede aplicarse al miembro? Suponga que la resistencia por cortante de la junta pegada es de 10 MPa.

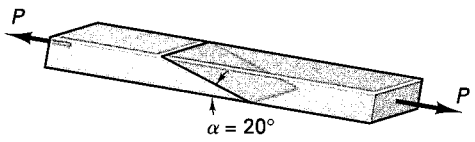


Fig. P1-19

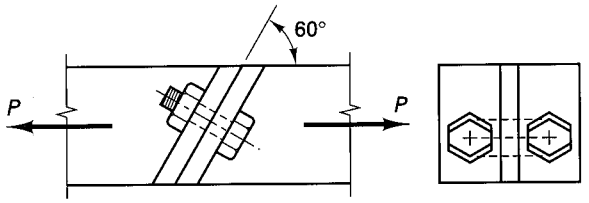


Fig. P1-20

1-20. Las tes de acero están atornilladas con dos tornillos de 19 mm como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos promedio normal y cortante a lo largo del plano de contacto a 60° entre las tes. La fuerza aplicada P es de 100 kN.

Sección 1-8

1-21. Un tablón de madera de 40×80 mm está pegado a dos tablones de 20×80 mm, como se muestra en la figura 1-13(d). Si cada una de las dos superficies pegadas es de 40×80 mm y la fuerza aplicada es $P = 20$ kN, ¿cuál es el esfuerzo cortante promedio en las juntas?

1-22. Dos placas de acero de 10 mm de espesor están unidas entre sí, como se muestra en la figura, por medio de dos tornillos de 20 mm que se ajustan estrechamente en los agujeros. Si la junta transmite una fuerza de tensión de 45 kN, determine (a) el esfuerzo normal promedio en las placas en una sección donde no hay agujeros; (b) el esfuerzo normal promedio en la sección crítica; (c) el esfuerzo cortante promedio en los tornillos y (d) el esfuerzo de aplastamiento promedio entre los tornillos y las placas.

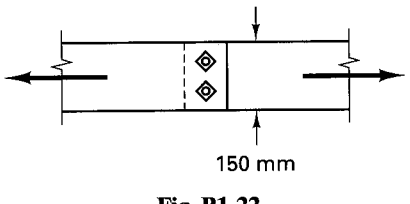


Fig. P1-22

1-23. Una vista despiezada de una conexión atornillada parecida a la mostrada en las figuras 1-14(e), (f), (g) y (h) se muestra en la figura P1-23.[1] El ancho de las placas es de 60 mm; sus espesores son $t = 10$ mm. El tornillo con ajuste sin holgura tiene 20 mm de diámetro. Calcule el esfuerzo normal máximo en las placas en la sección crítica debido a una fuerza aplicada de tensión $P = 70$ kN. Para la misma condición calcule los esfuerzos de aplastamiento y cortante en el tornillo.

1-24. La potencia entre dos flechas paralelas se transfiere por medio de una cadena montada sobre ruedas dentadas (Fig. P1-24). Si la fuerza desarrollada por la cadena en la rueda motriz C es $P = 10$ kN, ¿cuál es el esfuerzo cortante en las chavetas? Las chavetas de ambas ruedas son iguales. Note que conociendo la magnitud de la fuerza P y el diámetro de paso de una rueda, puede conocerse el par de torsión aplicado al eje. Encuentre la fuerza que actúa sobre chavetas de 6 (ancho) $\times$ 4 $\times$ 10 mm.

[1] Según G. Dreyer, *Festigkeislehre und Elastizitätslehre* (*Resistencia de materiales y teoría de la elasticidad*) (Leipzig, Alemania: Janecke, 1938).

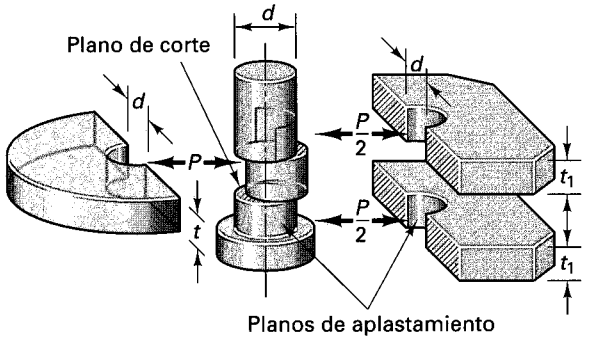


Fig. P1-23

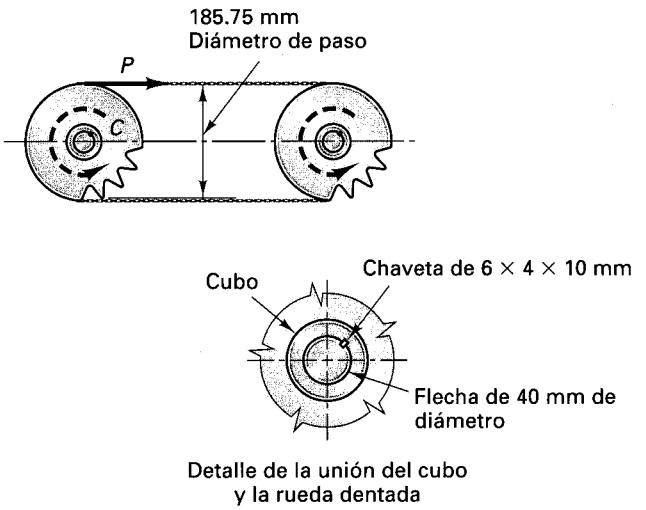


Fig. P1-24

1-25. Según el Instituto Estadounidense de la Construcción en Acero, para que los tornillos transfieran una fuerza cortante sin deslizamiento, deben estar completamente apretados. Por ejemplo, para un tornillo de acero de alta resistencia de 1 in grado A490, la tensión mínima es de 64 R, lo que da una fuerza cortante permisible de 16.5 k. Las arandelas de acero endurecido usadas con tales tornillos tienen 2 in de diámetro externo. Con esos datos, estime la presión desarrollada bajo las arandelas. Además, suponiendo que el material efectivo a 0.5 in. bajo la superficie de la placa es de 3 in de diámetro, determine la presión promedio para esta condición. (Véase la figura 1-15.)

1-26. Considere las soldaduras de filete mostradas en la figura P1-26. Al notar que el esfuerzo crítico ocurre en la garganta *ab* con un filete a 45°, deduzca una ecuación que exprese la fuerza permisible Q por pulgada de soldadura. Considere que el esfuerzo permisible por cortante sobre la garganta es de 21 ksi.

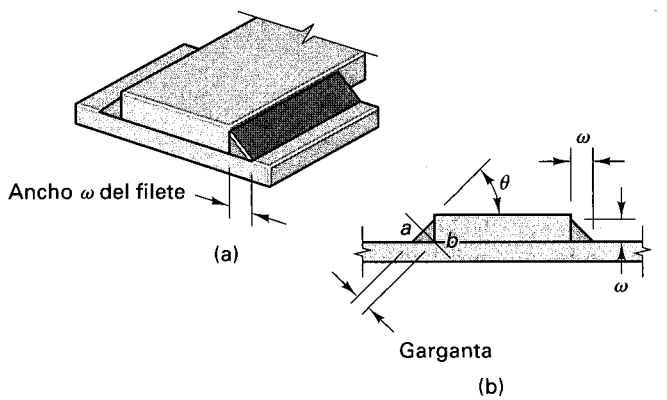


Fig. P1-26

1-27. Repita el ejemplo 1-3 con las unidades SI dadas en la figura.

1-28. Un tubo circular hueco de 2 mm de espesor y 30 mm de diámetro exterior está sometido sobre su superficie externa a un esfuerzo cortante constante de 10 Pa en dirección axial, como se muestra en la figura. Si el tubo tiene 400 mm de longitud, ¿cuál es su esfuerzo axial máximo? Grafique la variación del esfuerzo axial a lo largo del tubo.

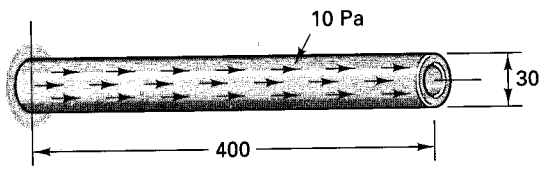


Fig. P1-28

1-29. Un miembro corto en compresión está fabricado con dos tubos estándar de acero, como se muestra en la figura. Si el esfuerzo permisible por compresión es de 100 MPa, (a) ¿cuál es la carga axial permisible P_1 si la carga axial $P_2 = 200$ kN; (b) ¿cuál es la carga permisible P_1 si la carga $P_2 = 65$ kN? Véase en la Tabla 7 del apéndice las áreas transversales de los tubos estándar.

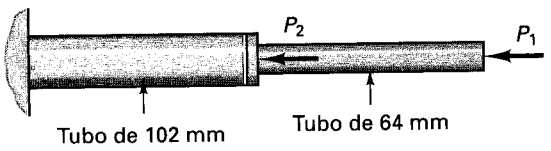
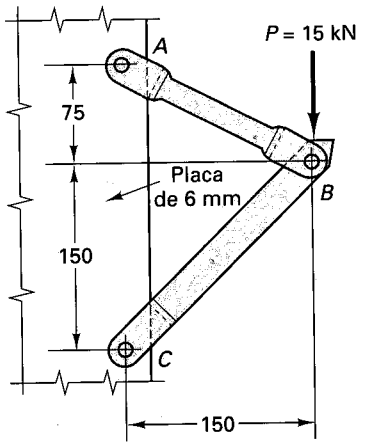


Fig. P1-29

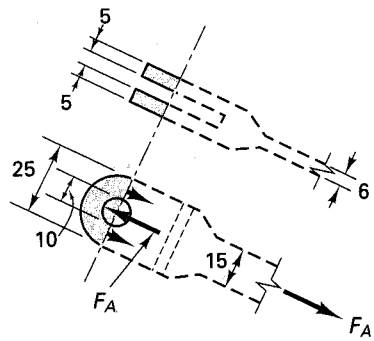
1-30. Una barra de sección transversal variable empotrada en un extremo está sometida a tres fuerzas axiales como se muestra en la figura. Encuentre el esfuerzo normal máximo.

Fig. P1-30

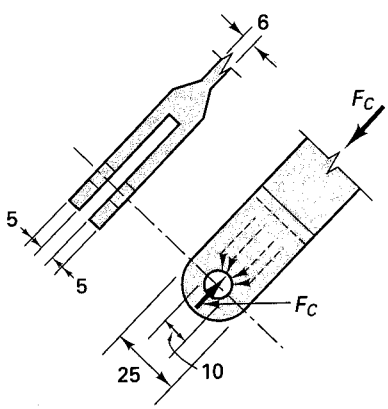
1-31. Repita el problema anterior suponiendo que la fuerza axial en el extremo, en vez de ser de 180 kN es tal que ocasione los mismos esfuerzos normales máximos en los dos segmentos de la barra. Las fuerzas axiales de 90 kN y 310 kN se mantienen aplicadas y el esfuerzo normal máximo en la parte más pequeña de la barra puede estar entre esas dos fuerzas o cercano al extremo libre. Investigue ambas condiciones.



(a)



(b)



(c)

(Todas las dimensiones son en mm)

Fig. P1-27

1-32. ¿Cuál es el esfuerzo cortante en el tornillo A causado por la carga aplicada mostrada en la figura? El tornillo tiene 6 mm de diámetro y actúa en cortante doble. Todas las dimensiones están en mm.

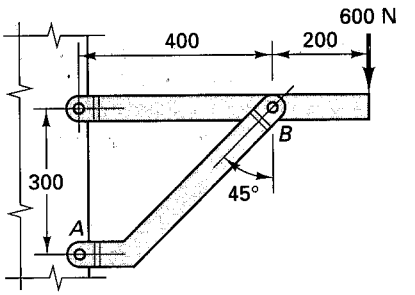


Fig. P1-32

1-33. En la figura se muestra un pedal de control que sirve para accionar un mecanismo de resorte. Calcule el esfuerzo cortante en los pasadores A y B debido a la fuerza P que causa un esfuerzo de 75 MPa en la barra AB. Ambos pasadores trabajan en cortante doble.

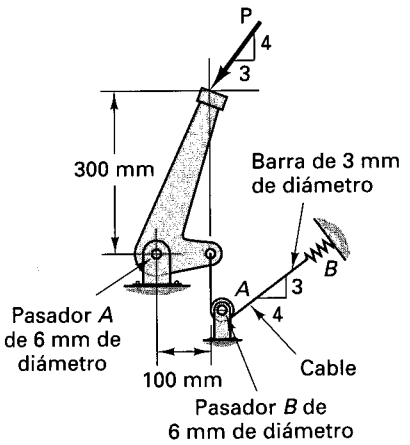


Fig. P1-33

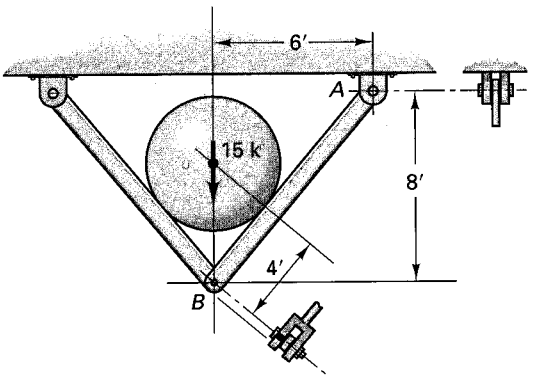


Fig. P1-34

1-34. Un tanque cilíndrico de 6 ft de diámetro está soportado por dos colgantes como se muestra en la figura. El peso total soportado por los dos colgantes es de 15 kips. Determine los esfuerzos cortantes en los pasadores de 1 in de diámetro en los puntos A y B debido al peso del tanque. Desprecie el peso de los colgantes y suponga que el contacto entre ellos y el tanque es sin fricción.

1-35. Dos alambres de acero con uniones bien diseñadas y una junta están sometidos a una fuerza externa de 800 N, como se muestra en la figura. El diámetro del alambre AB es de 2.68 mm y el del alambre BC es de 2.52 mm. (a) Determine los esfuerzos en los alambres causados por la fuerza vertical aplicada. (b) ¿Están bien escogidos los tamaños de los alambres?

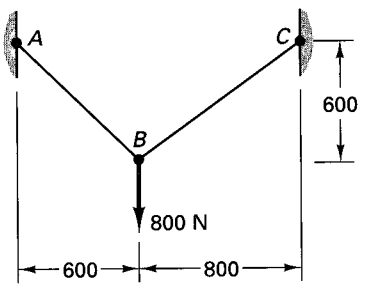


Fig. P1-35

1-36. Una fuerza de 800 kN está soportada por dos tubos estándar de acero de 102 mm de diámetro nominal conectados por un pasador, como se muestra en la figura (véanse las propiedades estructurales de los tubos en la Tabla 7 del apéndice). Determine los esfuerzos axiales en cada uno de los tubos causados por la fuerza aplicada. Todas las fuerzas se encuentran en un plano.

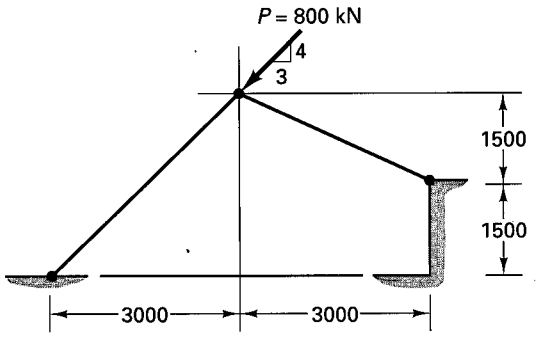


Fig. P1-36

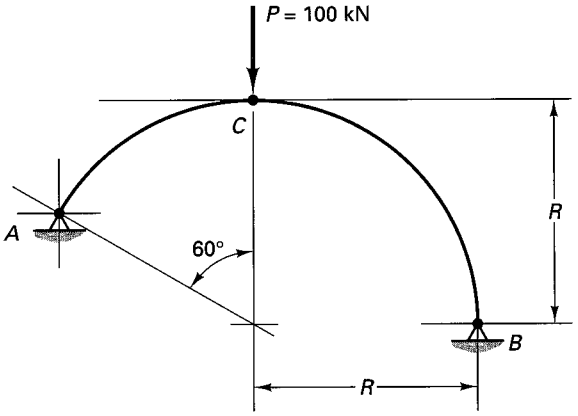


Fig. P1-37

1-37. Un arco plano circular triarticulado consta de dos segmentos como se muestra en la figura. Determine las reacciones en A y B causadas por la aplicación de una fuerza vertical $P = 100$ kN en la articulación C. Si los pasadores de las articulaciones en A y B tienen 20 mm de diámetro y cada uno actúa en cortante doble, ¿qué esfuerzos cortantes se desarrollan en los pasadores debido a P?

1-38. Un marco estructural arriostrado está diseñado para resistir las fuerzas laterales mostradas en la figura. Despreciando el peso del marco, determine los esfuerzos axiales en los miembros BD, FG y DE; las áreas respectivas para esos miembros son 160, 400 y 130 mm^2.

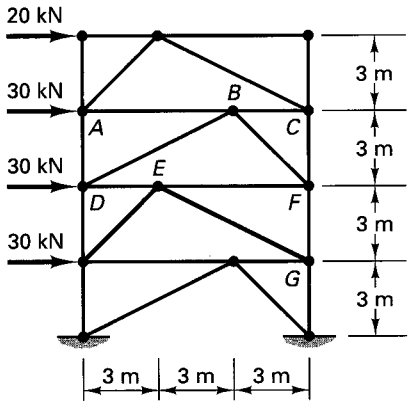


Fig. P1-38

1-39. Un sistema en un plano consiste en una viga rectangular AC soportada por los miembros AE y BE de acero y un pasador en C, como se muestra en la figura. El miembro AE está formado por dos barras planas paralelas de 6 por 25 mm y el pasador C, actuando en cortante doble, tiene 19 mm de diámetro. Determine el esfuerzo axial en las barras AE y el esfuerzo cortante en el pasador C.

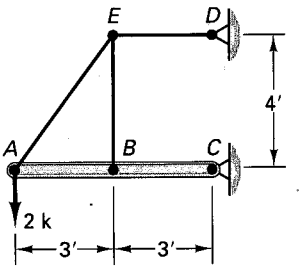


Fig. P1-39

1-40. Por medio de numerosos colgantes verticales, el cable mostrado en la figura está diseñado para soportar una carga continuamente distribuida. Esta carga, junto con el cable y los colgantes, puede ser aproximada como una carga uniformemente distribuida de 2 kN/m. Determine la sección transversal requerida para el cable si la resistencia por rendimiento del material es de 1000 MPa y el factor de seguridad requerido es 2. (*Sugerencia:* El cable toma la forma de una parábola y desarrolla sólo una fuerza horizontal H en su punto más bajo. La mayor resultante en un soporte es igual a la fuerza máxima en el cable.)

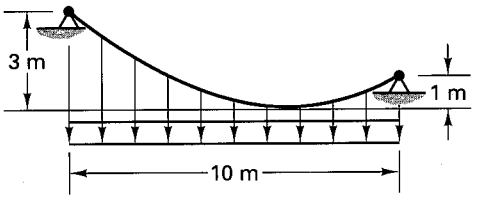


Fig. P1-40

1-41. Tres masas iguales de 0.5 kg están unidas a un alambre de 10 mm de diámetro, como se muestra en la figura, y giran alrededor de un eje vertical, como se muestra en la figura P1-41, sobre un plano sin fricción a 4 Hz. Determine los esfuerzos axiales en los tres segmentos del alambre y grafique los resultados en un diagrama en función de r. Considere las masas como concentradas en puntos.

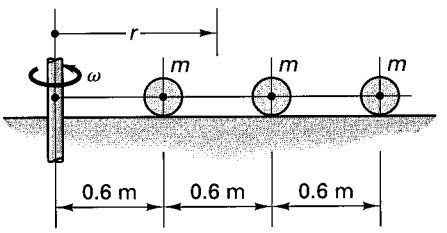


Fig. P1-41

1-42. Una barra con área constante A en su sección transversal gira alrededor de uno de sus extremos en un plano horizontal con velocidad angular constante ω, como se muestra en la figura. El peso unitario del material es γ. Determine la variación del esfuerzo σ a lo largo de la barra y grafique el resultado sobre un diagrama como función de r.

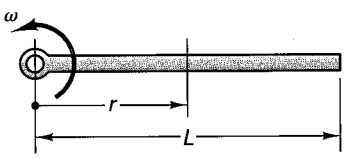


Fig. P1-42

1-43. Un pequeño tractor va a diseñarse para empujar horizontalmente con una fuerza de 36 kN mientras se desarrolla una fuerza vertical hacia abajo de 18 kN sobre la cuchilla, como se muestra en la figura. Dos pasadores A simétricamente colocados van a resisitir las fuerzas aplicadas. ¿Qué tamaño deben tener los pasadores si el esfuerzo permisible en cortante es de 20 MPa?

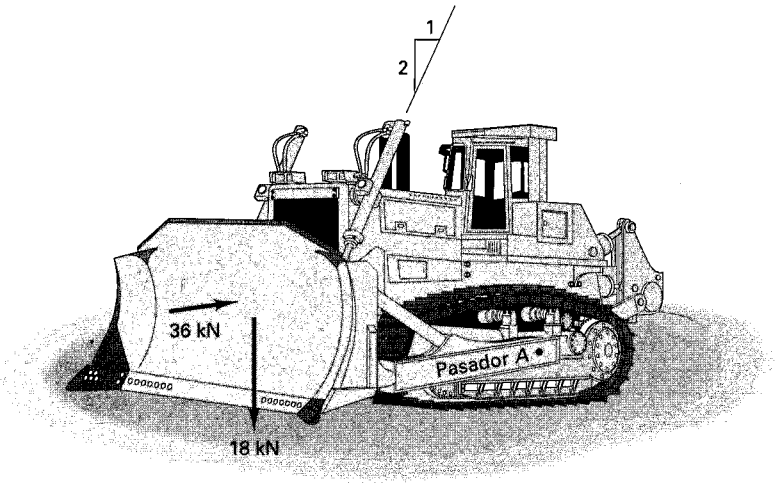


Fig. P1-43

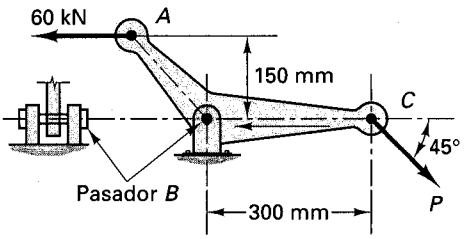


Fig. P1-44

1-44. ¿Cuál es el diámetro requerido para el pasador B del mecanismo de leva acodada mostrado en la figura si una fuerza aplicada de 60 kN en A es resistida por una fuerza P en C? El esfuerzo permisible en cortante es de 100 MPa.

1-45. Una junta para transmitir una fuerza de tensión se fabrica por medio de un pasador, como se muestra en la figura. Si el diámetro de las barras conectadas es D, ¿cuál debe ser el diámetro d del pasador? Suponga que el esfuerzo cortante permisible en el pasador es la mitad del máximo esfuerzo de tensión en las barras. (En la Sección 12-16 se mostrará que esta razón para los esfuerzos permisibles es una excelente suposición para muchos materiales.)

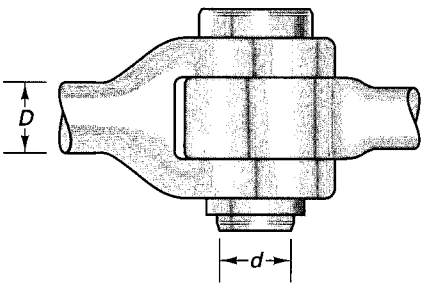


Fig. P1-45

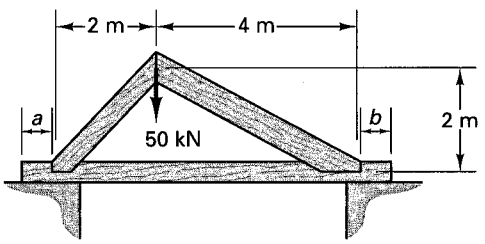


Fig. P1-46

1-46. ¿Qué distancias mínimas a y b son requeridas más allá de las muescas en el miembro horizontal de la armadura mostrada en la figura? Todos los miembros tienen una sección transversal nominal de 200 × 200 mm. (Véanse los tamaños reales en la Tabla 9 del apéndice.) Suponga que la resistencia última de la madera en esfuerzo cortante paralelo al grano es de 3.5 MPa. Use un factor de seguridad de 5. (Estos detalles constructivos no son recomendados.)

1-47. Para la estructura mostrada en la figura, calcule el tamaño del tornillo y el área de las placas de apoyo requeridos si los esfuerzos permisibles son de 18,000 psi en tensión y de 500 psi en aplastamiento. Desprecie el peso de las vigas.

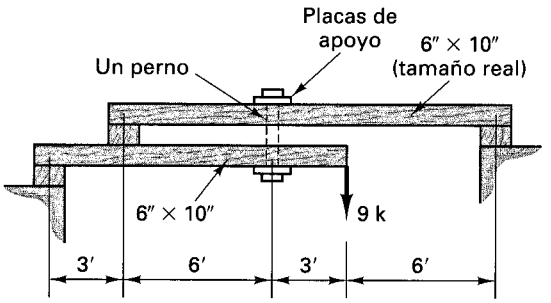


Fig. P1-47

1-48. Encuentre las áreas transversales requeridas para todos los miembros en tensión en el ejemplo 1-6. El esfuerzo permisible es de 140 MPa.

1-49. Repita el ejemplo 1-6 considerando los datos siguientes: altura total de la armadura = 2.5 m, ancho total = 5 m, fuerza P aplicada = 600 kN y esfuerzo permisible en tensión = 140 MPa.

1-50. Dos barras de acero de alta resistencia de diámetros diferentes están unidos en A y C y soportan una masa M en B, como se muestra en la figura. ¿Qué masa puede soportarse? La resistencia última de las barras es de 800 MPa y el factor de seguridad debe ser 2. La barra AB tiene $A = 200$ mm^2 y la barra BC tiene $A = 400$ mm^2. (Los extremos de las barras en tales aplicaciones requieren uniones especiales.)

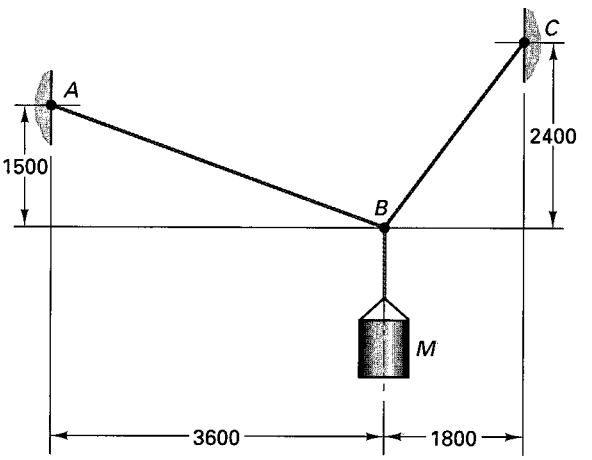


Fig. P1-50

1-51. Una masa de 30 kg cuelga por medio de una polea como se muestra en la figura. La polea esta soportada por la estructura *ABC*. Encuentre las áreas transversales requeridas para los miembros *AC* y *BC* si el esfuerzo permisible en tensión es de 140 MPa y de 96 MPa en compresión, según se determina por el método del capítulo 16.

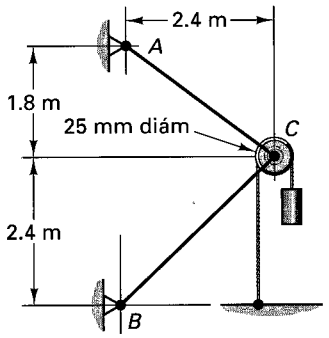


Fig. P1-51

1-52. Una viga con una fuerza de 500 kN en un extremo está soportada por un cable apuntalado como se muestra en la figura. Encuentre las componentes horizontal y vertical de las reacciones en *A*, *B* y *D*. Si el esfuerzo permisible de tensión es de 140 MPa y el permisible de compresión es de 100 MPa, ¿cuál es el área transversal requerida de los miembros *AC*, *BC* y *CE*? (*Sugerencia:* Aísle primero la viga *DF*.)

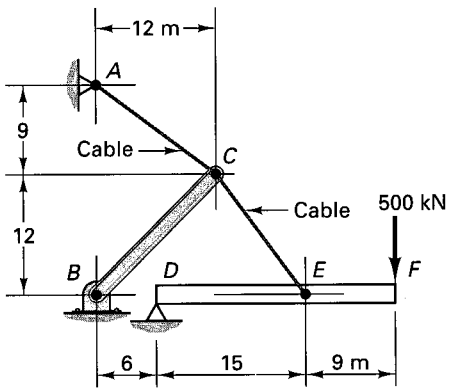


Fig. P1-52

1-53. Se muestra en la figura una torre usada para soportar los cables de una línea elevada. Si está sometida a una fuerza horizontal de 600 kN y los esfuerzos permisibles son de 100 MPa en compresión y de 140 MPa en tensión, ¿cuál es el área transversal requerida en cada miembro? Todos los miembros están articulados en sus extremos.

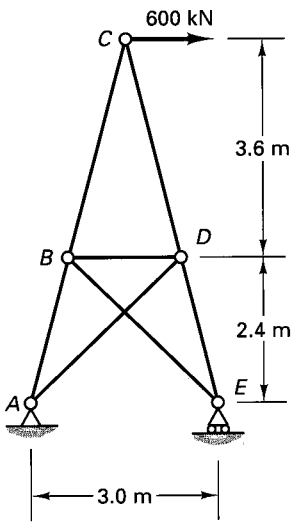


Fig. P1-53

1-54. Para el marco mostrado para el problema 1-38, encuentre las áreas transversales requeridas para los miembros *AB*, *AD* y *BF*. El esfuerzo permisible en tensión es de 120 MPa y en compresión es de 85 MPa.

1-55. Un sistema de armadura en un plano tiene las dimensiones mostradas en la figura. El miembro AE es continuo y puede resistir flexión. Todos los nudos están articulados. Calcule el diámetro requerido para el miembro AB en tensión para que tome la fuerza aplicada en A. El esfuerzo permisible es de 40 ksi.

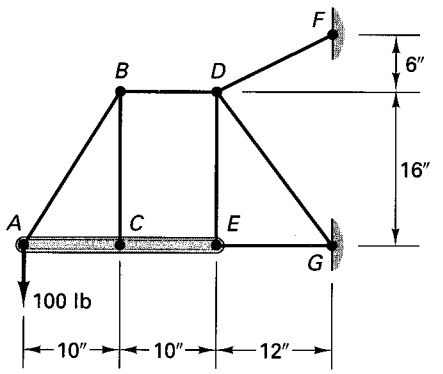


Fig. P1-55

1-56. Un marco plano tiene las dimensiones mostradas en la figura. Los miembros AC y DF son continuos y pueden resistir flexión. Todas las juntas están articuladas. Calcule el diámetro requerido en una barra de acero de alta resistencia para el miembro CD. Suponga que la resistencia última para la barra es de 1250 MPa y que la eficiencia de la unión extrema es de 80%. El factor de seguridad para la barra es de 1.5.

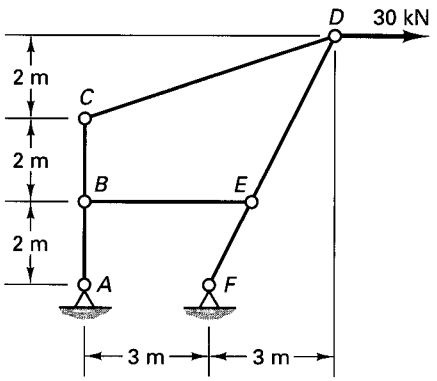


Fig. P1.56

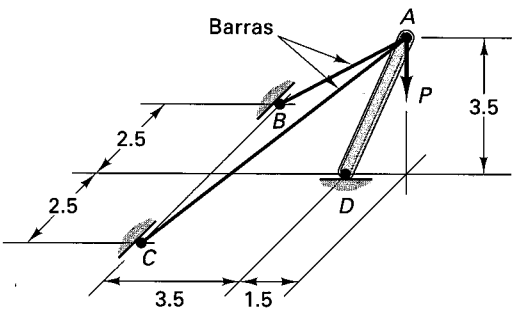


Fig. P1.57

1-57. Para soportar una carga $P = 200$ kN, calcule el diámetro necesario para las barras AB y AC del tripié mostrado en la figura. Desprecie el peso de la estructura y suponga que las juntas están articuladas. No considere el efecto de las roscas. La resistencia permisible por tensión es de 120 MPa. Todas las dimensiones están en metros.

1-58. Se muestra en la figura un marco articulado que soporta una fuerza P. El esfuerzo σ en los miembros AB y BC debe ser el mismo. Determine el ángulo α necesario para lograr un peso mínimo en la construcción. Los miembros AB y BC tienen sección transversal constante.

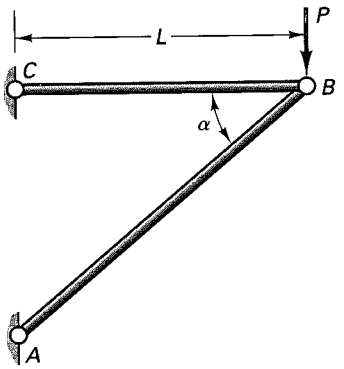


Fig. P1-58

Sección 1-11

1-59. Integrando la función de probabilidad o usando una tabla (indique la fuente), verifique las áreas contenidas dentro de una y dos desviaciones estándar de la media mostrada en la figura 1-25.

1-60. Verifique por álgebra directa las desviaciones estándar de la media para el ejemplo en la figura 1-26(c).

2

Deformación unitaria

2-1. Introducción

Este capítulo mostrará cómo el esfuerzo puede relacionarse con la deformación por unidad de longitud de una probeta usando medios experimentales para establecer una *relación esfuerzo-deformación unitaria* para un material específico. Esta relación se llama *modelo constitutivo* de un material y expresa las propiedades mecánicas más importantes de un material durante un proceso de carga. El modelo constitutivo de un material se basa en resultados de *experimentos* que se llevan a cabo en condiciones muy simples de carga. Cuando una relación constitutiva se combina con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad, puede predecirse el comportamiento estructural general.

2-2. La prueba de tensión y la deformación unitaria normal

Las propiedades mecánicas de los materiales usados en ingeniería se determinan por medio de experimentos efectuados sobre pequeñas probetas. Esos experimentos se llevan a cabo en laboratorios equipados con máquinas de prueba, como la que se muestra en la figura 2-1, capaces de cargar

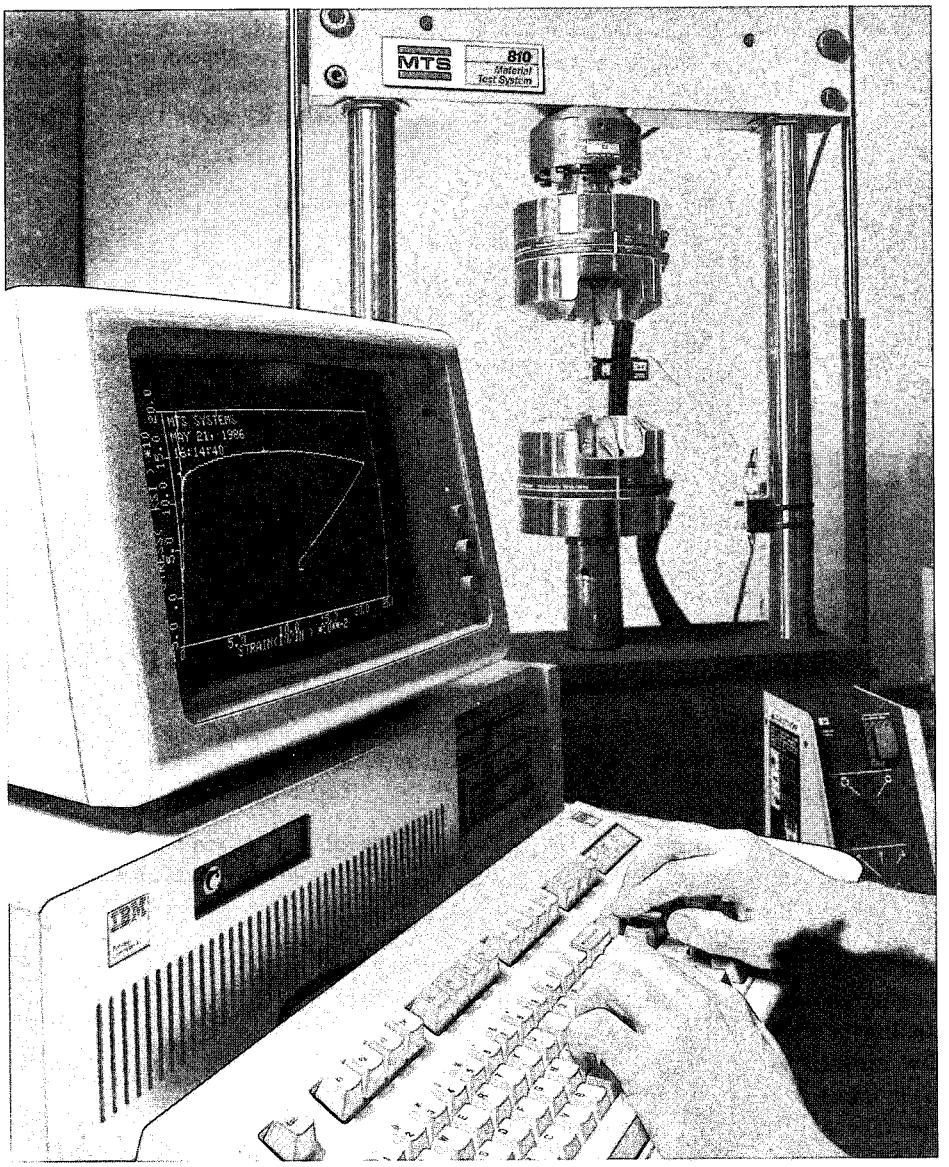


Fig. 2-1 Máquina universal de pruebas (Cortesía de la MTS System Corporation).

en tensión o en compresión. Han sido desarrollados varios tipos de prueba para evaluar las propiedades de los materiales bajo diferentes condiciones de carga, como carga estática de corta duración y cíclica, y también pruebas a largo plazo y de carga impulsiva. A través de los años, cada una de esas pruebas se ha estandarizado de manera que pueden ser comparados los resultados obtenidos en diferentes laboratorios. En los Estados Unidos, la American Society for Testing and Materials (ASTM) ha publicado guías para efectuar tales pruebas y proporciona límites para los que el uso de un material particular se considera aceptable.

Uno de los experimentos más importantes es la *prueba de tensión o compresión* en la cual una fuerza axial creciente P se aplica a una probeta cilíndrica como la de la figura 2-2. El área transversal original A_0 de la porción central de la probeta se calcula exactamente y dos marcas de calibración se inscriben a una distancia L_0 entre sí. La distancia L_0 se llama *longitud calibrada* de la probeta. En un experimento, el cambio en la longitud de esta distancia se mide por medio de un dispositivo llamado *extensómetro*. En las pruebas de tensión, en vez de probetas cilíndricas suelen usarse barras planas rectangulares.

Durante un experimento, el cambio en la longitud calibrada se registra como función de la fuerza aplicada. Con la misma carga y una longitud calibrada mayor se observa una mayor deformación que cuando la longitud calibrada es pequeña. Por tanto, es muy importante referirse a la deformación observada por unidad de longitud calibrada (es decir, a la intensidad de la deformación).

Si L_0 es la longitud calibrada inicial y L es la longitud observada bajo una carga dada, el alargamiento calibrado es $\Delta L = L - L_0$. El alargamiento (o contracción) ϵ por unidad de la longitud calibrada inicial está dado por

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \tag{2-1}$$

Esta expresión define la *deformación unitaria en tensión (o en compresión)*. Como esta deformación unitaria está asociada con el esfuerzo normal, se llama comúnmente *deformación unitaria normal.* Se trata de una cantidad sin dimensiones, pero es costumbre referirse a ella como si tuviera la dimensión de *mm/mm, in/in, m/m o μm/m* (microdeformación unitaria). A veces la deformación unitaria se da como un porcentaje de la longitud original. La cantidad ϵ es por lo general muy pequeña. En la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería del tipo que se trata en este texto, es del orden de magnitud de 0.1%.

Como por lo general las deformaciones unitarias que se encuentran son muy pequeñas, es posible emplear medios muy versátiles para medirlas usando *extensómetros eléctricos desechables*. Éstos se fabrican de alambre muy fino o laminitas muy delgadas que se pegan al miembro que se está investigando. Cuando las fuerzas son aplicadas al miembro, el alargamiento o contracción de los alambres o laminitas tiene lugar en forma concurrente con cambios similares en el material. Esos cambios de longitud alteran la resistencia eléctrica del extensómetro que puede medirse y calibrarse para indicar la deformación unitaria que está ocurriendo. Tales extensómetros, adecuados para diversas condiciones ambientales, están disponibles en varias longitudes que varían entre 4 y 140 mm. En la figura 2-3 se muestra un diagrama esquemático de un extensómetro de alambres y en la figura 2-4 se muestra una fotografía amplificada de un pequeño extensómetro típico de laminitas.[1]

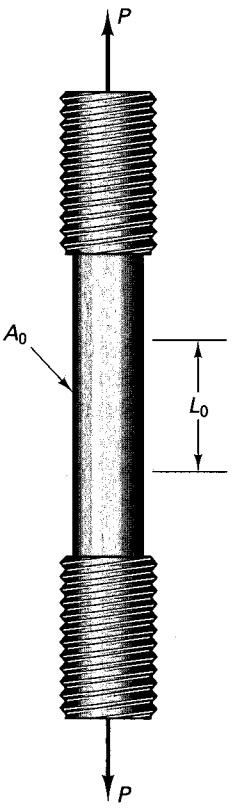


Fig. 2-2 Probeta cilíndrica de pruebas.

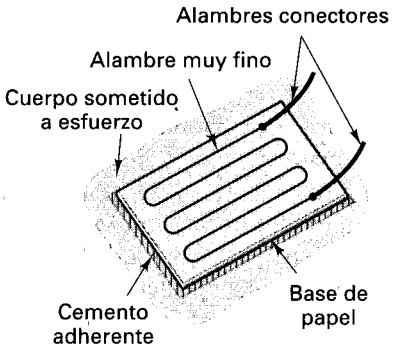


Fig. 2-3 Extensómetro de alambres (no se muestra la cubierta protectora)

[1]Véase Society for Experimental Mechanics (SEM), A. S. Kobayashi, editor, *Handbook on Experimental Mechanics,* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1987.

2-3. Relaciones esfuerzo-deformación unitaria

En la mecánica de sólidos, el comportamiento mecánico de los materiales reales bajo carga es de importancia primaria. Los experimentos, sobre todo las pruebas de tensión o compresión, proporcionan información básica sobre este comportamiento. En dichos experimentos, se observa la respuesta macroscópica (de conjunto) de los especímenes a las cargas aplicadas, para determinar las relaciones empíricas fuerza-deformación. Los investigadores relacionados con la ciencia de materiales tratan de dar razones para el comportamiento observado.

Del análisis anterior debe inferirse que para propósitos generales, es más importante reportar la deformación unitaria de un miembro en tensión o compresión que en el alargamiento del extensómetro. En forma similar, el esfuerzo es un parámetro más significativo que la fuerza, ya que el efecto sobre un material de una fuerza aplicada P depende principalmente del área de la sección transversal del miembro. En consecuencia, en el estudio experimental de las propiedades mecánicas de los materiales, es costumbre trazar los diagramas de la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en una prueba particular. Esas curvas se llaman *diagramas de esfuerzo-deformación unitaria,*[2] y para la mayor parte de los fines prácticos, se suponen ser independientes del tamaño de la probeta y de su longitud calibrada. Hay dos maneras de describir dichos diagramas, las cuales se verán en esta sección.

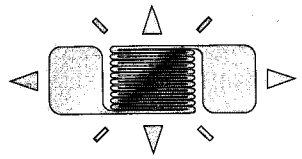


Fig. 2-4 Extensómetro típico de un solo elemento de resistencia eléctrica de laminita metálica (Cortesía de Micro-Measurements Division, Measurement Group, Inc., Raleigh, Carolina del Norte).

Diagramas esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería Suponiendo que el esfuerzo es constante sobre la sección transversal de la porción central de la probeta y a lo largo de la longitud calibrada, puede calcularse el *esfuerzo* σ *nominal* o *de ingeniería,* dividiendo entonces la fuerza aplicada P entre el área A_0 transversal original de la probeta,

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \tag{2-2}$$

De la misma manera, la *deformación unitaria* ϵ *nominal* o *de ingeniería* se encuentra directamente de la lectura del extensómetro o dividiendo el cambio de la longitud calibrada ΔL entre la longitud calibrada original L_0 de la probeta y aplicando la ecuación 2-1. Aquí, la deformación unitaria se supone constante en toda la longitud calibrada.

Si los valores calculados de σ y la correspondiente ϵ se trazan sobre una gráfica en la cual la ordenada es el esfuerzo y la abscisa es la deformación unitaria, la curva resultante se llama *diagrama esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería.* Este diagrama es muy importante en la ingeniería ya que proporciona los medios para obtener varias propiedades mecánicas de un material independientemente de su tamaño o forma física. Como ejemplo se analizarán las características del diagrama esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería de un acero dulce, que es un material que se usa comúnmente para fabricar miembros estructurales y elementos mecánicos.

[2]Los diagramas esfuerzo-deformación unitaria se originaron con Jacob Bernoulli (1654-1705) y J. V. Poncelet (1788-1867). Véase S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials,* Nueva York: Dover Publications, Inc., 1983.

La forma general del diagrama esfuerzo-deformación unitaria para una probeta de acero dulce cargada a la falla en tensión para una carga que crece monotónicamente, es bien conocida como resultado de numerosas pruebas. En la figura 2-5 se muestra una gráfica del esfuerzo normal σ *versus* la deformación unitaria de ingeniería ϵ que puede ser subdividida en cuatro regiones bien definidas:

1. La región elástica lineal
2. La meseta de fluencia {rendimiento}
3. La región de endurecimiento por deformación
4. La región de esfuerzo postúltimo o región de suavización de la deformación unitaria.

La región elástica lineal $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_y$ de la curva esfuerzo-deformación unitaria, donde ε_y es la deformación unitaria de fluencia, es una línea recta (véase la figura 2-5).

En la meseta de fluencia $\varepsilon_y < \varepsilon_s < \varepsilon_{sh}$, donde ε_{sh} es la deformación unitaria en la iniciación del endurecimiento por deformación, que comienza en el punto $A(\varepsilon_y, \sigma_y)$, el acero se comporta plásticamente. Esta región específica de la curva esfuerzo-deformación unitaria se muestra en el óvalo de la figura 2-5 y se supone que es horizontal. El esfuerzo de fluencia {rendimiento} σ_y correspondiente a la meseta idealizada de rendimiento debe por tanto tomarse como un valor promedio arbitrario dentro del rango de esta meseta.

El punto en que termina la meseta de rendimiento y comienza el endurecimiento por deformación no es obvio. Antes de que se inicie el endurecimiento por lo general ocurre una deformación y una depresión en la meseta de rendimiento, seguida por un incremento pronunciado que cambia repentinamente la pendiente a la región relativamente suave de endurecimiento por deformación. La región de endurecimiento por deformación (véase la figura 2-5) va del punto idealizado $B(\varepsilon_{sh}, \sigma_y)$, en el

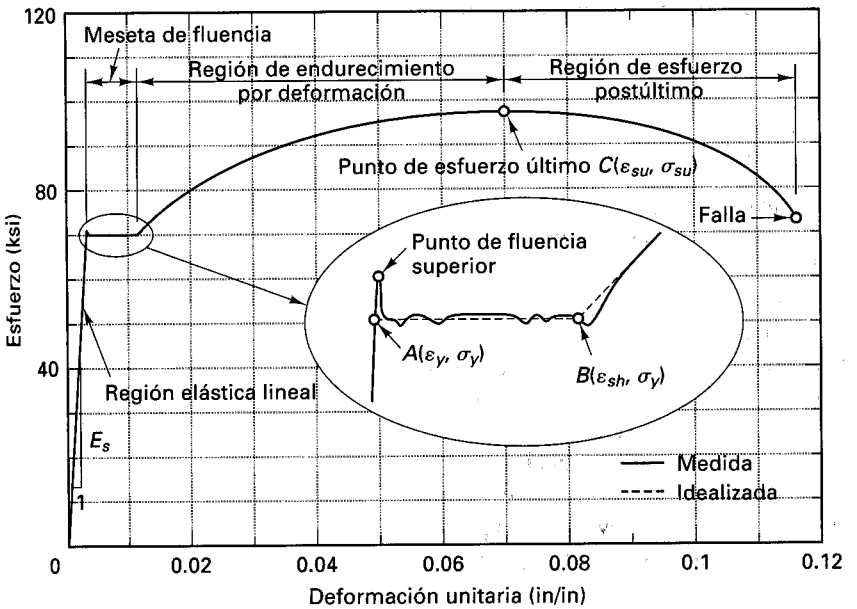


Fig. 2-5 Diagrama esfuerzo-deformación unitaria para un acero dúctil. (Según la referencia 11.)

que comienza el endurecimiento por deformación, al punto último $C(\varepsilon_{su}, \sigma_{su})$, que corresponde al momento en que se resiste el esfuerzo máximo de tensión y comienza el proceso de *estrechez*. La estricción se caracteriza por una contracción de la probeta, como se muestra en la figura 2-6.

En la región postúltima $\varepsilon_s \geq \varepsilon_{su}$, la forma de la curva esfuerzo-deformación unitaria está relacionada con la posición y longitud calibrada en la que se registran los datos experimentales. Por tanto, se supone que el punto último $C(\varepsilon_{su}, \sigma_{su})$ señala el fin de la región útil de la curva esfuerzo-deformación unitaria.

En el pasado se supuso por lo general que la curva monotónica esfuerzo-deformación unitaria del acero dulce sometido a compresión era igual y opuesta a la curva de tensión. Sin embargo, los datos experimentales de pruebas de ingeniería monotónicas muestran que las curvas esfuerzo-deformación unitarias en tensión y compresión coinciden prácticamente sólo cuando la deformación unitaria es pequeña. Las diferencias entre los dos diagramas, mostradas muy *exageradamente* en la figura 2-7, comienzan a aparecer en la región de endurecimiento por deformación, donde la magnitud de la deformación unitaria se vuelve más pronunciada, cuando se desarrolla la estricción (o el embarrilamiento) en la prueba de tensión (o de compresión).

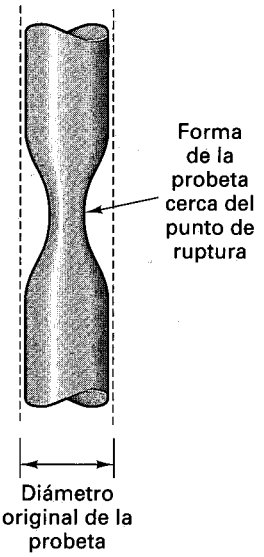


Fig. 2-6 Estrechez de una probeta de acero dúctil.

Diagramas reales esfuerzo-deformación unitaria En algunas aplicaciones de la ingeniería (por ejemplo, en el formado de metales), las deformaciones unitarias pueden ser grandes. En tales casos, la deformación unitaria total se define como la suma de las deformaciones unitarias incrementadas $\Delta\bar{\varepsilon}$; así,

$$\bar{\varepsilon} = \sum \Delta\bar{\varepsilon} = \sum \frac{\Delta L}{L} \tag{2-3}$$

donde L es *longitud calibrada momentánea* de la probeta cuando ocurre el incremento ΔL de alargamiento (contracción). Si L_0 es la longitud calibrada inicial de la probeta, entonces en el límite cuando $\Delta L \to 0$, la deformación unitaria $\bar{\varepsilon}$ correspondiente a la longitud calibrada L_f puede definirse por la siguiente integral:

$$\bar{\varepsilon} = \int_{L_0}^{L_f} \frac{dL}{L} = \ln\left(\frac{L_f}{L_0}\right) \tag{2-4}$$

Esta deformación unitaria, obtenida al sumar los incrementos de deformación unitaria, y que se basa en las dimensiones momentáneas de una probeta, se llama *deformación unitaria natural*[3] o *deformación unitaria verdadera*. Algunas veces a la deformación unitaria verdadera se le llama *deformación unitaria logarítmica* debido a la forma de la ecuación 2-4.

Para las deformaciones unitarias pequeñas, la deformación unitaria real $\bar{\varepsilon}$ definida por la ecuación 2-4 esencialmente coincide con la deformación unitaria de ingeniería ε. Si, bajo la integral, la longitud L se hace igual a L_0, se obtiene la definición de deformación unitaria dada por la ecuación 2-1.

Durante la deformación unitaria plástica de una probeta uniforme sometida a tensión (compresión) axial, el área transversal se vuelve más pequeña (mayor) conforme la probeta se alarga (acorta). Una descripción más exacta

[3]Las deformaciones unitarias naturales fueron introducidas por P. Ludwik en 1909, un renombrado ingeniero alemán.

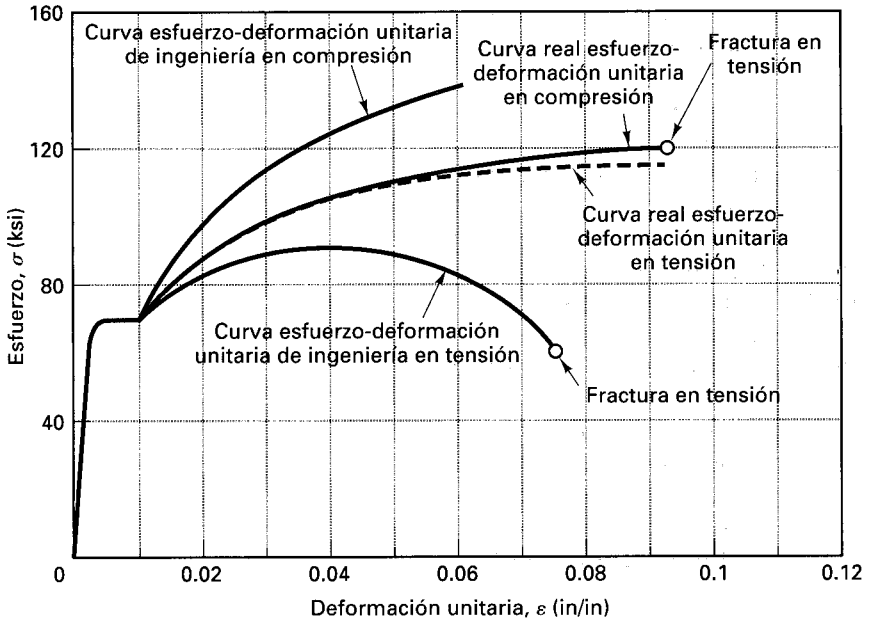


Fig. 2-7 Comparación de diagramas monotónicos esfuerzo-deformación unitaria de tensión y compresión. (Según la referencia 11).

del esfuerzo real experimentado por la probeta puede darse por medio del concepto de *esfuerzo real.*[4] El esfuerzo real $\bar{\sigma}$, está relacionado con el área A transversal instantánea y con la fuerza aplicada F según la expresión

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A} \tag{2-5}$$

Como la deformación unitaria plástica no implica cambio de volumen, es decir, $A_0 L_0 = AL$ y $L = L_0 (1 + \varepsilon)$—

$$\frac{A_0}{A} = \frac{L}{L_0} = (1 + \varepsilon) \tag{2-6}$$

la cual, usando la ecuación 2-2 y notando que $F = P$, nos permite relacionar el esfuerzo real con el esfuerzo de ingeniería como sigue:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0}(1 + \varepsilon) = \sigma(1 + \varepsilon) \tag{2-7}$$

Si el valor de la $\bar{\sigma}$ así definida y la correspondiente $\bar{\varepsilon}$ se trazan sobre una gráfica, en la cual la ordenada es el esfuerzo real y la abscisa es la deformación unitaria real, la curva resultante se llama *diagrama esfuerzo-deformación unitaria reales*. Los diagramas esfuerzo-deformación unitaria reales para materiales dúctiles (como el acero dúctil), coinciden prácticamente ya sea obtenidos en tensión o en compresión, mientras que los dos diagramas esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería se separan entre sí.

[4]Véase J. Martin, *Mechanical Behavior of Engineering Materials,* Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1962.

En la figura 2-7 se ilustran en el mismo cuadrante, diagramas esfuerzo-deformación unitaria en compresión y en tensión de una prueba monotónica de una probeta de acero dúctil graficadas en los sistemas coordenados reales y de ingeniería. Como puede verse, ambos diagramas esfuerzo-deformación unitaria en compresión y en tensión son similares hasta que el efecto del pandeo resulta patente a un nivel de deformación unitaria de aproximadamente 6% en la prueba de compresión. Una comparación de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería y real, muestra que en tensión —ya que el área de la sección transversal disminuye cuando la probeta se alarga— el esfuerzo real es mayor que el esfuerzo de ingeniería, mientras que en compresión, cuando la probeta se acorta, el área de la sección transversal aumenta y entonces el esfuerzo real es menor que el correspondiente esfuerzo de ingeniería.

Es importante reconocer que los diagramas esfuerzo-deformación unitaria calculados experimentalmente difieren ampliamente en cuanto a materiales diferentes. Aun para el mismo material difieren, ya que los resultados de las pruebas dependen de variables, tales como la composición del material, las imperfecciones microscópicas, el tipo de fabricación, la velocidad de carga y la temperatura a la que se efectúa la prueba. Los diagramas esfuerzo-deformación unitaria *de ingeniería* para unos cuantos materiales representativos se ilustran en las figuras 2-8 y 2-9. Éstos se muestran a una mayor escala para la deformación unitaria en la figura 2-9. Como para la mayor parte de las aplicaciones en ingeniería las deformaciones deben estar limitadas, el rango inferior de deformaciones unitarias

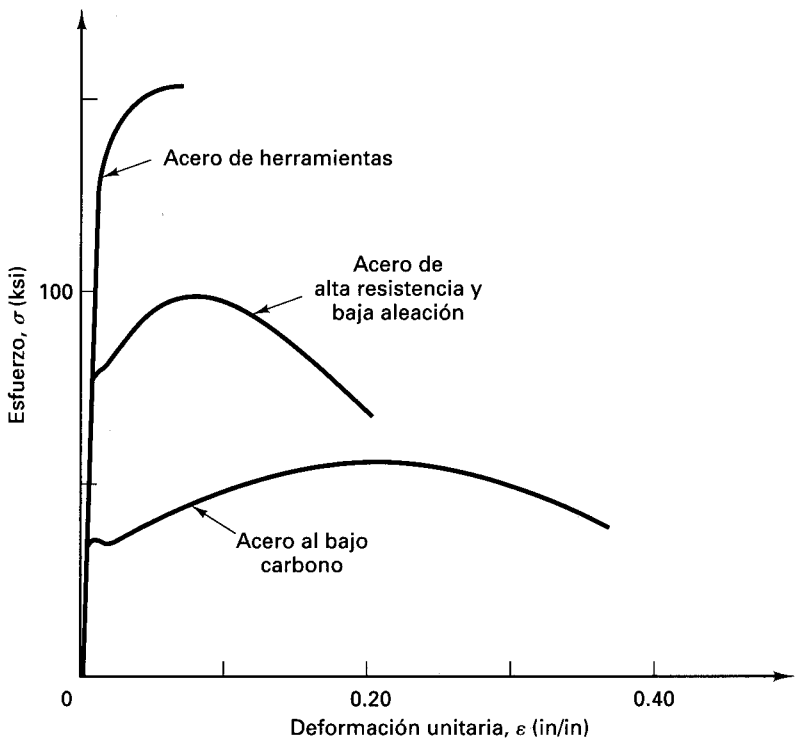


Fig. 2-8 Diagramas típicos de esfuerzo-deformación unitaria en tensión para diferentes aceros.

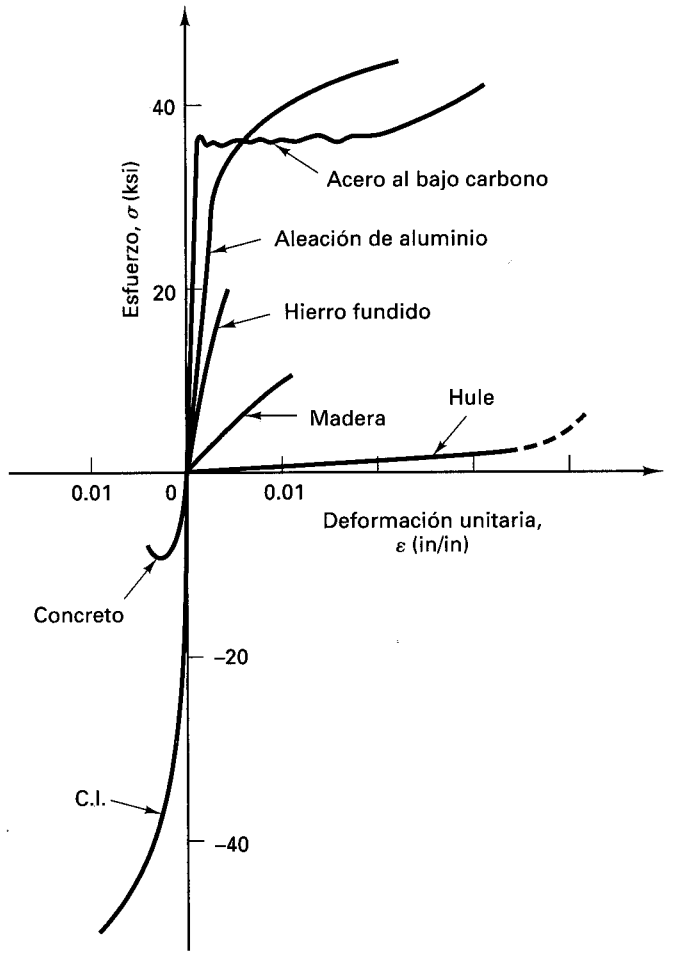


Fig. 2-9 Diagramas típicos esfuerzo-deformación unitaria para diferentes materiales.

es particularmente importante. Las grandes deformaciones de materiales de gran importancia en análisis de operaciones como el forjado, doblado y extracción no se tratarán aquí.

Al calcular el esfuerzo *de ingeniería* usando la ecuación 2-2, el área original de la sección transversal A_0 se designa por lo general con A.

En la figura 2-10 se muestran ejemplos de probetas fracturadas en tensión en pruebas monotónicas de tensión (es decir, donde las cargas fueron aplicadas gradualmente en una dirección). Las probetas de acero y de aluminio exhiben comportamiento dúctil y una fractura ocurre sólo después de una considerable cantidad de deformación. Este comportamiento se ejemplifica claramente en los diagramas respectivos de esfuerzo-deformación unitaria (véase la figura 2-9).

Las fallas del acero y del aluminio ocurren principalmente debido a la deformación unitaria cortante a lo largo de los planos que forman ángulos aproximados de 45° con el eje de la barra (véanse las Secciones 1-7 y 1-8). Una fractura típica de "copa y cono" puede detectarse en las fotografías de

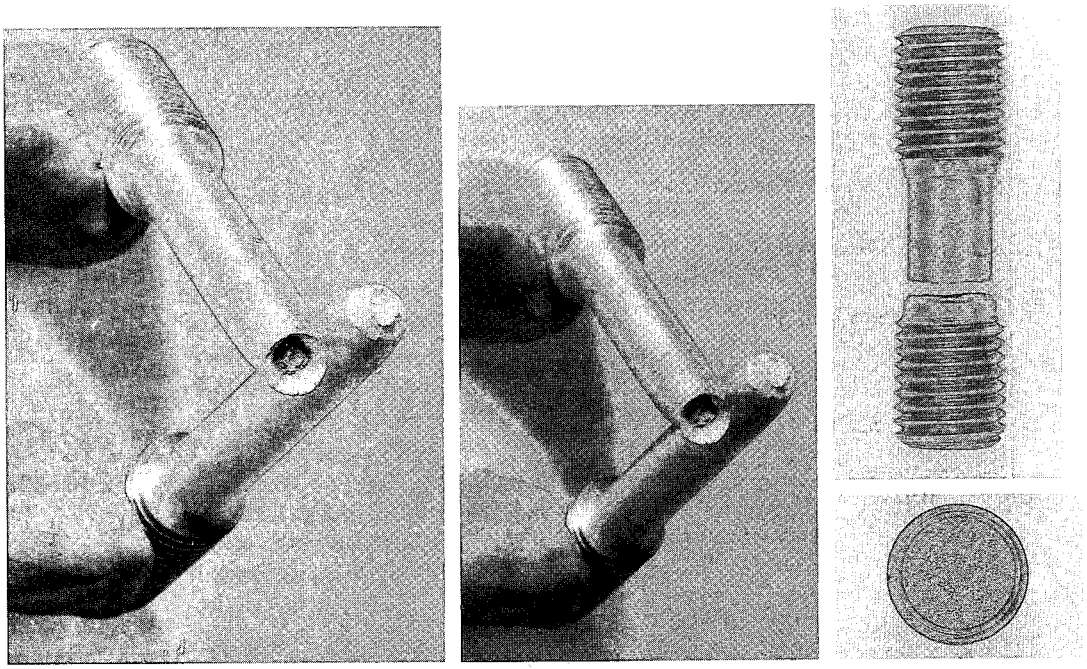


Fig. 2-10 Fracturas dúctiles para (a) probetas de acero A572 y (b) aleación de aluminio 6061-T6. Fractura frágil para (c) hierro fundido. (Los números se refieren a la designación ASTM para el acero y a la de la Aluminum Association para la aleación de aluminio.)

las probetas de acero y de aluminio. En contraste, la falla de una probeta de hierro fundido ocurre por lo general de forma repentina, exhibiendo una fractura a escuadra sobre la sección transversal. Tales fracturas por rajadura o separación son típicas de los materiales frágiles.

2-4. Ley de Hooke

Para un rango limitado, medido desde el origen, los valores experimentales del esfuerzo *versus* deformación unitaria se encuentran esencialmente sobre una línea recta. Esto se cumple casi sin reservas para todo el rango en el vidrio a temperatura ambiente. Se cumple para el acero dulce hasta cierto punto como A en la figura 2-5. Casi se cumple hasta muy cerca del punto de falla para muchos aceros aleados de alto grado. Por otra parte, la parte recta de la curva no existe prácticamente para el concreto, suelos, cobre recocido, aluminio o hierro fundido. No obstante, para todo fin práctico, hasta un cierto punto como A en la figura 2-11, *la relación entre esfuerzo y deformación unitaria puede considerarse lineal para todos los materiales.* Esta vasta idealización y generalización aplicable a todos los materiales se

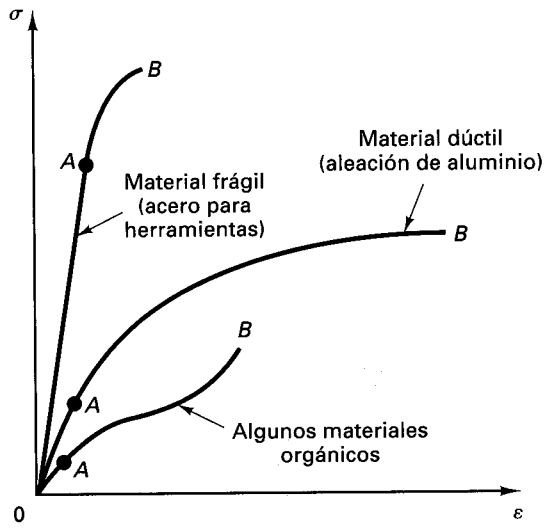


Fig. 2-11 Diagramas esfuerzo-deformación para varios materiales.

conoce como *ley de Hooke*.[5] Simbólicamente, esta ley puede expresarse por la ecuación

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2-8}$$

que simplemente significa que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria, donde la constante de proporcionalidad es E. Esta constante E se llama *módulo elástico*, módulo de elasticidad o módulo de Young.[6] Como ε no tiene dimensiones, en la relación anterior E tiene las unidades del esfuerzo. En el sistema inglés, esta constante se mide usualmente en libras por pulgada cuadrada y en el sistema de unidades SI se mide en newtons por metro cuadrado (o Pa, que significa pascal).

Gráficamente, E se interpreta como la pendiente de una línea recta que va del origen al punto algo vago A sobre un diagrama de esfuerzo-deformación unitaria uniaxial. El esfuerzo correspondiente al último punto se denomina *límite proporcional o límite elástico* del material. Físicamente, el módulo elástico representa la rigidez del material bajo una carga impuesta.

[5]En realidad, Robert Hooke, un científico inglés, trabajó con resortes y no con barras. En 1676 publicó un anagrama "ceiinosssttuv", que en latín es *Ut Tensio sic Vis* (la fuerza varía como el alargamiento).

[6]El módulo de Young se llama así en honor de Thomas Young, el científico inglés. Sus *Lectures on Natural Philosophy*, publicadas en 1807, contienen una definición del módulo de elasticidad.

El valor del módulo elástico es una propiedad específica de un material. Por experimentos se sabe que ϵ es *siempre una cantidad muy pequeña*; por consiguiente, E debe ser muy grande. Sus valores aproximados están tabulados para unos cuantos materiales en las Tablas 1A y B del apéndice. Para todos los aceros, E a temperatura ambiente *varía* entre 29 y 30 $\times$ 10^6 psi o 200 y 207 GPa.

Se infiere del análisis anterior que la *ley de Hooke se aplica sólo hasta el límite proporcional del material.* Esto es muy significativo porque en la mayor parte de los tratamientos subsecuentes, las fórmulas obtenidas se basan en esta ley. Es evidente entonces que tales fórmulas están limitadas al comportamiento del material en el rango inferior de esfuerzos.

Algunos materiales, sobre todo cristales y madera, poseen módulos elásticos diferentes en direcciones diferentes. Tales materiales, que tienen diferentes propiedades físicas en diferentes direcciones, se llaman *anisótropos*. La consideración de tales materiales está excluida en este texto. La vasta mayoría de los materiales usados en la ingeniería, consisten en un gran número de cristales orientados al azar. Debido a esta orientación, las propiedades de los materiales resultan esencialmente iguales en cualquier dirección.[7] Dichos materiales se llaman *isótropos*. Con algunas excepciones, como la madera, en este texto, *se supone generalmente una completa homogeneidad* (igualdad de punto a punto) e *isotropía de los materiales*.

2-5. Observaciones adicionales acerca de las relaciones esfuerzo-deformación unitaria

Además del límite proporcional definido en la Sección 2-4, otros puntos interesantes pueden observarse en los diagramas esfuerzo-deformación unitaria. Por ejemplo, el punto más alto (véase el punto de esfuerzo último C en la figura 2-5) corresponde a la *resistencia última* de un material. El esfuerzo asociado con la meseta de fluencia de la curva esfuerzo-deformación unitaria (véase la figura dentro del óvalo de la figura 2-5) se llama *resistencia a la fluencia* de un material. Como se verá después, esta propiedad extraordinaria del acero dulce, así como de otros materiales dúctiles, es importante en el análisis de esfuerzos. Por ahora, nótese que bajo esfuerzo esencialmente constante, tienen lugar duante la fluencia deformaciones unitarias 15 a 20 veces mayores que las que ocurren en el límite proporcional. En el esfuerzo de fluencia se presenta una gran deformación bajo esfuerzo constante. El fenómeno de la fluencia no ocurre en la mayor parte de los materiales.

Un estudio de los diagramas esfuerzo-deformación unitaria muestra que la resistencia (esfuerzo) de fluencia está tan cercana al límite proporcional que, para la mayor parte de los fines, los dos pueden considerarse uno solo. Sin embargo, es mucho más fácil localizar el primero. En materiales que no poseen una resistencia de fluencia bien definida, se "inventa" una usando el método del desplazamiento. Éste se ilustra en la figura 2-12,

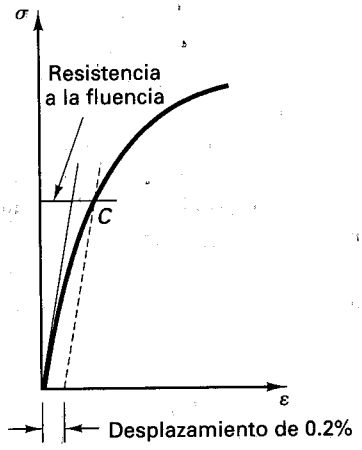


Fig. 2-12 Método del desplazamiento para determinar la resistencia a la fluencia de un material.

[7]Las operaciones de alisado generan una orientación preferente de los granos cristalinos en algunos materiales.

donde una recta desplazada a una distancia arbitraria correspondiente al 0.2% de deformación unitaria se traza paralela a la porción rectilínea del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. El punto C se toma como la resistencia a la fluencia del material con un desplazamiento de 0.2%.

Que un material sea elástico implica usualmente que el esfuerzo es directamente proporcional a la deformación unitaria, como en la ley de Hooke. Dichos materiales se llaman *elásticos lineales* o hookeanos. Un material que responde de manera no lineal y que, sin embargo, al ser descargado regresa a lo largo de la trayectoria de carga a su estado de deformación inicial libre de esfuerzo, es también un material elástico. Tales materiales se llaman *elásticos no lineales*. La diferencia entre los dos tipos de materiales elásticos se ilustra en las figuras 2-13(a) y (b). Si al someter a esfuerzo un material se excede su límite elástico, al descargarlo, el material usualmente responde de manera elástica lineal, como se muestra en la figura 2-13(c), y se desarrolla una deformación permanente bajo carga externa nula. Como se verá en la Sección 3-5, el área encerrada por el lazo corresponde a la energía disipada en forma de calor. Se considera que los materiales ideales no disipan energía bajo carga monotónica o cíclica.

Con los materiales dúctiles, los diagramas esfuerzo-deformación unitaria que se obtienen con miembros cortos a compresión, son razonablemente iguales a los que se obtienen a tensión. Los materiales frágiles, como el hierro colado y el concreto, son muy débiles en tensión pero no en compresión. Para esos materiales, los diagramas difieren considerablemente, dependiendo del sentido de la fuerza aplicada.

En algunos de los análisis subsecuentes es conveniente referirnos a los cuerpos y sistemas elásticos como si fuesen resortes. Los croquis como los que se muestran en las figuras 2-14, a menudo se usan en la práctica para interpretar el comportamiento físico de los sistemas mecánicos.

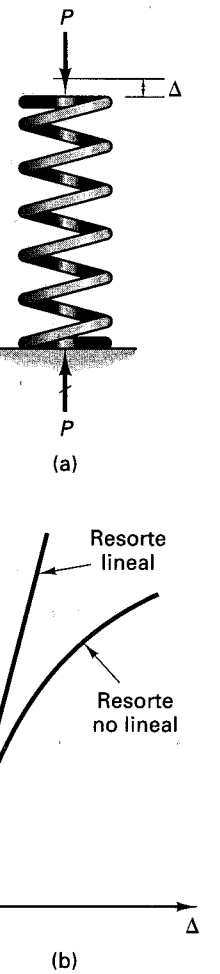


Fig. 2-14 Respuesta esfuerzo-deformación unitaria de un resorte: (a) elástica lineal (Hookeana), (b) elástica no lineal.

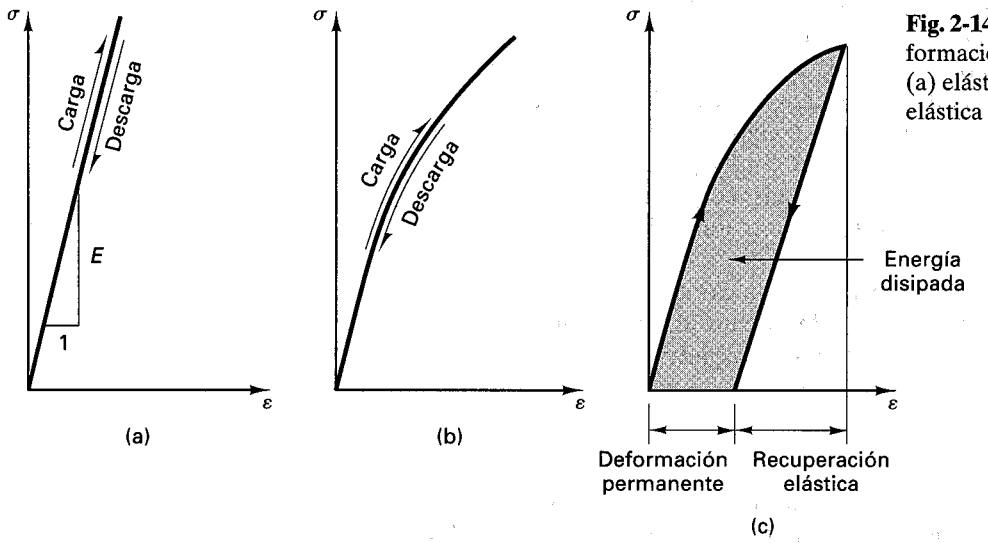


Fig. 2-13 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria: (a) material elástico lineal, (b) material elástico no lineal, (c) material inelástico o plástico.

2-6. Razón de Poisson

Además de la deformación de los materiales en la dirección de la fuerza aplicada, puede observarse otra propiedad extraordinaria en todos los materiales sólidos, es decir, que tiene lugar una cierta cantidad de expansión o contracción lateral (transversal) en ángulos rectos con la fuerza uniaxial aplicada. Este fenómeno se ilustra en la figura 2-15, donde las deformaciones están *sumamente exageradas*. Por claridad, este hecho físico puede reenunciarse de la siguiente manera: Si un cuerpo sólido se somete a una tensión axial, se contrae lateralmente; por otra parte, si el cuerpo es comprimido, el material se "hincha" sobre sus lados. De acuerdo con esto, las direcciones de las deformaciones laterales se determinan fácilmente, dependiendo del sentido de la fuerza aplicada.

Para una teoría general, es preferible referirse a esas deformaciones laterales en términos de deformaciones por *unidad* de longitud de la dimensión transversal. Así entonces, las *deformaciones* laterales *relativas* pueden expresarse en in/in o m/m. Estas deformaciones laterales unitarias relativas se conocen como *deformaciones unitarias laterales*. Por experimentos se sabe que las deformaciones unitarias laterales mantienen una relación *constante* con las deformaciones unitarias axiales o longitudinales causadas por una fuerza axial, siempre que el material permanezca *elástico* y que sea homogéneo e isótropo. Esta constante es una propiedad bien definida de un material, como lo es el módulo de elasticidad E y se llama *razón de Poisson*.[8] Se denotará con la letra griega ν y se define como sigue:

$$\nu = \left| \frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \right| = -\frac{\text{deformación unitaria lateral}}{\text{deformación unitaria axial}} \quad (2\text{-}9)$$

donde las deformaciones unitarias axiales son causadas sólo por esfuezos uniaxiales (es decir, por tensión o compresión simple). La segunda forma alternativa de la ecuación 2-9 es cierta porque las deformaciones unitarias laterales y axiales son siempre de signo opuesto para un esfuerzo uniaxial.

El valor de ν fluctúa para diferentes materiales sobre un rango relativamente estrecho. Por lo general es del orden de 0.25 a 0.35. En casos extremos ocurren valores tan bajos como 0.1 (algunos concretos) y tan altos como 0.5 (hule). El último valor es el *más grande posible*. Se alcanza normalmente en materiales durante un flujo plástico y significa constancia de volumen.[9] En este texto, la razón de Poisson se usará sólo cuando los materiales se comporten elásticamente.

En conclusión, nótese que el efecto Poisson exhibido por los materiales *no genera esfuerzos adicionales* aparte de los considerados antes, *a menos que la deformación transversal esté inhibida o impedida.*

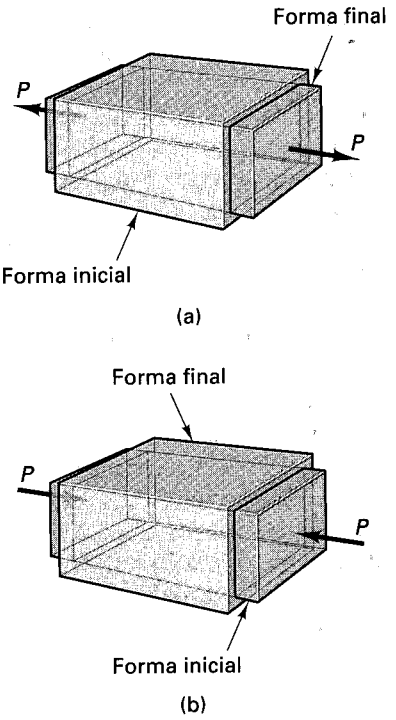


Fig. 2-15 (a) Contracción lateral y (b) expansión lateral de cuerpos sólidos sometidos a fuerzas axiales (efecto Poisson).

Ejemplo 2-1

Considere un experimento realizado cuidadosamente en el que una barra de aluminio de 50 mm de diámetro es sometida a tensión en una máquina

[8]Nombrada así en honor de S. D. Poisson, un científico francés que formuló este concepto en 1828.

[9]A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1, Nueva York: McGraw-Hill, 1950.

de pruebas, como se muestra en la figura 2-16. En cierto instante la fuerza aplicada P es de 100 kN, mientras que el alargamiento medido de la barra es de 0.219 mm en una longitud calibrada de 300 mm y el diámetro disminuye en 0.01215 mm. Calcule la constante ν del material.

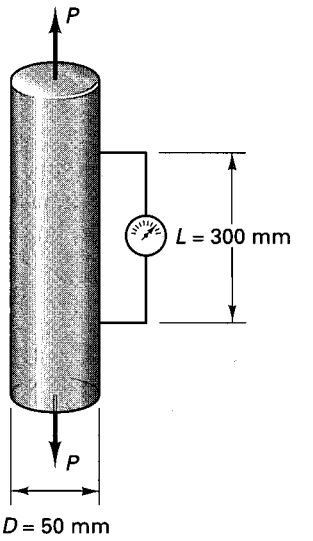


Fig. 2-16

SOLUCIÓN

Deformación unitaria transversal o lateral:

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{D} = -\frac{0.01215}{50} = -0.000243 \text{ mm/mm}$$

En este caso, la deformación unitaria lateral ε_t es negativa, ya que el diámetro de la barra *disminuye* en Δ_t.

Deformación unitaria axial:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta}{L} = +\frac{0.219}{300} = 0.00073 \text{ mm/mm}$$

Razón de Poisson:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} = -\frac{(-0.000243)}{0.00073} = 0.333$$

En la práctica, cuando se lleva a cabo un estudio de cantidades físicas como ν, es mejor trabajar con el correspondiente diagrama esfuerzo-deformación unitaria para estar seguros de que las cantidades determinadas están asociadas con el rango elástico del comportamiento del material.

2-7. Deformación unitaria térmica y deformación

Con los cambios de temperatura, los cuerpos sólidos cambian sus dimensiones. Si la temperatura aumenta, por lo general un cuerpo se dilata, mientras que si la temperatura desciende, un cuerpo sólido se contrae. Ordinariamente, sobre un cambio limitado del rango de temperatura, estas dilatación o contracción están linealmente relacionadas con el aumento o descenso de la temperatura existente. Si el material del cuerpo es homogéneo e isótropo, se ha encontrado que la deformación unitaria térmica ϵ_T causada por un cambio de temperatura ΔT, medido en grados Celsius (°C) o Fahrenheit (°F), puede expresarse como

$$\boxed{\varepsilon_T = \alpha \Delta T} \qquad (2\text{-}10)$$

donde α es una propiedad del material, llamado *coeficiente de expansión térmica lineal.* Las unidades de α miden la deformación unitaria por grado de temperatura. Ellas son 1/°F en el sistema de inglés y 1/°C en el sistema SI. Los valores típicos del parámetro α se dan en las Tablas 1A y 1B del apéndice.

En los materiales homogéneos isótropos no restringidos se desarrollan deformaciones unitarias térmicas iguales en toda dirección. Para una pro-

beta de longitud L_0 sometida a temperatura uniforme, la deformación por extensión Δ_T debida a un cambio ΔT en temperatura es

$$\Delta_T = \alpha \Delta T L_0 \tag{2-11}$$

Para un descenso de temperatura, ΔT toma valores negativos.

En la figura 2-17 se muestran los efectos térmicos sobre la deformación de una probeta cuadrada y de otra cilíndrica debido a un incremento de temperatura.

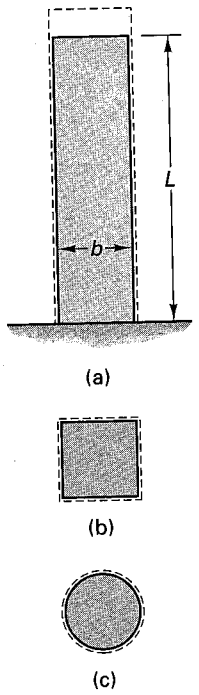


Fig. 2-17 Expansiones térmicas de barras descansando sobre superficies sin fricción.

2-8. Otras idealizaciones de las relaciones constitutivas

En un creciente número de problemas técnicos, los análisis de esfuerzos basados en la hipótesis de un comportamiento elástico lineal son insuficientes. Por esta razón hoy en día se usan varias relaciones esfuerzo-deformación unitaria adicionales o *relaciones constitutivas*. Las tres relaciones idealizadas esfuerzo-deformación unitaria que se muestran en la figura 2-18 se encuentran particularmente con frecuencia. Las dos que se muestran en las figuras 2-18(a) y (b) se usarán en este texto, la mostrada en la figura 2-18(c) es a menudo más realista, pero su uso es considerablemente más complicado y, por lo general, se evita debido a la naturaleza introductoria de este libro.

La relación idealizada $\sigma - \varepsilon$ mostrada en la figura 2-18(a) es aplicable a problemas en que las deformaciones unitarias elásticas pueden ser despreciadas respecto a las plásticas. Esto ocurre si las deformaciones unitarias plásticas (inelásticas) son dominantes. Un comportamiento perfectamente (idealmente) plástico significa que una gran cantidad de deformación ilimitada puede tener lugar bajo un esfuerzo constante. La idealización que se muestra en la figura 2-18(b) es particularmente útil si tienen que in-

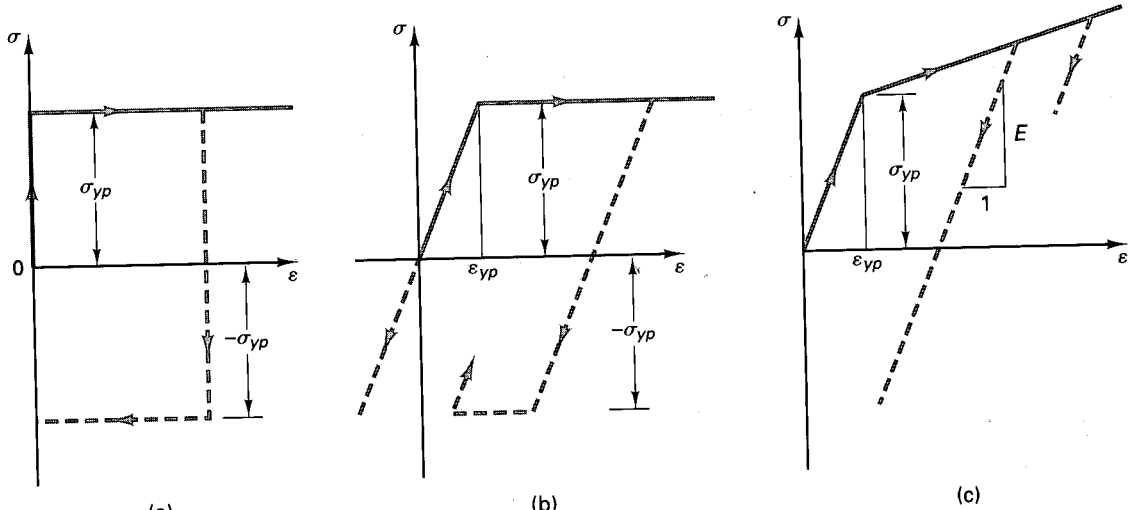


Fig. 2-18 Diagramas idealizados esfuerzo-deformación unitaria: (a) material plástico perfectamente rígido, (b) material plástico perfectamente elástico y (c) material elástico linealmente endurecido.

cluirse tanto las deformaciones elásticas como las plásticas. Esta situación surge con frecuencia en el análisis. Ambas idealizaciones son configuradas según una carga monotónica del acero dúctil (véase la figura 2-5), donde en el esfuerzo de fluencia σ_y se observa una considerable meseta de fluencia en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria. En ambos casos, como las deformaciones son por lo general pequeñas, se supone que las propiedades mecánicas del material son las mismas en tensión y en compresión. Se supone también que durante la descarga, el material se comporta elásticamente. Para el caso que se muestra en la figura 2-18(b), un esfuerzo puede principiar y terminar en cualquier parte entre $+\sigma_y$ y $-\sigma_y$. Para cantidades moderadas de deformación unitaria plástica, esta suposición concuerda bien con las observaciones experimentales.

La idealización $\sigma - \varepsilon$ mostrada en la figura 2-18(c) proporciona una aproximación razonable para muchos materiales y es más exacta que los dos modelos previos sobre un más amplio rango de deformaciones unitarias. Más allá del rango elástico, con un incremento de deformación unitaria, muchos materiales resisten esfuerzos adicionales (es decir, se *endurecen por deformación*), como se ilustra en la figura 2-5 para el acero dulce.

En algunos análisis refinados, la idealización esfuerzo-deformación unitaria que se muestra en la figura 2-18 puede no ser suficientemente exacta. Afortunadamente, con el uso de computadoras es posible modelar mucho mejor el comportamiento real de los materiales. A continuación se da una formulación analítica bien conocida. Como la implementación de esta formulación requiere de una considerable cantidad de programación, este enfoque no se usará en este texto.

Un modelo capaz de representar un amplio rango de curvas esfuerzo-deformación unitaria ha sido desarrollado por Ramberg y Osgood.[10] Este modelo está definido por la siguiente ecuación:

$$\varepsilon \frac{\sigma}{E} + K\left(\frac{\sigma}{E}\right)^n \tag{2-12}$$

donde E, K y n son los parámetros característicos para un material dado. La forma de la curva representada por la ecuación 2-12 está determinada por los parámetros K y n.

En la mayor parte de las aplicaciones es conveniente trabajar con la inversa de la ecuación 2-12 (es decir, expresar el esfuerzo en función de la deformación unitaria). Una simulación exacta de la respuesta cíclica esfuerzo-deformación unitaria de un material puede obtenerse usando la siguiente ecuación:[11]

$$\sigma_s = {}^k\sigma_y \frac{(1-\rho)}{2}\left[1 + \frac{(1+\rho)}{(1-\rho)}\frac{\varepsilon_s - {}^k\varepsilon_r}{{}^k\varepsilon_y} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_s - {}^k\varepsilon_r}{{}^k\varepsilon_y} - 1\right)^2 + {}^k\delta}\right]$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n) \tag{2-13}$$

[10]W. Ramberg y W. R. Osgood, "Description of stress-strain curves by three parameters", *NACA Rep. TN-902,* Washington, DC: National Advisory Committee on Aeronautics, 1943.

[11]T. A. Balan, F. C. Filippou y E. P. Popov, "Hysteretic model of ordinary and high strength reinforcing steel", *J. Eng. Struct.*, ASCE, núm. 3, marzo de 1998, vol. 124.

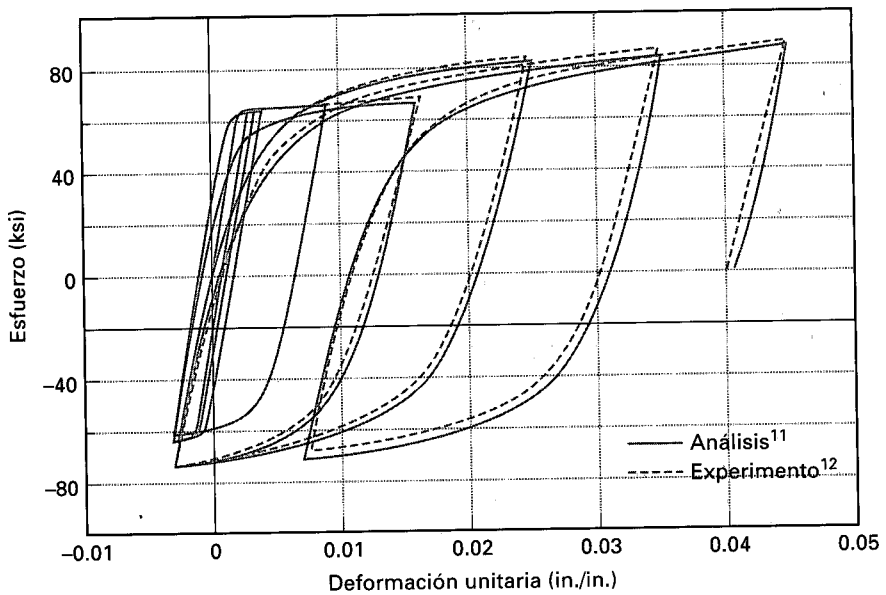


Fig. 2-19 Simulación por computadora de un diagrama cíclico de esfuerzo-deformación unitaria para acero de refuerzo.

donde E_h es el módulo de endurecimiento por deformación; E_s es el módulo de material; $\rho = E_h/E_s$ es la razón de endurecimiento del material; ${}^k\sigma_y$ y ${}^k\varepsilon_y$ son el esfuerzo y deformación unitaria de fluencia momentáneos, respectivamente, después de la k-ésima inversión; σ_s y ε_s son el esfuerzo y deformación unitaria momentáneos, respectivamente; ${}^k\varepsilon_r$ es la deformación unitaria momentánea en el punto k-ésimo de inversión y ${}^k\delta$ es el parámetro de degradación de la resistencia después de la k-ésima inversión.

La simulación por computadora del diagrama esfuerzo-deformación unitaria cíclico para la probeta de acero de refuerzo[12] que se muestra en la figura 2-19 concuerda correctamente con los resultados experimentales. En este diagrama, una serie de lazos característicos, llamados *lazos histeréticos*, están asociados con la energía disipada (véase la Sección 3-5).

Bajo carga rápida o de impacto, dos parámetros adicionales del material tienen importancia: la *resiliencia* y la *tenacidad*. La resiliencia define la capacidad del material de absorber energía sin sufrir deformaciones unitarias plásticas. El área en la región elástica bajo un diagrama esfuerzo-deformación unitaria, como se mostrará en la Sección 3-5, representa la densidad de la energía que puede ser absorbida sin ningún daño permanente en el material. Esta área se llama *módulo de resiliencia* U_R y es equivalente al área triangular sombreada en la figura 2-20(a).

La tenacidad define la capacidad del material para absorber energía antes de fracturarse. Puede demostrarse (véase la Sección 3-5) que el área bajo el diagrama esfuerzo-deformación unitaria representa la densidad de

[12]S-Y. M. Ma, V. V. Bertero y E. P. Popov, "Experimental and analytical studies on the hysteretic behavior of reinforced concrete rectangular and T-beams", *EERC Rep. 76-02*, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, CA, 1976.

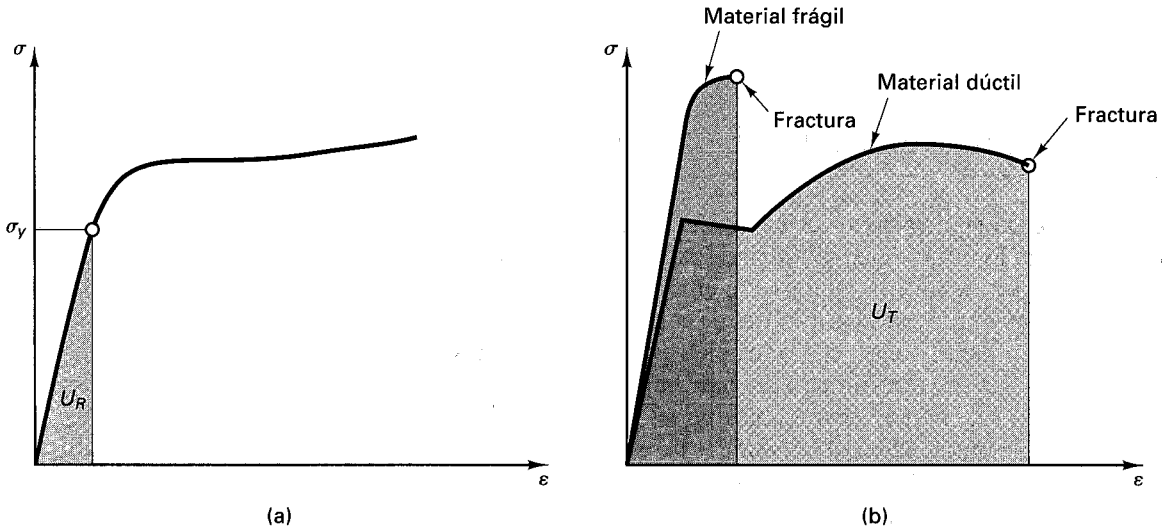


Fig. 2-20 (a) Módulo de resiliencia U_R, (b) módulo de tenacidad U_T.

la energía de deformación unitaria absorbida por el material antes de fracturarse. El área bajo el diagrama monotónico esfuerzo-deformación unitaria completo se llama *módulo de tenacidad* U_T. La figura 2-20(b) ilustra el módulo de tenacidad para materiales frágiles y dúctiles. La figura muestra que un material frágil, aun de gran resistencia última, absorbe por lo general mucho menos energía de una carga de impacto que un material dúctil.

Otro aspecto del comportamiento del material puede ocurrir cuando un miembro estructural está sometido a una carga que debe mantenerse durante largos periodos. Bajo tal carga a ciertas temperaturas, un material puede exhibir una propiedad llamada *flujo plástico*. El flujo plástico se define como una deformación permanente en el material dependiendo del tiempo en que el esfuerzo se mantiene en un valor constante. De esto pueden resultar grandes deformaciones unitarias plásticas y finalmente la ruptura. El tiempo para la ruptura por flujo plástico varía entre horas y años para diferentes materiales, dependiendo del nivel del esfuerzo y de la temperatura. Sin embargo, para algunos materiales, como polímeros y compuestos, incluidos la madera y el concreto, la temperatura no es un factor importante, y el flujo plástico puede ocurrir estrictamente de una aplicación a largo plazo de la carga.

Para fines prácticos, cuando el flujo plástico resulta importante, un material debe diseñarse para resistir una deformación específica por flujo plástico durante un periodo dado. En este caso, una propiedad mecánica importante que se aplica en el diseño de miembros sometidos a flujo plástico es la *resistencia por flujo plástico* del material. Este parámetro representa el esfuerzo inicial más alto que puede resistir el material durante un tiempo específico, sin causar una deformación unitaria por flujo plástico.

Además del efecto del flujo plástico puede ocurrir otro fenómeno importante dependiente del tiempo. El preesfuerzo en tornillos de partes mecánicas que operan a alta temperatura así como el empleado en tendones de acero de concreto reforzado tiende a disminuir gradualmente con el tiempo. Este fenómeno se llama *relajación del esfuerzo*. En la sección si-

guiente se considerarán algunos aspectos analíticos básicos del flujo plástico y de la relajación del esfuerzo.

2-9. Materiales linealmente viscoelásticos

En el análisis anterior de las relaciones esfuerzo-deformación unitaria, se supuso tácitamente que los materiales son inviscidos (es decir, no exhiben fenómenos de flujo dependiente del tiempo). Sin embargo, los pavimentos de asfalto, los combustibles sólidos de los motores de cohetes, los plásticos de polímeros múltiples y el concreto, así como los elementos de máquinas a temperaturas elevadas, se deforman gradualmente bajo esfuerzo, y tales deformaciones no son usualmente recuperables en su totalidad. En esta sección se consideran algunas nociones elementales de este problema para el estado uniaxial de esfuerzo. Una investigación más completa es el tema de la reología.[13]

Para materiales elásticos se dice que el esfuerzo es una función sólo de la deformación unitaria. Por otra parte, para materiales viscosos el esfuerzo depende no sólo de la deformación unitaria, sino también de la velocidad con que se aplica la deformación. Esto puede aclararse examinando los modelos conceptuales en la figura 2-21. Para el resorte linealmente elástico el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria. Para un elemento con un líquido viscoso en el amortiguador, cuanto mayor es la velocidad de la deformación, mayor es el esfuerzo necesario para mantener el movimiento de la fuerza aplicada. Por brevedad, la velocidad de la deformación (o sea la derivada de la deformación unitaria con respecto al tiempo) será designada por una ε con un punto sobre ella.

En los términos precedentes, para un material elástico $\sigma = \sigma(\varepsilon)$; pero para un material viscoelástico, como el esfuerzo es una función de la deformación unitaria y de la velocidad de ésta, $\sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$. La relación más simple entre esas cantidades puede expresarse como

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \tag{2-14}$$

donde la constante η es el coeficiente de viscosidad. El último término relaciona linealmente el esfuerzo con la velocidad de la deformación unitaria, como se muestra en la figura 2-21(b). Si este término es cero, se obtiene una ley de Hooke ordinaria. El comportamiento del material descrito por la ecuación 2-14 está asociado con los nombres de Voigt y Kelvin,[14] quienes primero lo usaron en el análisis de materiales viscoelásticos. Por esta razón el material idealizado de la ecuación 2-14 se denomina *sólido Voigt-Kelvin*.

Aunque ciertamente no es fundamental, conviene introducir un modelo conceptual para aclarar el significado de la ecuación 2-14. Tal modelo se obtiene colocando un resorte y un amortiguador en paralelo como en la figura 2-21(c). Al aplicar el esfuerzo σ, la misma deformación unitaria se induce en el resorte y en el amortiguador; es decir, $\varepsilon_d = \varepsilon_s = \varepsilon$, donde los

[13]Véase, por ejemplo, F. R. Eirich, editor, *Rheology,* Nueva York: Academic Press, Inc., 1956.

[14]W. Voigt (1850-1919), físico teórico que enseñó en la Universidad de Göttingen, Alemania. Lord Kelvin (William Thomson) (1824-1907) fue un físico británico.

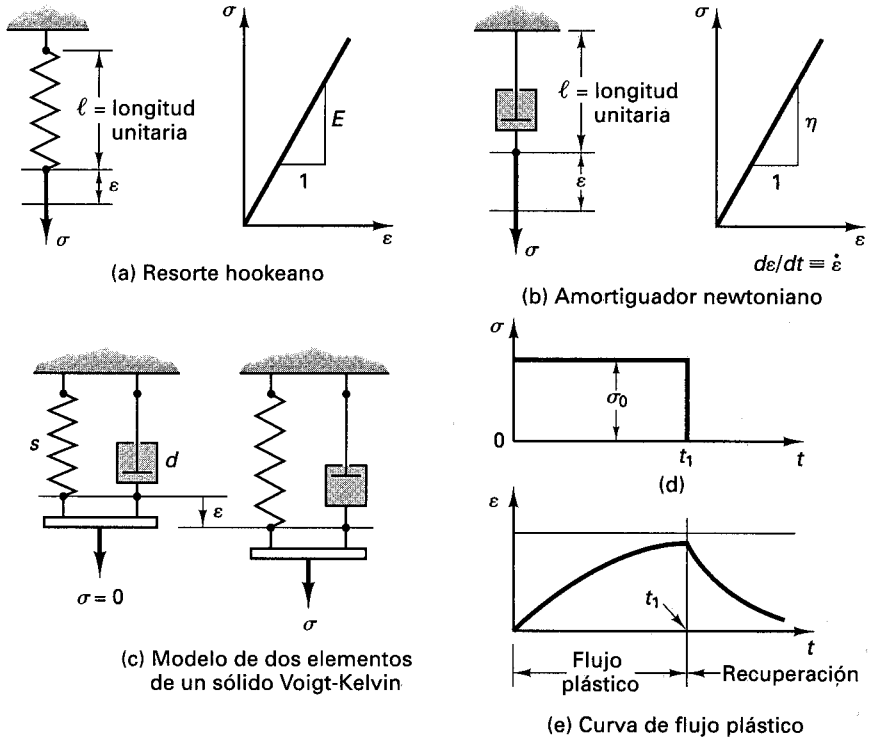


Fig. 2-21 Modelos de respuestas de materiales.

subíndices designan el amortiguador (d) y el resorte (s), respectivamente. El esfuerzo total (fuerza) σ es la suma del esfuerzo σ_d y σ_s (es decir, $\sigma = \sigma_d + \sigma_s$). Aplicando la ley de Hooke y una relación lineal de velocidad esfuerzo-deformación unitaria para el líquido newtoniano, se obtiene la ecuación 2-14, que puede escribirse como

$$\dot{\varepsilon} + (E/\eta)\varepsilon = \sigma/\eta \tag{2-15}$$

Ejemplo 2-2

Determine el flujo plástico de un sólido Voigt-Kelvin sometido a un esfuerzo constante σ_0. Inicialmente el modelo no está deformado.

SOLUCIÓN

Al observar que el esfuerzo $\sigma = \sigma_0$ es constante, puede mostrarse que las soluciones homogénea y particular de la ecuación 2-15 dan

$$\varepsilon = Ae^{-(E/\eta)t} + \sigma_0/E$$

donde A es una constante que puede encontrarse de la condición de que $\varepsilon(0) = 0 = A + \sigma_0/E$ (es decir, $A = -\sigma_0/E$). Por lo tanto,

$$\varepsilon = (1 - e^{-(E/\eta)t})(\sigma_0/E)$$

Conforme pasa el tiempo, la deformación unitaria se acerca asintóticamente a la deformación unitaria máxima asociada con el resorte elástico hasta que finalmente todo el esfuerzo aplicado es tomado por el resorte y el amortiguador deja de estar activo. Si el esfuerzo se retira cierto tiempo antes, como en la figura 2-21(d), tiene lugar una recuperación asintótica de la deformación unitaria [Figura 2-21(e)].

La solución anterior muestra que el material Voigt-Kelvin exhibe una respuesta elástica demorada; por esta razón se denomina material *anelástico*. Su comportamiento se parece al de una esponja elástica llena con un fluido viscoso en la que finalmente toda la carga aplicada es tomada por el núcleo elástico. Con base en evidencia experimental, se sabe que tal comportamiento no es típico de la mayoría de los materiales. Puede formularse otra combinación lineal del esfuerzo, velocidad del esfuerzo y velocidad de la deformación que es más representativa.

Asignándole al cuerpo una respuesta elástica instantánea, junto con un desplazamiento dependiente del tiempo, puede obtenerse una aproximación razonable del comportamiento de muchos materiales viscoelásticos. El modelo más simple con tales propiedades puede visualizarse como una combinación en serie de un resorte lineal y un amortiguador lineal, como se muestra en la figura 2-22. Un material de este tipo se llama *sólido Max-*

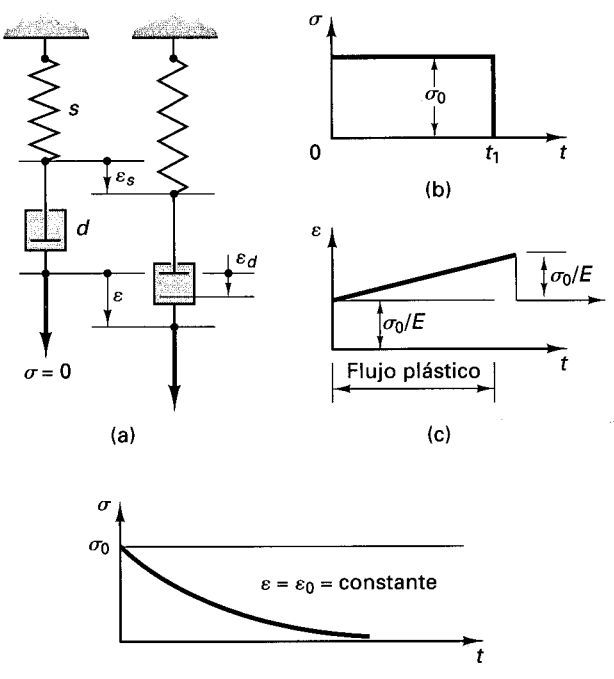


Fig. 2-22 Modelo de dos elementos de un sólido de Maxwell.

well.[15] En el modelo en la figura 2-22(a), si se aplica un esfuerzo σ, el esfuerzo (fuerza) a través del amortiguador (d) es el mismo que a través del resorte (s) (es decir, $\sigma_d = \sigma_s = \sigma$). Sin embargo, como cada elemento del modelo contribuye a la deformación unitaria total, $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$, donde los subíndices, igual que antes, designan el resorte (s) y el amortiguador (d), respectivamente. La relación para la deformación unitaria debe diferenciarse con respecto al tiempo, ya que para los materiales viscosos sólo se conoce la conexión entre la velocidad del esfuerzo y la velocidad de la deformación unitaria. Por otra parte, para materiales elásticos con E constante, al diferenciar la ley de Hooke con respecto al tiempo, se tiene $\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E$. Luego, al sumar las velocidades de la deformación unitaria para los dos elementos y simplificar, se obtiene la ecuación diferencial básica para la respuesta del sólido Maxwell:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d = \dot{\sigma}/E + \sigma/\eta \quad \text{o} \quad \dot{\sigma} + (E/\eta)\sigma = E\dot{\varepsilon} \qquad (2\text{-}16)$$

Para el sólido Maxwell en cortante puro es aplicable una expresión análoga:

$$\dot{\gamma} = \dot{\tau}/G + \tau/\overline{\eta} \qquad (2\text{-}17)$$

donde, como antes, los puntos sobre las cantidades representan sus derivadas con respecto al tiempo y $\overline{\eta}$ es el coeficiente de viscosidad en cortante.

Ejemplo 2-3

Un sólido Maxwell está sometido a una carga escalón como se muestra en la figura 2-22(b) (es decir, un esfuerzo constante σ_0 actúa durante un intervalo de tiempo $0 (< t < t_1)$. Determine la respuesta de la deformación unitaria.

SOLUCIÓN

En este caso el esfuerzo aplicado σ no cambia con el tiempo; por consiguiente $\dot{\sigma}=0$. En el tiempo $t = 0$ ocurre una deformación unitaria instantánea elástica $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$, que es la constante inicial de integración. Al liberar el esfuerzo, esta deformación unitaria se recupera completamente. Con base en esto y usando la ecuación 2-16,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad \text{o} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta}t + C_1 \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t$$

Esta relación se aplica en el intervalo $0 < t < t_1$. Cuando $t = t_1$ una deformación unitaria de σ_0/E se recupera y $(\sigma_0/\eta)t_1$ es la *deformación permanente* o *residual*. Esos resultados están indicados en la figura 2-22(c). La solución ejemplifica un problema de flujo plástico elemental.

[15]James Clerk Maxwell (1831-1879), renombrado físico británico; hizo importantes contribuciones a la mecánica de sólidos.

Ejemplo 2-4

Si un sólido Maxwell es deformado inicialmente una cantidad ε_0 causando un esfuerzo inicial σ_0 y se mantiene la deformación unitaria ε_0, ¿cómo varía el esfuerzo con el tiempo?

SOLUCIÓN

Aquí la velocidad de deformación unitaria es $\dot{\varepsilon} = 0$ ya que no es permitido ningún cambio en la deformación unitaria. Este hecho simplifica la ecuación 2-16. Para calcular la constante de integración, se ve que en $t = 0$ el esfuerzo es σ_0. Por lo tanto, la ecuación diferencial gobernante es

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E}{\eta}\sigma = 0$$

Resolviendo esta ecuación con una constante de integración A,

$$\sigma = Ae^{-(E/\eta)t}, \qquad \text{y, como} \qquad \sigma(0) = \sigma_0, \qquad \sigma = \sigma_0 e^{-(E/\eta)t}$$

Este resultado está graficado en la figura 2-22(d). Es interesante notar cómo con el tiempo el esfuerzo disminuye gradualmente, tendiendo asintóticamente hacia cero. Esta situación es característica de un perno esforzado inicialmente a alta temperatura que aprieta rígidamente las bridas de una máquina o de un tendón en una viga de concreto preesforzado. Cuando el material fluye plásticamente tiene lugar un relajamiento del esfuerzo. Por esta razón un material Maxwell se llama a veces *material relajante*. Este problema es de gran importancia práctica en muchas aplicaciones.

Los procedimientos anteriores pueden generalizarse a muchos más materiales. Una combinación en serie de los modelos Maxwell y Voigt-Kelvin establece el modelo básico (Sólido Estándar) para estudiar materiales viscoelásticos lineales. Otras combinaciones de resortes y amortiguadores con diferentes constantes se han usado efectivamente para representar polímeros, fibras, concreto, etc. La extensión a problemas tridimensionales también se ha llevado a cabo con éxito.[16] La extensión de la teoría a materiales viscoelásticos no lineales se está investigando activamente.

Desde un punto de vista fenomenológico, para materiales reales las curvas de relajación y flujo plástico deben considerarse como propiedades fundamentales de un material dado y deben determinarse experimentalmente. En un experimento de relajación, se mantiene una deformación unitaria constante ε_0 y se determina el esfuerzo correspondiente $\sigma(t)$. Dividiendo $\sigma(t)$ entre ε_0 se obtiene el *módulo de relajación* $E(t)$. En la figura 2-23(a) se muestra una curva cualitativa para tal experimento. Si los datos de varios experimentos de relajación realizados bajo diferentes deformaciones unitarias constantes ε_0 dan el mismo módulo $E(t)$ de relajación, el material es *linealmente viscoelástico.*

En un experimento de flujo plástico se mantiene un esfuerzo constante σ_0 y se obtiene la correspondiente deformación unitaria $\varepsilon(t)$. Dividiendo $\epsilon(t)$

[16]D. R. Bland, *The Theory of Lineal Viscoelasticity,* Long Island City, NY: Pergamon Press, Inc., 1960, pág. 19.

entre σ_0, se encuentra la *deformabilidad al flujo plástico* $J_c(t)$. En la figura 2-23(b) se muestra una función típica $J_c(t)$. Nuevamente, si coinciden las curvas de deformabilidad al flujo plástico para varios experimentos llevados a cabo bajo diferentes niveles de esfuerzo, el material viscoelástico es lineal. Dicho de otra manera, para materiales lineales viscoelásticos bajo cualquier esfuerzo constante σ_0 o deformación unitaria constante ε_0, se tiene

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J_c(t) \qquad \text{y} \qquad \sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) \tag{2-18}$$

Al aplicar las ecuaciones anteriores, es importante notar el principio de superposición de Boltzmann,[17] que es válido para varios materiales. Este principio afirma que la deformación unitaria en un tiempo dado es la suma de las deformaciones unitarias causadas por las cargas aplicadas independientemente en sus respectivas duraciones de tiempo. Por ejemplo, si como se muestra en la figura 2-23(c), un esfuerzo σ_0 es aplicado en $t = 0$, la deformación unitaria en cualquier tiempo $t > 0$ es $\sigma_0 J_c(t)$. Entonces, si en el tiempo t_1 otro esfuerzo σ_1 es agregado, para $t > t_1$ la deformación unitaria adicional es $\sigma_1 J_c(t - t_1)$. Para la segunda aplicación de carga se aplica la misma función de deformabilidad al flujo plástico, pero su origen se mueve a t_1. En general,

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J_c(t) + \sigma_1 J_c(t - t_1) + \sigma_2 J_c(t - t_2) + \cdots \tag{2-19}$$

El principio de Boltzmann también se puede usar si se aplica una sucesión de deformaciones unitarias a un material. Para tal caso, la relación análoga a la ecuación 2-19 es[18]

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t) + \varepsilon_1 E(t - t_1) + \varepsilon_2 E(t - t_2) + \cdots \tag{2-20}$$

Relaciones análogas a las ecuaciones 2-19 y 2-10 pueden escribirse para materiales viscoelásticos lineales en cortante puro.

Las constantes del material para flujo plástico y relajación son fuertemente afectadas por la temperatura. Respecto a esto, es conveniente examinar los diagramas esfuerzo-deformación unitaria[19] determinados experimentalmente para el aluminio en la figura 2-24. (Los números en paréntesis se refieren a las velocidades de la deformación unitaria medidas en pulgadas por pulgada por segundo.) Ahí pueden verse claramente los pronunciados efectos de la velocidad de la deformación unitaria y de la temperatura sobre el comportamiento mecánico de este material.

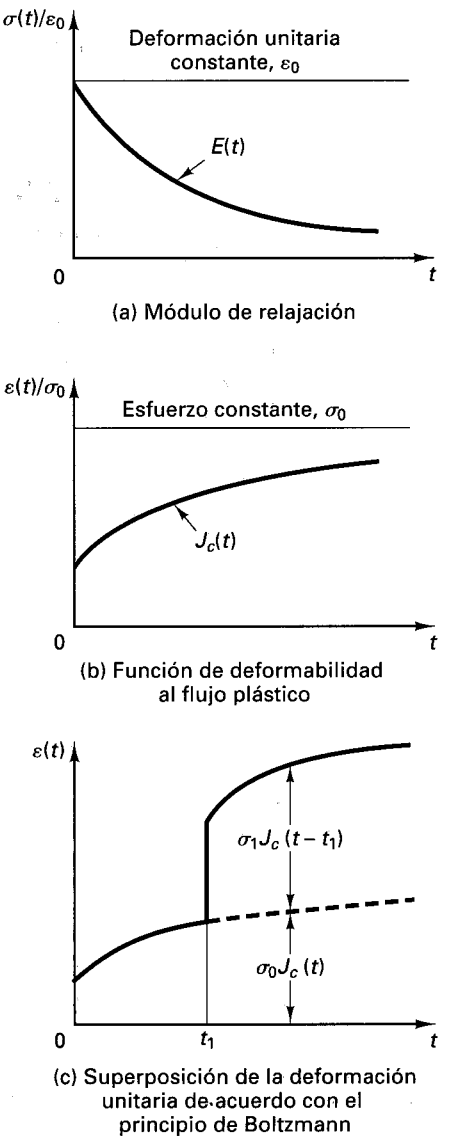


Fig. 2-23 Comportamiento típico de materiales viscoelásticos.

[17]L. Boltzmann (1844-1906) fue un distinguido físico conocido por sus investigaciones sobre la teoría cinética de los gases, mecánica cuántica y mecánica estadística. Enseñó en Graz y Viena, Austria, y en Leipzig y Munich, Alemania.

[18]Si ocurre un cambio continuo en $\epsilon(t)$, la ecuación 2-20 puede escribirse en forma de una integral de Duhamel como

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} E(t - t') \frac{d\varepsilon}{dt'} dt'$$

Una expresión análoga es aplicable también a $\varepsilon(t)$:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J_c(t - t') \frac{d\sigma}{dt'} dt'$$

[19]K. G. Hoge, "Influence of strain rate on mechanical properties of 6061-T6 aluminum under uniaxial and biaxial states of stress", *Experimental Mechanics*, 6, núm. 10, Abril de 1966, pág. 204.

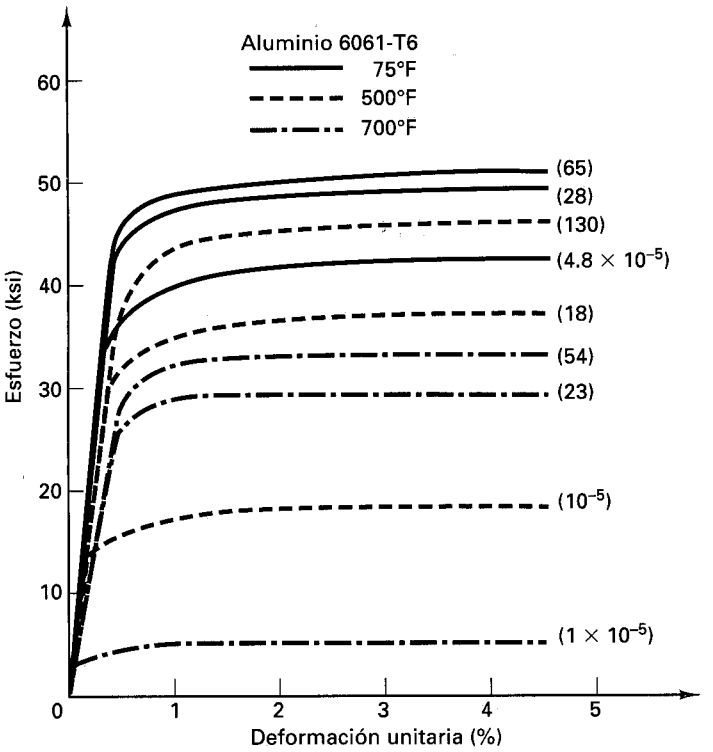


Fig. 2-24 Efecto de la velocidad de la deformación unitaria y la temperatura sobre las curvas esfuerzo-deformación unitaria para el aluminio 6061-T6. ($\dot{\varepsilon}$ están en in./in. por segundo)

Las conclusiones para los materiales viscoelásticos basados en pruebas de corta duración a una cierta temperatura pueden ser muy engañosas.

2-10. Carga cíclica: Fatiga

En las secciones previas, los diagramas esfuerzo-deformación unitaria han implicado cargas crecientes o decrecientes monotónicamente. Sin embargo, la vasta mayoría de elementos estructurales y mecánicos está sometida a carga repetida durante muchos ciclos, llamada *carga cíclica*. Los ejemplos de miembros y/o estructuras sometidas a carga cíclica son numerosos: edificios y puentes sometidos a fuerzas sísmicas y de viento, aeronaves, buques, álabes de turbinas de vapor o de gas, plataformas fuera de la costa y muchos otros.

Como lo muestran los estudios experimentales,[20] las cargas que no causan fracturas en una sola aplicación pueden conducir a fracturas al ser aplicadas repetidamente. El fenómeno de la fractura bajo carga cíclica se

[20]Por ejemplo, véase J. A. Collins, *Failure of Materials in Mechanical Design*, Nueva York: John Wiley & Sons, 1981.

denomina *fatiga*. Durante la carga cíclica, la fractura del material puede ocurrir después de unos cuantos ciclos (*fatiga de bajo ciclaje*) o después de millones de ciclos (*fatiga de alto ciclaje*).

Los mecanismos de falla por fatiga son complejos y fuera del alcance de este texto. Sin embargo, desde un punto de vista ingenieril, esta falla se origina aparentemente del hecho de que hay regiones, usualmente sobre la superficie de un miembro, donde el esfuerzo (o deformación) es mucho mayor que el esfuerzo promedio (o deformación) que actúa sobre la sección transversal. Cuando este esfuerzo (o deformación) mayor se vuelve cíclico, esto conduce a la iniciación de *grietas por fatiga*. Una vez que se inicia una grieta por fatiga, los ciclos adicionales de carga ocasionan la propagación de esa grieta en el material, hasta que el área de la sección transversal del miembro se reduce a un cierto tamaño crítico con el que la carga no puede ser ya soportada. Como resultado se presenta una fractura repentina.

El número de ciclos requeridos para iniciar una grieta por fatiga se llama *vida por iniciación de fatiga*. El crecimiento de la grieta por fatiga desde el inicio de ésta hasta la falla se llama *vida por propagación de fatiga*. La *vida total por fatiga* se define como la suma de las dos vidas. Para un miembro dado, la vida total por fatiga está fuertemente influida por la calidad del acabado de la superficie, los posibles esfuerzos residuales dentro del miembro, la presencia de imperfecciones de fabricación como grietas y defectos, la presencia de concentraciones de esfuerzos, la naturaleza química del medio ambiente y por el material mismo. Por ejemplo, una grieta preexistente en un miembro, como una grieta de soldadura, reduce la vida por iniciación de fatiga prácticamente a cero y como resultado la vida total por fatiga es igual a la vida por propagación.

Las propiedades mecánicas de los materiales bajo carga cíclica se determinan probando pequeñas probetas del material. Por lo general son simples barras, vigas, etc. similares a las empleadas en pruebas de tensión (véase la figura 2-1). Esas pruebas se llaman *pruebas por fatiga* y se llevan a cabo para obtener información sobre la vida de iniciación y la vida total por fatiga. Los dos tipos más comunes de carga cíclica usados en pruebas por fatiga son la *carga de amplitud constante* y la *carga de amplitud variable.*

Ciclos de amplitud constante En la *carga cíclica de amplitud constante*, el rango del esfuerzo $\Delta\sigma = \sigma_{máx} - \sigma_{mín}$ es constante durante todo el comportamiento de la carga, como se muestra en la figura 2-25. Durante el proceso de carga el esfuerzo aplicado varía de $\sigma_{máx}$ a $\sigma_{mín}$ y la amplitud del esfuerzo $\sigma_{amp} = (\sigma_{máx} - \sigma_{mín})/2$ permanece constante.

Las pruebas por fatiga de amplitud constante se llevan a cabo en una serie de probetas maquinadas idénticas. Cada una se somete a un rango específico de esfuerzos con amplitud constante y se cicla hasta que se inicia una grieta por fatiga. Los resultados de la prueba se dibujan sobre una gráfica que representa la amplitud S del esfuerzo (o $\Delta\sigma$) como ordenada y el número de ciclos N a la falla como abscisa. Esta gráfica se llama *diagrama de vida por esfuerzo de fatiga* o *diagrama S-N* y suele graficarse sobre una escala semilogarítmica.

En la figura 2-26 se muestran ejemplos de diagramas *S-N* para dos metales usados en la ingeniería (acero estructural y aluminio). Para el material

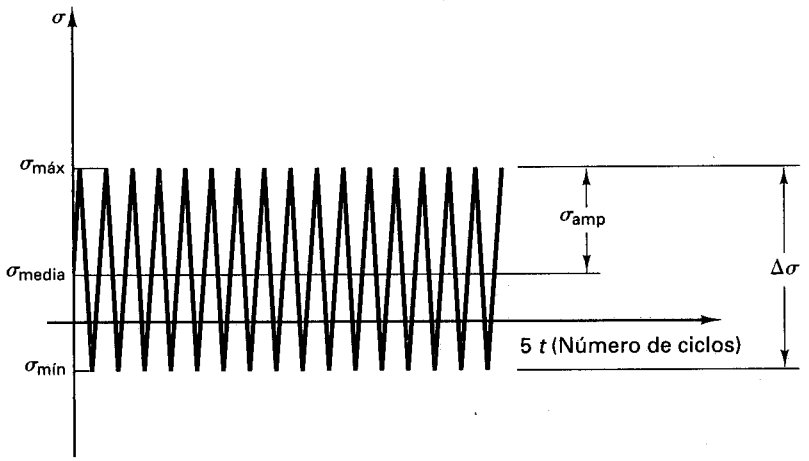


Fig. 2-25 Carga cíclica de amplitud constante.

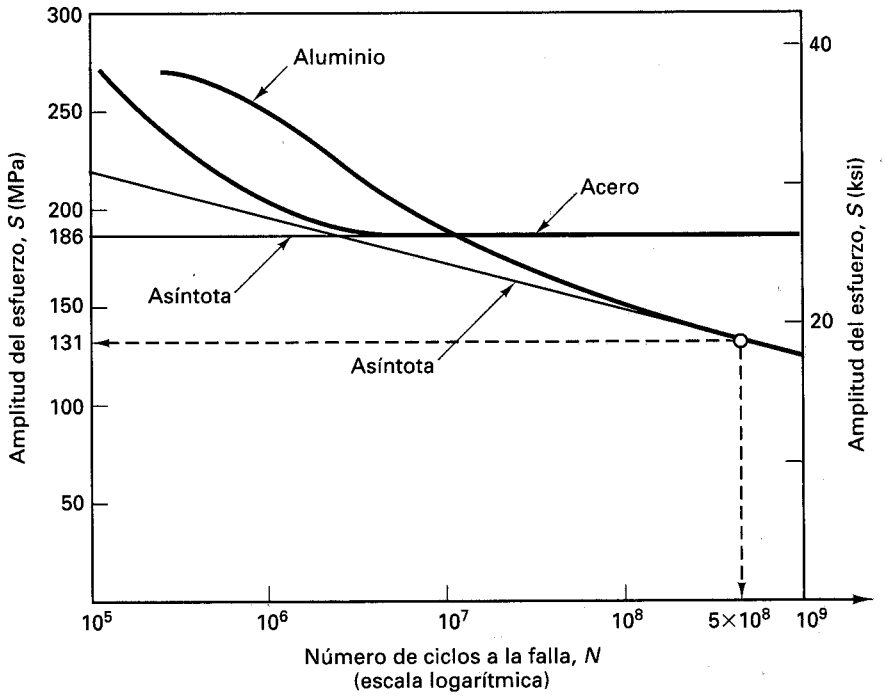


Fig. 2-26 Diagramas *S-N* para acero estructural y una aleación de aluminio (según Collins, *Failure of Materials*).

particular probado, esos diagramas pueden usarse para estimar la vida por fatiga para el rango especificado de esfuerzos. Puede verse que para valores grandes de N, los diagramas S-N resultan asintóticos. Un punto sobre el diagrama S-N, correspondiente al esfuerzo sobre una asíntota, determina la *resistencia por fatiga* o el *límite de resistencia* S_{el} del material. Más generalmente, el límite de resistencia se define como el rango máximo del esfuerzo que puede aplicarse repetidamente para una vida infinita sin que el material se fracture. Como puede verse en la figura 2-26, el acero estructural particular probado tiene un valor de $S_{el} = 186$ MPa, mientras que para el aluminio particular probado puede especificarse un $S_{el} = 131$ MPa para una vida de 500 millones de ciclos. En la literatura técnica pueden encontrarse valores típicos del límite de resistencia para varios materiales de la ingeniería.

Es importante notar que la fatiga de alto ciclaje con amplitud constante ocurre comúnmente en partes de máquinas sometidas a cargas alternantes de largo plazo. Sin embargo, aun para otros tipos de miembros, la carga de amplitud constante es el tipo más común estudiado experimentalmente.

Ciclos de amplitud variable: Daño acumulado En muchas estructuras, las cargas de fatiga no son de amplitud constante sino de amplitud variable o aleatoria, como se muestra en la figura 2-27(a). Ejemplos de este tipo de fatiga son numerosos: tránsito de camiones sobre puentes, carga de viento en aviones y cargas del oleaje sobre barcos. Tales *cargas cíclicas de amplitud variable* o *aleatoria* hacen inaplicable el uso directo de los diagramas convencionales S-N ya que dichos diagramas se desarrollan en pruebas de esfuerzos de amplitud constante.

Para analizar el comportamiento por fatiga de un miembro sometido a carga cíclica de amplitud aleatoria, se requiere un procedimiento para de alguna manera caracterizar esas fluctuaciones aleatorias del esfuerzo. El enfoque más deseable para determinar el comportamiento de fatiga de miembros sometidos a carga de amplitud variable, es usar los resultados de pruebas efectuadas bajo condiciones de carga idéntica. En algunas situaciones críticas, esto realmente se hace así. Sin embargo, un enfoque más frecuente es usar los resultados de pruebas de amplitud constante en conjunción con un modelo de *daño acumulado,* para predecir el comportamiento por fatiga de los miembros sometidos a condiciones de carga variable. El postulado básico adoptado en el concepto de daño acumulado, es que el ciclaje con cualquier amplitud del esfuerzo produce *daño por fatiga.*

Uno de los enfoques que se ha usado más ampliamente y que históricamente es el más antiguo, es la *hipótesis de Palmgren-Miner* o *regla del daño lineal.*[21] Este enfoque, establece que la falla del material ocurre cuando

$$\sum_{i=1}^{k} D_i \geq 1 \qquad \left(D_i = \frac{n_i}{N_{fi}}\right) \tag{2-21}$$

[21]Propuesta por Palmgren en 1924 y luego desarrollada por Miner en 1945. Véase M. A. Miner, "Cumulative damage in fatigue", *Trans. ASME, J. Applied Mech.*, 67, Serie A, 1945, págs. 159-164. Reglas empíricas similares han sido también propuestas por Soderberg y por Goodman. Véase A. P. Boresi y O. M. Sidebottom, *Advanced Mechanics of Materials*, 4a. edición, Nueva York: John Wiley & Sons, 1985.

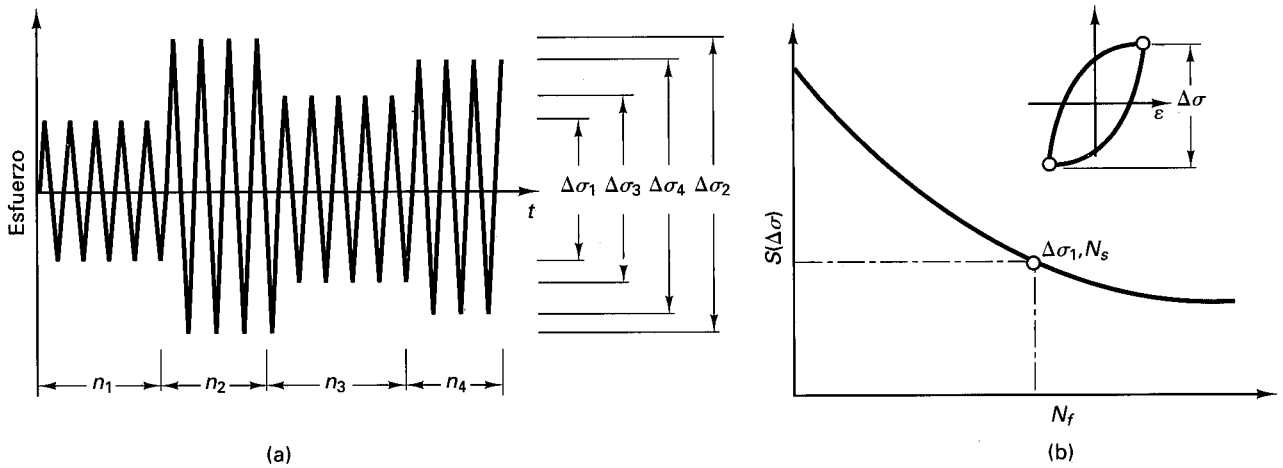


Fig. 2-27 (a) Carga de amplitud variable. (b) Diagrama típico *S-N*.

donde k = número de secuencias de carga a una amplitud particular del esfuerzo, D_i = daño producido por una amplitud del esfuerzo de $\Delta\sigma_i$, n_i = número de ciclos aplicados con una amplitud constante de $\Delta\sigma_i$ [véase la figura 2-27(a)] y N_{fi} = vida por fatiga a la amplitud constante de $\Delta\sigma_i$ [véase la figura 2-27(b)].

Fatiga de bajo ciclaje Los diagramas *S-N* de la figura 2-26 para una amplitud constante del esfuerzo, por lo general son para pruebas por debajo del límite elástico del material; es decir, cuando las amplitudes máximas del esfuerzo aplicado al desarrollar los diagramas *S-N* están en la región elástica lineal del diagrama monotónico de esfuerzo-deformación unitaria (véase la figura 2-5). Sin embargo, existen situaciones en que los miembros estructurales están sometidos a cargas cíclicas relativamente grandes (por ejemplo, miembros sometidos a carga térmica, tuberías sometidas a grandes deformaciones cíclicas, estructuras sometidas a cargas sísmicas, componentes de un recipiente nuclear a presión). En esos casos se inducen cantidades importantes de deformación unitaria plástica en cada ciclo, y las vidas cortas que implican pequeños números de ciclos, exhiben fallas si esas cargas relativamente grandes se aplican repetidamente. Este tipo de comportamiento se llama *fatiga de bajo ciclaje.*

En la fatiga de bajo ciclaje, la *amplitud de la deformación unitaria*, más que la amplitud del esfuerzo, resulta ser el parámetro de control, ya que puede haber grandes variaciones en la amplitud de la deformación unitaria acompañadas de cambios pequeños en la amplitud del esfuerzo. El método usual para presentar los resultados de las pruebas de fatiga de bajo ciclaje es por medio de una gráfica que representa la *amplitud de la deformación unitaria* como ordenada y el número de ciclos (o inversiones) a la falla como abscisa. Esta gráfica se llama *diagrama de vida por fatiga por deformación unitaria.* Un ejemplo de este diagrama para una aleación de acero al níquel[22] se muestra en la figura 2-28.

[22]Véase R. W. Landgraf, "The resistance of metal to cyclic deformation", *Achievement on High Fatigue Resistance in Metal and Alloys, STP-467, ASTM*, Filadelfia, PA, 1970.

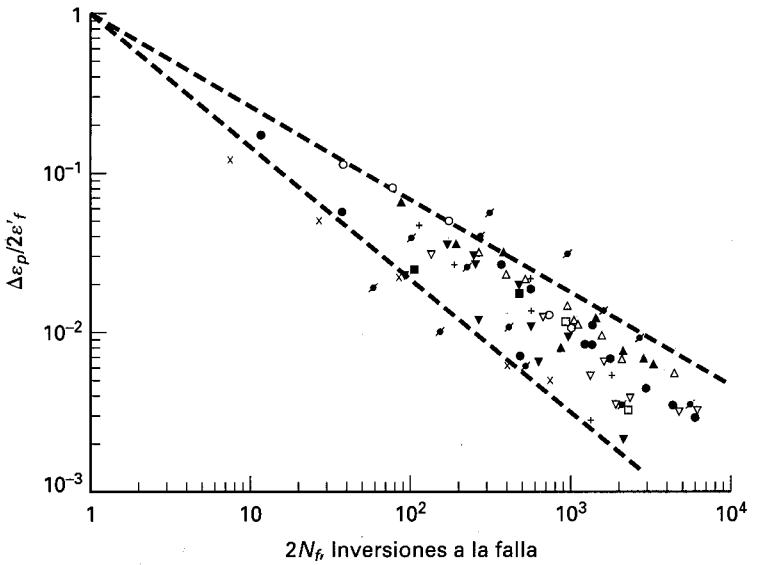


Fig. 2-28 Gráfica de fatiga de bajo ciclaje con amplitud de la deformación unitaria plástica $\Delta\ \varepsilon_p/2\varepsilon'_f$ *versus* el número de inversiones a la falla para un grupo de aceros al níquel endurecidos. El parámetro de normalización $2\varepsilon'_f$ se refiere a una resistencia de fluencia desplazada de 0.2% (tomado de "Resistance of metal" de Landgraf).

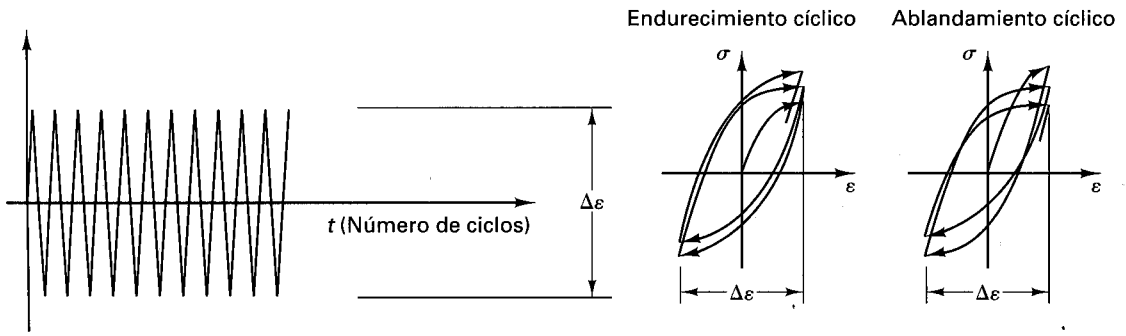


Fig. 2-29 Fenómenos de endurecimiento y suavización por deformación bajo deformación unitaria cíclica.

El comportamiento esfuerzo-deformación unitaria de materiales bajo ciclaje de la deformación unitaria es típicamente no lineal y dependiente de la historia de carga. Se ha observado que la respuesta esfuerzo-deformación unitaria de la mayor parte de los materiales cambia considerablemente con una deformación unitaria cíclica dentro del rango plástico. Algunos materiales exhiben endurecimiento por deformación cíclica y otros exhiben un ablandamiento por deformación, como se ilustra en la figura 2-29.

Como regla general, los materiales que son inicialmente duros y fuertes (por tratamiento térmico) se ablandarán por deformación cíclica, mientras que los materiales inicialmente blandos se endurecerán por deformación. Deben emplearse modelos cíclicos del material, más que diagramas monotónicos de esfuerzo-deformación unitaria, para predecir el comportamiento de esos materiales. La determinación de los modelos cíclicos del material se describe en los tratados avanzados sobre fatiga.

PROBLEMAS

Secciones 2-2 a la 2-4

2-1. Una probeta estándar de acero de 13 mm de diámetro se alarga 0.22 mm en una longitud calibrada de 200 mm cuando es sometida a una fuerza de tensión de 29.5 kN. Si la probeta permanece en el rango elástico, ¿cuál es el módulo elástico del acero?

2-2. Una barra de acero de 10 m de longitud empleada en un mecanismo de control debe transmitir una fuerza de tensión de 5 kN sin alargarse más de 3 mm ni exceder un esfuerzo permisible de 150 MN/m^2. ¿Cuál debe ser el diámetro de la barra? Dé la respuesta al milímetro más cercano. $E = 200$ GPa.

2-3. Un cilindro sólido de 50 mm de diámetro y 900 mm de longitud está sometido a una fuerza de tensión de 120 kN. Una parte de este cilindro que tiene L_1 de longitud, es de acero; la otra parte, unida al acero, es de aluminio y tiene L_2 de longitud. (a) Determine las longitudes L_1 y L_2 de modo que los dos materiales se alarguen la misma cantidad. (b) ¿Cuál es el alargamiento total del cilindro? $E_{ac} = 200$ GPa; $E_{A1} = 70$ GPa.

2-4. En uno de los campos petroleros de California, un tubo perforador de acero muy largo se quedó atorado en arcilla dura (véase la figura). Fue necesario determinar a qué profundidad ocurrió esto. El ingeniero de la obra ordenó someter el tubo a una gran fuerza de tensión dirigida hacia arriba. Como resultado de esta operación el tubo se alargó elásticamente 600 mm. Al mismo tiempo, el tubo se alargó 0.035 mm en una longitud calibrada de 200 mm. ¿Dónde, aproximadamente, se atoró el tubo? Suponga que el área transversal del tubo era constante y que el medio que lo rodeaba impedía muy poco su deformación en una prueba estática.

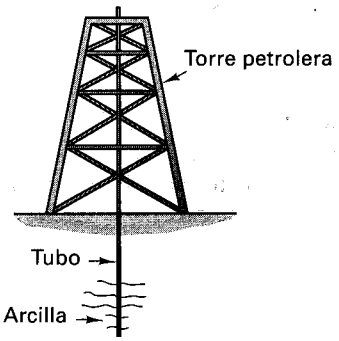


Fig. P2-4

2-5. Midiendo a escala las ordenadas del diagrama esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería en la figura 2-7, obtenga los valores aproximados del esfuerzo en 0.1, 0.2, 1.0, 2.0 y 4.0 % de la deformación unitaria. Luego, usando la ecuación 2-7 con esos valores de la deformación unitaria, determine los esfuerzos verdaderos en tensión y compresión y muestre los resultados sobre una gráfica sin exageraciones. Para las mismas condiciones, haga un estudio del cambio en área de la sección transversal. (Esos temas resultan muy importantes en el estirado de metales.)

2-6. Un alambre de cobre estirado en frío se cuelga entre los puntos A y B que están entre sí a 50 m, a $-35°C$ y desarrolla una flecha de 300 mm en el centro del claro (véase la figura P2-6). ¿Cuál será la flecha máxima del alambre si la temperatura cambia a $+35°C$? Suponga que el coeficiente de expansión térmica lineal para el alambre de cobre es de $16 \times 10^{-6}/°C$. Aproxime la forma del alambre desviado por una catenaria o por una parábola; considere entonces que la longitud diferencial del alambre $ds \approx dx$.

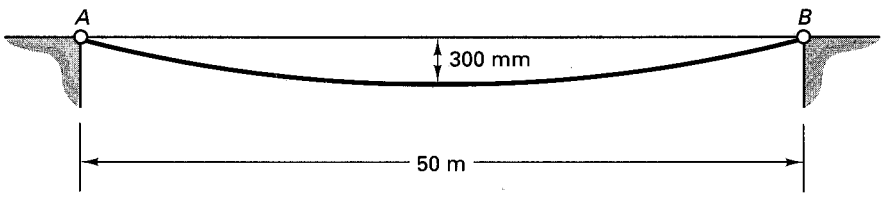


Fig. P2-6

Secciones 2-6 y 2-7

2-7. Una barra de bronce fundido de 60 mm de diámetro y 150 mm de longitud es comprimida axialmente por una fuerza uniformemente distribuida de 200 kN. Determine el incremento en diámetro causado por la fuerza aplicada. $E = 85$ GPa; $\nu = 0.30$.

2-8. Suponga que en un aparato es necesario mantener precisamente la sección transversal de una barra circular de 20 mm de acero al níquel. Si esta barra se calienta a 200°C, ¿qué fuerza de tensión debe aplicarse a la barra para mantener la dimensión de su sección transversal? ¿Cuál debe ser la fuerza axial aplicada si la barra se fabrica de aluminio? Suponga para el acero inoxidable que $E = 200$ GPa, y $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$ por °C y que para el aluminio 6061-T4, $E = 70$ GPa y $\alpha = 23.4 \times 10^{-6}$ por °C.

2-9. Una masa de 5 kg se mueve en un círculo horizontal en el extremo de un alambre de acero de 1.5 m de longitud con tal velocidad angular que el alambre forma un ángulo de 30° con la vertical. ¿Cuál es el diámetro apropiado para el alambre si el esfuerzo permisible en tensión para el acero de alta resistencia es de 300 MPa? ¿Cuánto se estira el alambre durante la rotación? Considere $E = 200$ GPa.

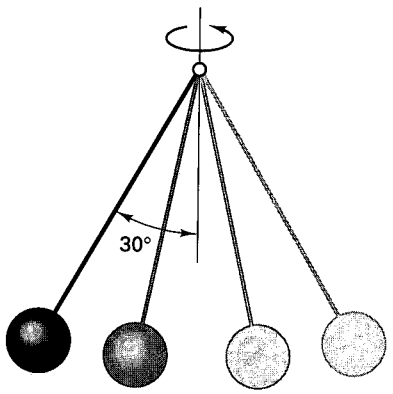


Fig. P2-9

Sección 2-8

2-10. Determine los módulos de tenacidad aproximados para los tres grados de acero que se muestran en la figura 2-8.

Sección 2-9

2-11. Suponga que se efectúan una serie de pruebas de tensión sobre varias probetas idénticas de material Maxwell. En cada experimento la razón de deformación unitaria se mantiene constante. (a) Trace una familia de curvas esfuerzo-deformación unitaria que resulten de esa serie de pruebas. (b) En cada caso, ¿cuál es el módulo elástico E en $t = 0$? (c) Analice las implicaciones de los resultados.

2-12. Un Sólido Estándar para un material viscoelástico se obtiene colocando en serie una unidad Maxwell y una unidad Kelvin, como se muestra en la figura (a). Este modelo es capaz de representar la mayor parte de las características esenciales del comportamiento viscoelástico. Trace la relación deformación unitaria-tiempo que resulta de la entrada esfuerzo-tiempo que se muestra en la figura (b).

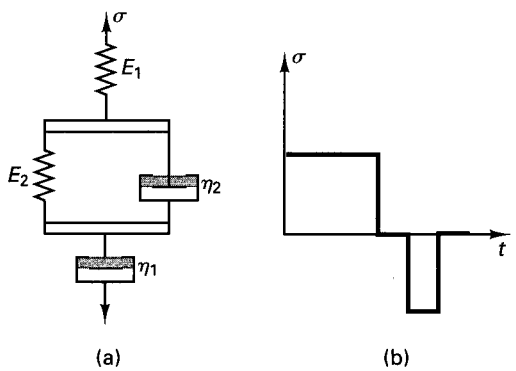


Fig. P2-12

2-13. Considere un tubo de material viscoelástico lineal que salva un claro horizontal de longitud L. El tubo está vacío 16 horas al día y lleno 8 horas. La razón del peso del tubo lleno al peso del tubo vacío es 5. (a) Suponiendo que el material es maxwelliano, dibuje un diagrama que muestre la deflexión central en función del tiempo para dos días típicos. (b) Para las mismas condiciones de entrada, dibuje otro diagrama para un material que tenga las propiedades de un Sólido Estándar (véase el problema 2-12).

2-14. Para muchos materiales, la hipótesis de un comportamiento viscoelástico lineal no es satisfactoria. Para tratar esos casos se han propuesto varias relaciones empíricas para el flujo plástico de estado permanente. Una de esas relaciones con mayor empleo es $\dot{\varepsilon} = B\sigma^n$, donde B es una constante y el exponente experimentalmente determinado es $n > 1$. Demuestre que usando esta relación, el esfuerzo máximo en una viga rectangular es $\sigma_{máx} = (Mc/I)[(2n + 1)/(3n)]$ y que a una distancia y del eje centroidal $\sigma = (y/c)^{1/n}\,\sigma_{máx}$. Trace la distribución resultante de esfuerzo para $n = 6$.

Sección 2-10

2-15. Una parte de máquina como la que se muestra en la figura P2-15, está sometida a una carga cíclica de amplitud constante con amplitudes máximas iguales en tensión y en compresión. Si esa parte está hecha de acero o de una aleación de aluminio y debe dar servicio durante 10^8 ciclos, ¿qué esfuerzo último puede permitirse para cada uno de los materiales? Los extremos de la probeta están adecuadamente ahusados. Calcule la estimación usando la figura 2-26.

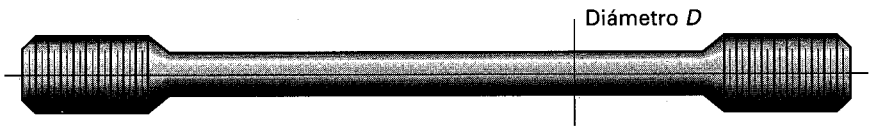


Fig. P2-15

2-16. Aplicando la regla de Palmgren-Miner, dada por la ecuación 2-21, haga un estudio del esfuerzo permisible para dos rangos de esfuerzo para una aleación de aluminio y para el acero. (a) Para ambos materiales en el rango alto del esfuerzo, sea 2×10^6 a 200 MPa y 4×10^5 a 250 MPa, el número de ciclos. (b) Para el rango bajo del esfuerzo, sea 5×10^6 a 175 MPa y 4×10^8 a 130 MPa, el número de ciclos. Calcule una estimación usando la figura 2-26.

3

Deformación axial de barras: Sistemas estáticamente determinados

3-1. Introducción

Este capítulo aborda el problema de cómo determinar las deformaciones en barras cargadas axialmente en casos estáticamente determinados. Esto significa que las fuerzas axiales en un miembro pueden determinarse sólo con las ecuaciones de la estática. Además de las barras rectas, se consideran también los sistemas de dos barras articuladas. Todos los ejemplos ilustrativos han sido desarrollados para el material elástico lineal. Se incluye un caso de deformación térmica de un sistema de dos barras. Los ejemplos para los materiales no lineales se dejan como ejercicios para el lector.

En la Sección 3-3, en que se analiza el principio de Saint-Venant, se proporciona información importante pertinente a los incrementos significativos del esfuerzo, cuando el miembro cambia de sección transversal. El capítulo concluye con un análisis de la energía de deformación elástica, la obtención de deflexiones por el método de la energía y cargas de impacto asociadas con esfuerzos uniaxiales.

3-2. Deformación de barras axialmente cargadas

Cuando la deflexión de un miembro cargado axialmente es un parámetro de diseño, es necesario determinar las deformaciones. Las deformaciones axiales son también necesarias en el análisis de barras estáticamente indeterminadas. Las características de deflexión de las barras también proporcionan la información necesaria para determinar las rigideces de los sistemas en el análisis de las vibraciones mecánicas.

Considere la barra cargada axialmente de la figura 3-1(a), empleada para deducir una relación para la deformación axial en dichas barras. Las fuerzas aplicadas P_1, P_2 y P_3 se mantienen en equilibrio por la fuerza P_4. Se permite que el área transversal A de la barra cambie gradualmente. Vamos a determinar el cambio de longitud que tiene lugar en la barra entre los puntos B y D debido a la fuerza aplicada.

Para formular la relación, la ecuación 2-1 para la deformación unitaria normal se escribe para un elemento diferencial dx. Entonces, la deformación unitaria ϵ_x en la dirección x es

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \tag{3-1}$$

donde, debido a las fuerzas aplicadas, u es el desplazamiento absoluto de un punto sobre una barra, medido desde una posición inicial fija en el espacio, y du es la deformación axial del elemento infinitesimal. Ésta es la ecuación diferencial gobernante para barras cargadas axialmente.

Debe mencionarse que las deformaciones consideradas en este texto son por lo general *muy pequeñas* (infinitesimales). Esto debe ser evidente por los ejemplos numéricos vistos a lo largo del texto. Por tanto, en los cálculos

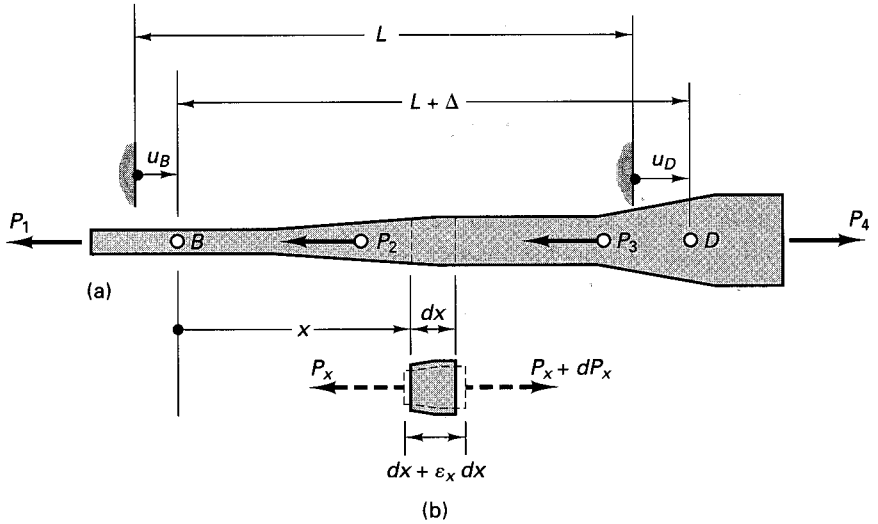


Fig. 3-1 Una barra cargada axialmente.

pueden usarse las dimensiones *iniciales* (no deformadas) de los miembros para obtener las deformaciones. En la siguiente deducción esto permite el uso de la longitud inicial L entre puntos como B y D en la figura 3-1 en vez de su longitud deformada.

Reescribiendo la ecuación 3-1 como $du = \varepsilon_x\, dx$, considerando el origen de x en B e integrando,

$$\int_0^L du = u(L) - u(0) = \int_0^L \varepsilon_x\, dx$$

donde $u(L) = u_D$ y $u(0) = u_B$ son los desplazamientos absolutos o globales de los puntos D y B, respectivamente. Como puede verse en la figura, $u(0)$ es una *traslación axial de cuerpo rígido* de la barra. La diferencia entre esos desplazamientos es el cambio en longitud Δ entre los puntos D y B. Por consiguiente

$$\boxed{\Delta = \int_0^L \varepsilon_x\, dx} \tag{3-2}$$

Cualquier relación constitutiva apropiada puede usarse para definir ε_x.

Para materiales elásticos lineales, de acuerdo con la ley de Hooke, $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, (ecuación 2-8), donde $\sigma_x = P_x/A_x$, (ecuación 1-6 o 1-8). Sustituyendo esas relaciones en la ecuación 3-2 y simplificando,

$$\boxed{\Delta = \int_0^L \frac{P_x\, dx}{A_x E_x}} \tag{3-3}$$

donde Δ es el cambio en longitud de una barra *linealmente elástica* de longitud L y la fuerza $P_x = P(x)$, el área de su sección transversal $A_x = A(x)$ y el módulo elástico $E_x = E(x)$ pueden variar a lo largo de la longitud de la barra. Si no se cumplen esas condiciones, debe usarse una relación constitutiva diferente en la determinación de ϵ_x con la ecuación 3-2.

RESUMEN DEL PROCEDIMIENTO

Debe recalcarse que el tema central de la mecánica de sólidos consiste en la aplicación repetida de *tres conceptos básicos*. Al desarrollar la teoría de las barras axialmente cargadas, dichos conceptos básicos pueden resumirse como sigue:

1. Las *condiciones de equilibrio* se usan para determinar las fuerzas resistentes internas en una sección, presentadas primero en el capítulo 1. Como se muestra en el siguiente capítulo, esto puede requerir la resolución de un problema estáticamente indeterminado.
2. La *geometría de la deformación* se usa para deducir el cambio en la longitud de una barra debido a fuerzas axiales, suponiendo que las secciones inicialmente perpendiculares al eje de una barra permanecen perpendiculares después de que ocurre la deformación; véase la figura 3-1(b).

3. Las *propiedades de los materiales* (relaciones constitutivas) se usan para relacionar los esfuerzos normales axiales con las deformaciones unitarias normales axiales y permiten calcular las deformaciones axiales entre secciones.

Las soluciones basadas en esta teoría suponen un esfuerzo *promedio* en una sección (véase la Sección 1-6). Sin embargo, bajo cargas concentradas y en cambios abruptos de sección transversal, aparecen esfuerzos (y deformaciones) *locales* irregulares. Sólo a distancias aproximadamente iguales a la profundidad del miembro desde tales perturbaciones, están los esfuerzos y deformaciones unitarias de acuerdo con la teoría desarrollada. Por tanto, las soluciones basadas en los conceptos de la mecánica de sólidos son más apropiadas para miembros relativamente esbeltos. El empleo de este procedimiento simplificado se racionaliza en la Sección 3-3 como *principio de Saint-Venant.*

A continuación se indican varios ejemplos que muestran la aplicación de la ecuación 3-3.

Ejemplo 3-1

Considere la barra BC de área transversal constante A y longitud L que se muestra en la figura 3-2(a). Determine la deflexión del extremo libre causada por la aplicación de una fuerza concentrada P. El módulo elástico del material es E.

SOLUCIÓN

La barra deformada se muestra en la figura 3-2(b). **Conceptualmente, suele convenir pensar que tales sistemas elásticos son resortes;** véase la figura 3-2(e).

En la figura 3-2(c) se muestra un diagrama de cuerpo libre para una parte aislada de la barra cargada a la izquierda de una sección arbitraria a-a. De este diagrama puede concluirse que la fuerza axial P_x es la misma en todas partes a lo largo de la barra e igual a P. Entonces, $A_x = A$, constante. Aplicando la ecuación 3-3,

$$\Delta = \int_A^B \frac{P_x\,dx}{A_x E} = \frac{P}{AE}\int_0^L dx = \frac{P}{AE}\,x\Big|_0^L = \frac{PL}{AE}$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\Delta = \frac{PL}{AE}} \qquad (3\text{-}4)$$

Una interpretación gráfica de la solución se muestra en las figuras 3-2(f)-(h). La deformación unitaria axial constante en la barra se obtiene dividiendo la fuerza axial constante P entre AE. Como la deformación unitaria axial es constante, los desplazamientos de los puntos sobre la barra crecen directamente con la distancia desde el origen de x a razón constante. Ningún desplazamiento es posible en el extremo izquierdo.

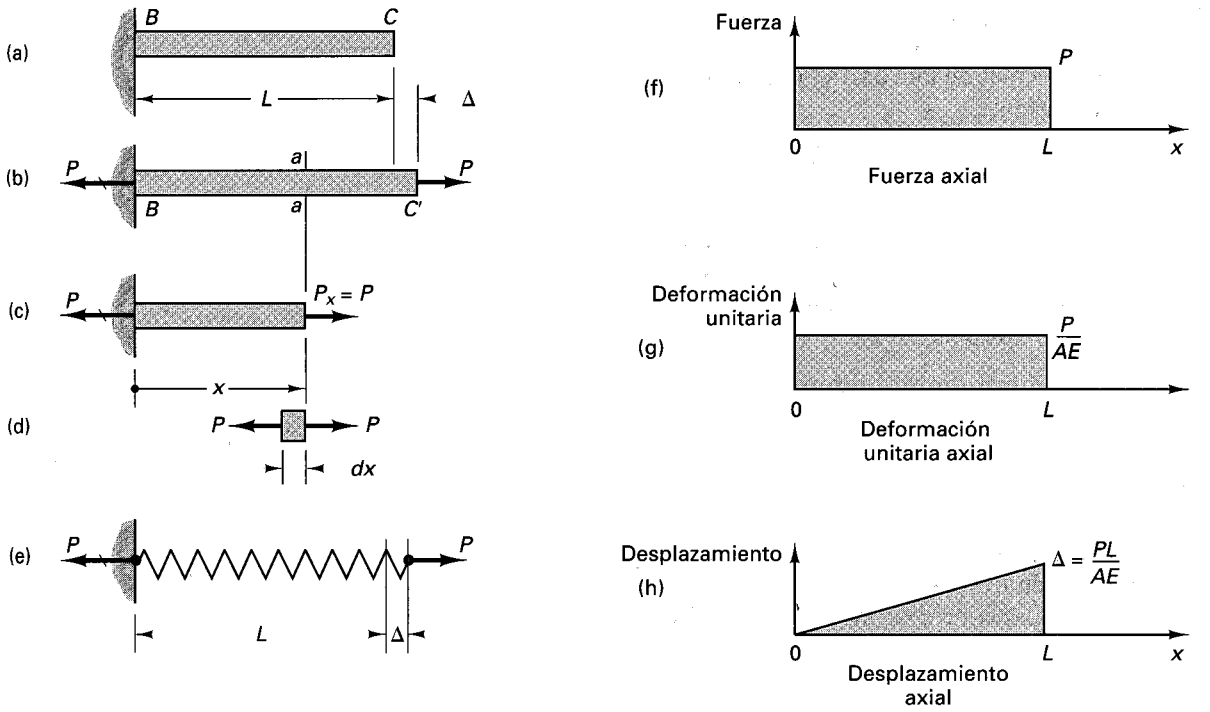


Fig. 3-2

Se ve en la ecuación 3-4 que la deflexión de la barra es directamente proporcional a la fuerza aplicada y a la longitud, y es inversamente proporcional a A y a E.

Como la ecuación 3-4 ocurre con frecuencia en la práctica, conviene escribirla en la forma:

$$P = (AE/L)\Delta \tag{3-5}$$

Esta ecuación está relacionada con la conocida definición de la *constante de resorte* o *rigidez* k, que se escribe como

$$k = P/\Delta \quad \text{[lb/in] o [N/m]} \tag{3-6}$$

Esta constante representa la fuerza requerida para producir una deflexión unitaria (es decir, $\Delta = 1$). Por tanto, para una i-ésima barra cargada axialmente o un segmento de barra de longitud L_i y sección transversal constante,

$$k_i = \frac{A_i E_i}{L_i} \tag{3-7}$$

y la analogía entre dicha barra y un resorte que se muestra en la figura 3-2(e) es evidente. El recíproco de k define la *flexibilidad* f; es decir,

$$f = 1/k = \Delta/P \quad \text{[in/lb] o [m/N]} \tag{3-8}$$

La constante f representa la deflexión resultante de la aplicación de una fuerza unitaria (es decir, $P = 1$).

Para el caso particular de una barra i-ésima cargada axialmente de sección transversal constante,

$$f_i = \frac{L_i}{A_i E_i} \tag{3-9}$$

Los conceptos de rigidez y flexibilidad estructural se aplican ampliamente en el análisis estructural, incluyendo los problemas de vibraciones mecánicas. Para los sistemas estructurales más complejos, las expresiones para k y f son más complicadas.

Ejemplo 3-2

Calcule el desplazamiento relativo del punto D desde O en la barra elástica de acero de sección transversal variable de la figura 3-3(a) causado por la aplicación de fuerzas concentradas $P_1 = 100$ kN y $P_3 = 200$ kN que actúan a la izquierda y $P_2 = 250$ kN y $P_4 = 50$ kN actuando a la derecha. Las respectivas áreas para los segmentos de la barra, OB, BC y CD son 1000, 2000 y 1000 mm^2. Considere $E = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

Por medio de la inspección puede observarse que la barra está en equilibrio. *Tal verificación debe efectuarse siempre antes de empezar a resolver un problema.* La variación de P_x a lo largo de la longitud de la barra se determina tomando tres secciones *a-a*, *b-b* y *c-c* en la figura 3-3(a) y determinando las fuerzas necesarias para el equilibrio en los diagramas de cuerpo libre en las figuras 3-3(b)-(d). Esto conduce a la conclusión de que *dentro de cada segmento* de barra, las fuerzas son *constantes*, lo que da por resultando el diagrama de fuerza axial que se muestra en la figura 3-3(e). Por tanto, la resolución del problema de deformación consiste en sumar algebraicamente las deformaciones individuales en los tres segmentos. La ecuación 3-4 es aplicable a *cada* segmento. Por consiguiente, la deformación axial total en la barra puede escribirse como

$$\Delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{A_i E} = \frac{P_{OB} L_{OB}}{A_{OB} E} + \frac{P_{BC} L_{BC}}{A_{BC} E} + \frac{P_{CD} L_{CD}}{A_{CD} E}$$

donde los subíndices identifican los segmentos.

Usando esta relación, el desplazamiento relativo entre O y D es

$$\Delta = + \frac{100 \times 10^3 \times 2000}{1000 \times 200 \times 10^3} - \frac{150 \times 10^3 \times 1000}{2000 \times 200 \times 10^3} + \frac{50 \times 10^3 \times 1500}{1000 \times 200 \times 10^3}$$

$$= +1.000 - 0.375 + 0.375 = +1.000 \text{ mm}$$

Note que a pesar de los grandes esfuerzos en la barra, el alargamiento es muy pequeño.

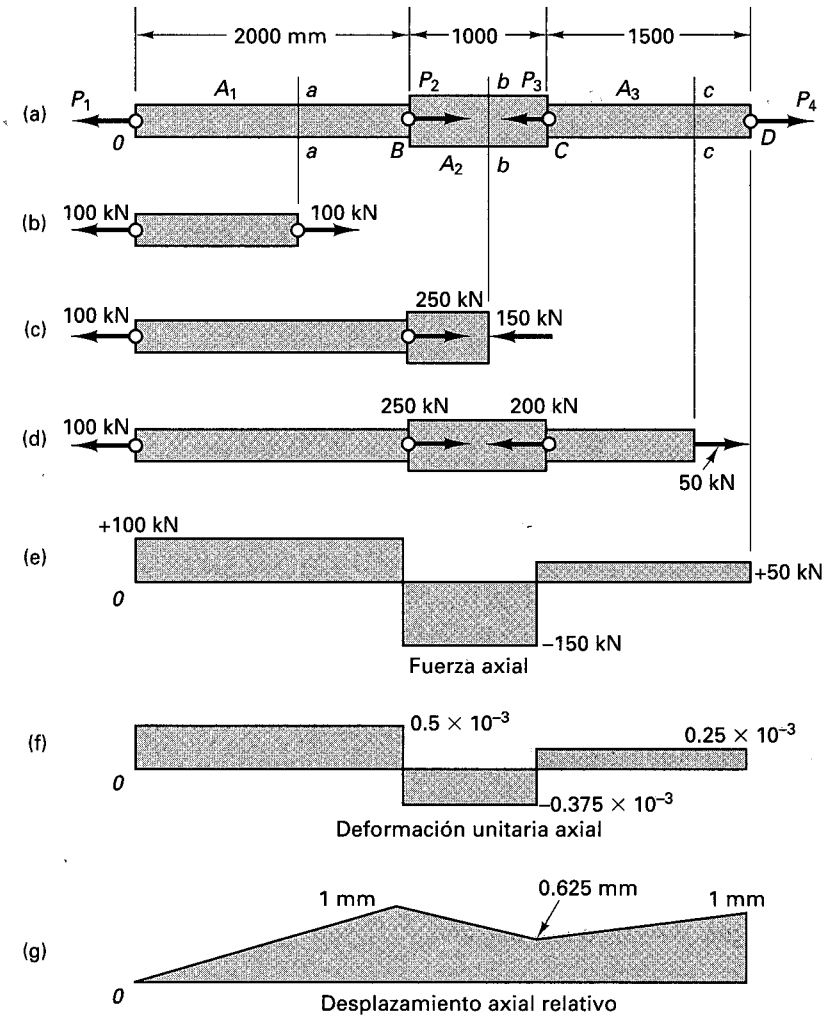


Fig. 3-3

Una interpretación gráfica de la solución se muestra en las figuras 3-3(f) y (g). Dividiendo las fuerzas axiales en los segmentos de las barras entre el correspondiente AE, se obtienen las deformaciones unitarias axiales a lo largo de la barra. Esas deformaciones unitarias son constantes dentro de cada segmento de barra. El área del diagrama de deformación unitaria para cada segmento de barra da el cambio en longitud para ese segmento. Esos valores corresponden a los obtenidos numéricamente antes.

Ejemplo 3-3

Determine la deflexión del extremo libre B de la barra elástica OB causada por su propio peso w lb/in; véase la figura 3-4. El área de la sección transversal es constante. Suponga que se da la constante E.

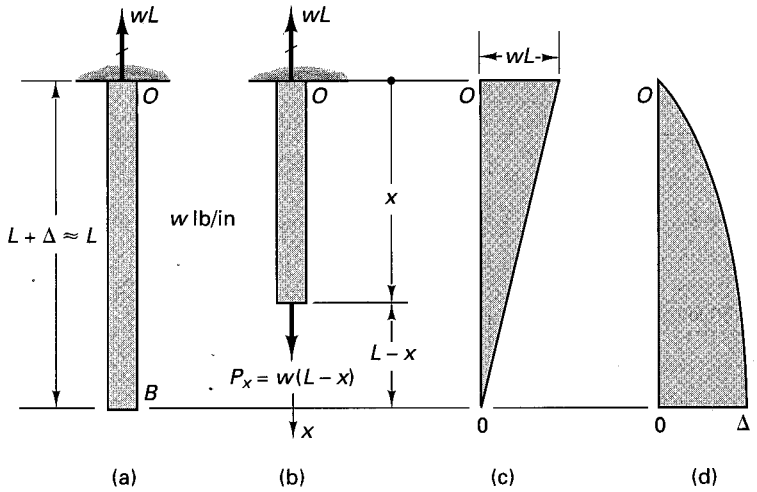


Fig. 3-4

SOLUCIÓN

Los diagramas de cuerpo libre de la barra y de su segmento truncado se muestran, respectivamente, en las figuras 3-4(a) y (b). Esos dos pasos son esenciales en la resolución de esos problemas. La gráfica de la fuerza axial $P_x = w(L - x)$ se da en la figura 3-4(c). Aplicando la ecuación 3-3, el cambio en la longitud $\Delta(x)$ de la barra en un punto genérico x es

$$\Delta(x) = \int_0^x \frac{P_x\,dx}{A_xE} = \frac{1}{AE}\int w(L - x)\,dx = \frac{w}{AE}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$

Una gráfica de esta función se muestra en la figura 3-4(d) con su máximo en B.

La deflexión de B es

$$\Delta = \Delta(L) = \frac{w}{AE}\left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right) = \frac{wL^2}{2AE} = \frac{WL}{2AE}$$

donde $W = wL$ es el peso *total* de la barra.

Si, además del peso propio de la barra, estuviese actuando una fuerza concentrada P sobre el extremo B de la barra OB, la deflexión total debido a las *dos causas* se obtendría por *superposición* como

$$\Delta = \frac{PL}{AE} + \frac{WL}{2AE} = \frac{[P + (W/2)]L}{AE}$$

En problemas donde el área de una barra es variable, debe sustituirse una *función* apropiada en la ecuación 3-3 para determinar las deflexiones. En la práctica a veces es preciso analizar tales problemas aproximando la forma de una barra por un *número finito* de elementos como se muestra en la figura 3-5. Las deflexiones para cada uno de esos elementos se suman

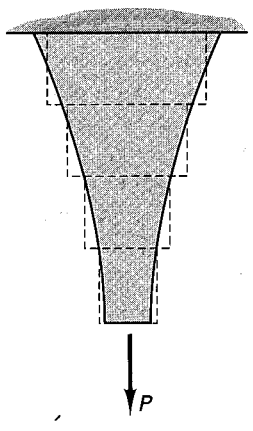


Fig. 3-5

para obtener la deflexión total. Debido a la rápida variación en la sección transversal mostrada, la solución sería aproximada.

Ejemplo 3-4

Para la ménsula cuyos esfuerzos se analizaron en el ejemplo 1-3, determine la deflexión del punto B causada por la fuerza vertical aplicada P =3 kips. Determine también la rigidez vertical de la ménsula en B. Suponga que los miembros están hechos de la aleación de aluminio 2024-T4 y que tienen áreas constantes en sus secciones transversales (es decir, desprecie las ampliaciones en las conexiones). Véase la idealización en la figura 3-6(a).

SOLUCIÓN

Tal como se encontró en el ejemplo 1-3, los esfuerzos axiales en las barras de la ménsula son $\sigma_{AB} = 17.8$ ksi y $\sigma_{BC} = 12.9$ ksi. La longitud del miembro AB es 6.71 in. y la de la barra BC es 8.49 in. De acuerdo con la Tabla 1A del apéndice, para el material especificado, $E = 10.6 \times 10^3$ ksi. Por tanto, de acuerdo con la ecuación 3-4, los cambios de longitud en los miembros individuales son

$$\Delta_{AB} = \left[\frac{PL}{AE}\right]_{AB} = \left[\sigma\frac{L}{E}\right]_{AB} = \frac{17.8 \times 6.71}{10.6 \times 10^3} = 11.3 \times 10^{-3} \text{ in} \qquad \text{(alargamiento)}$$

$$\Delta_{BC} = -\frac{12.9 \times 8.29}{10.6 \times 10^3} = -10.3 \times 10^{-3} \text{ in} \qquad \text{(contracción)}$$

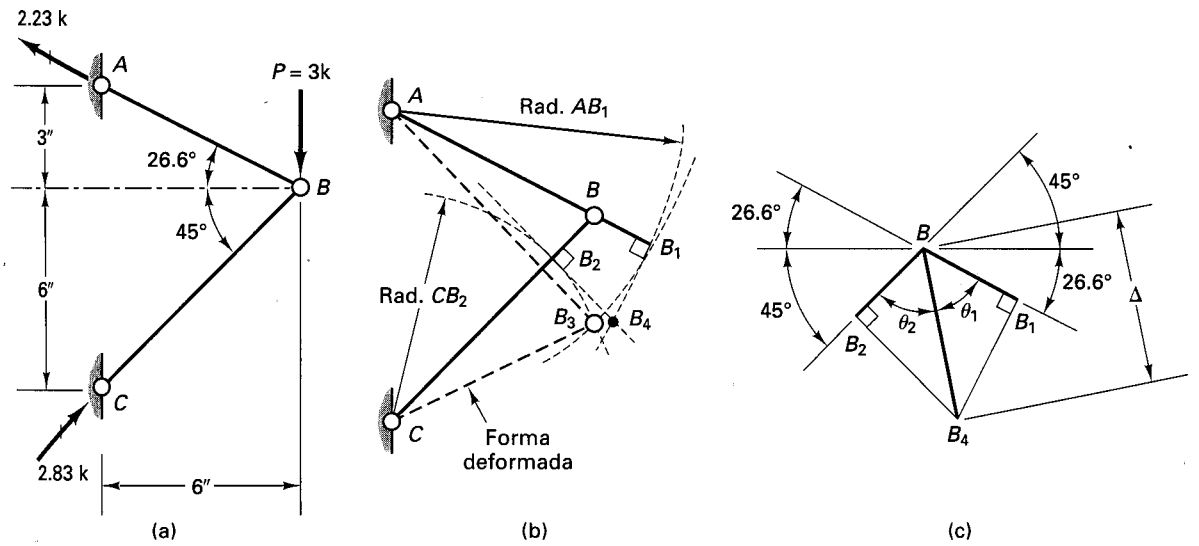


Fig. 3-6

Esos cambios de longitud, como el BB_1 y el BB_2, se muestran en la figura 3-6(b) sumamente exagerados en relación con las longitudes de las barras. Las posiciones indicadas de los puntos B_1 y B_2 son incompatibles con los requisitos físicos del problema. Por tanto, la barra alargada AB_1 y la barra acortada CB_2 deben ser giradas alrededor de sus respectivos puntos de soporte A y C de manera que los puntos B_1 y B_2 se encuentren en un punto común B_3. Esto se muestra en forma esquemática en la figura 3-6(b). Sin embargo, como en la mecánica de sólidos clásica se trata con deformaciones pequeñas (infinitesimales), puede introducirse una aproximación. En tales análisis es usual suponer que arcos cortos de grandes círculos pueden ser aproximados por "normales" a los miembros, a lo largo de los cuales los extremos de las barras se mueven para lograr compatibilidad en las juntas. Esta construcción[1] está indicada en la figura 3-6(b), en donde se localiza el punto B_4. Un detalle amplificado de los cambios en las longitudes de las barras y este procedimiento para localizar el punto B_4 se muestran en la figura 3-6(c). Los resultados numéricos requeridos pueden obtenerse gráficamente o usando la trigonometría. Aquí seguiremos este último procedimiento.

Si Δ es la deflexión o desplazamiento del punto B a la posición B_4, figura 3-6(c), y los cambios en las longitudes de las barras son $\Delta_{BC} = BB_2$ y $\Delta_{AB} = BB_1$,

$$\Delta_{BC} = \Delta \cos\theta_2 \quad \text{y} \quad \Delta_{AB} = \Delta \cos\theta_1$$

Al formar razones iguales para ambos lados de esas ecuaciones, sustituyendo los valores numéricos para Δ_{BC} y Δ_{AB} encontrados antes y simplificando, se obtiene

$$\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{\Delta_{BC}}{\Delta_{AB}} = \frac{10.3 \times 10^{-3}}{11.3 \times 10^{-3}} = 0.912$$

Sin embargo, como

$$\theta_2 = 180° - 45° - 26.6° - \theta_1 = 108.4° - \theta_1$$

se infiere que

$$\cos\theta_2 = \cos 108.4° \cos\theta_1 + \operatorname{sen} 108.4° \operatorname{sen}\theta_1$$

y

$$\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \cos 108.4° + \operatorname{sen} 108.4° \tan\theta_1 = 0.912$$

Por tanto,

$$\tan\theta_1 = 1.29 \quad \text{y} \quad \theta_1 = 52.2°$$

Con base en este resultado,

$$\Delta = \Delta_{AB}/\cos\theta_1 = 18.4 \times 10^{-3} \text{ in}$$

que forma un ángulo de 11.2° con la vertical.

[1]Introducido por primera vez por M. Williot en 1877.

Como $\Delta_{vert} = \Delta \cos 11.2° = 18.0 \times 10^{-3}$ in, la rigidez vertical de la ménsula está dada por la constante de resorte

$$k = \frac{P}{\Delta_{\text{vert}}} = \frac{3}{18.0 \times 10^{-3}} = 167 \text{ kips/in}$$

Este problema contiene no linearidad geométrica en los desplazamientos, lo que ha sido despreciado; por tanto, la solución es sólo exacta para deformaciones pequeñas, lo que es una práctica común en muchos problemas de ingeniería.

Ejemplo 3-5

Determine el desplazamiento del punto B en el ejemplo 3-4 causado por un incremento de temperatura de 100°F. Véase la figura 3-7(a).

SOLUCIÓN

El calcular la deflexión en el punto B debido a un incremento de temperatura, es similar a la resolución del ejemplo 3-4 para encontrar la deflexión del mismo punto causada por esfuerzo. Según la Tabla 1A del apéndice, el coeficiente de expansión térmica para la aleación de aluminio 2024-T4 es 12.9×10^{-6} por °F. Por consiguiente, de la ecuación 2-11 y usando las longitudes de los miembros dadas en el ejemplo 3-4,

$$\Delta_{AB} = 12.9 \times 10^{-6} \times 100 \times 6.71 = 8.656 \times 10^{-3} \text{ in}$$

$$\Delta_{BC} = 12.9 \times 10^{-6} \times 100 \times 8.49 = 10.95 \times 10^{-3} \text{ in}$$

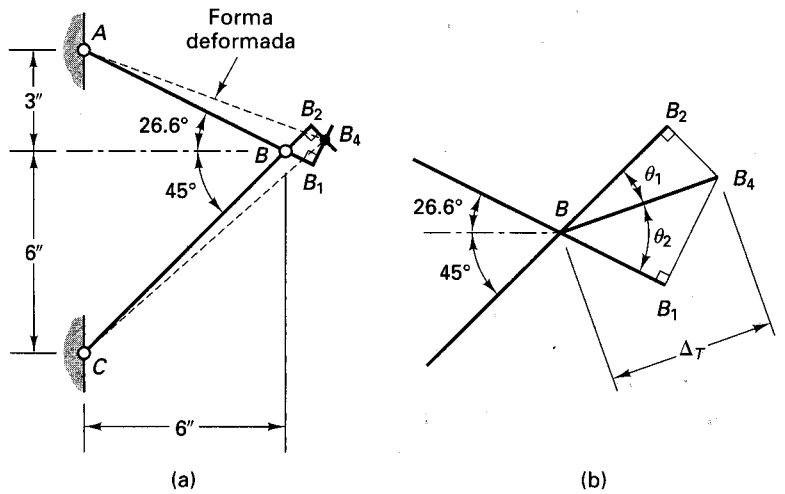


Fig. 3-7

Aquí, el desplazamiento Δ_T del punto B a la posición B_4, figura 3-7(b), causado por un cambio de temperatura, está relacionado con los alargamientos de la barra de la siguiente manera:

$$\Delta_T \cos\theta_2 = \Delta_{AB} \quad \text{y} \quad \Delta_T \cos\theta_1 = \Delta_{BC}$$

Formando razones iguales para ambos lados de esas ecuaciones, sustituyendo los valores numéricos de Δ_{AB} y Δ_{BC} y simplificando, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{\Delta_{AB}}{\Delta_{BC}} = \frac{8.656 \times 10^{-3}}{10.95 \times 10^{-3}} = 0.7905$$

Sin embargo, $\theta_2 = 45° + 26.6° - \theta_1 = 71.6° - \theta_1$; por tanto,

$$\cos\theta_2 = \cos 71.6° \cos\theta_1 + \operatorname{sen} 71.6° \operatorname{sen}\theta_1$$

y

$$\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \cos 71.6° + \operatorname{sen} 71.6° \tan\theta_1 = 0.7905$$

Por consiguiente,

$$\tan\theta_1 = 0.500 \quad \text{y} \quad \theta_1 = 26.6°$$

Con base en este resultado,

$$\Delta_T = \Delta_{BC}/\cos\theta_1 = 12.2 \times 10^{-3} \text{ in}$$

que forma un ángulo de $45° - \theta_1 = 18.4°$ con la horizontal.

Es interesante notar que el pequeño desplazamiento Δ_T es de un orden de magnitud comparable al encontrado para el caso de la fuerza vertical aplicada P en el ejemplo 3-4.

Ejemplo 3-6

Dos barras elásticas articuladas en sus extremos, de longitudes y áreas transversales iguales, unidas a soportes rígidos, están unidas en el centro por un pasador, como se muestra en la figura 3-8(a). Inicialmente, los puntos A, B y C están sobre una línea recta. Calcule la deflexión vertical Δ del punto C como función de la fuerza aplicada P. Considere sólo las deflexiones pequeñas.

SOLUCIÓN

El sistema estructural dado es incapaz de soportar fuerzas verticales en su configuración inicial. Por tanto, debe examinarse el equilibrio del sistema en una condición ligeramente deflexionada, figura 3-8(b), donde las longitudes iniciales L de las barras son ahora L^*. Para esta posición de las barras se puede escribir una ecuación de equilibrio para el nodo C' y expresar los alargamientos de las barras de dos maneras diferentes. Una relación para

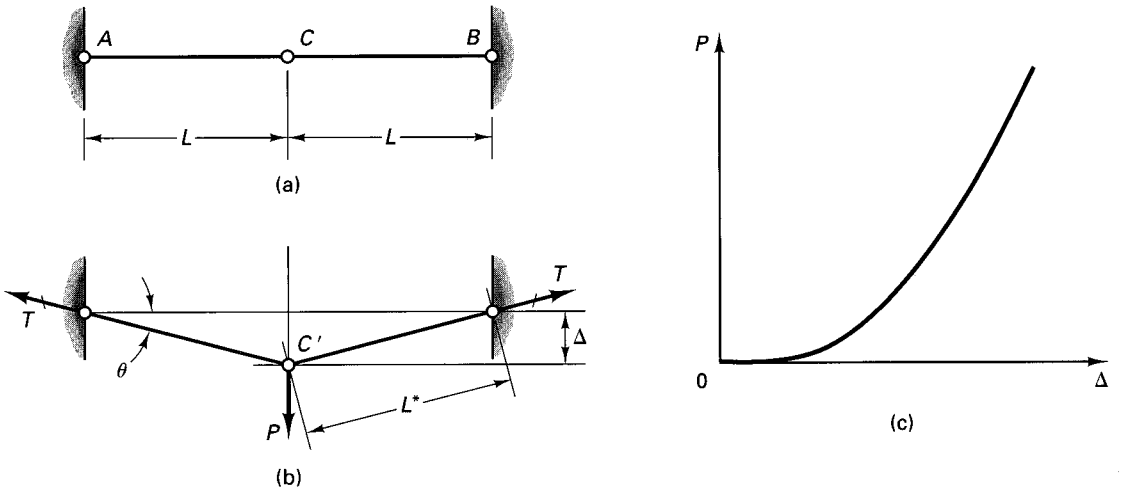


Fig. 3-8

el alargamiento de cada barra se obtiene con la ecuación 3-4 y la otra sólo por consideraciones geométricas. Entonces, por equilibrio,

$$P = 2T \operatorname{sen} \theta$$

y

$$\frac{TL^*}{AE} = L^* - L = L^* - L^* \cos \theta$$

Por consiguiente,

$$T = AE(1 - \cos \theta)$$

Al sustituir esta expresión para T en la primera ecuación,

$$P = 2AE(1 - \cos \theta) \operatorname{sen} \theta$$

Luego, desarrollando cos θ y sen θ en serie de Taylor,

$$P = 2AE\left(\frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right)\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right)$$

Si se retiene sólo un término de cada serie,

$$P \approx AE\theta^3$$

Sin embargo, como el análisis se está haciendo para deflexiones pequeñas, el ángulo $\theta \approx \Delta/L$. Por tanto,

$$P \approx \frac{AE}{L^3}\Delta^3 \quad \text{or} \quad \Delta = L\sqrt[3]{\frac{P}{AE}} \tag{3-10}$$

Este resultado, mostrado cualitativamente en la figura 3-8(c), muestra claramente la fuerte relación no lineal entre P y Δ. La mayor parte de los problemas que se incluyen en este texto contiene relaciones lineales entre

cargas y desplazamientos. Las soluciones más exactas de este problema muestran que la solución aproximada recién obtenida da buenos resultados para Δ/L, del orden de 0.3.

En este problema, se consideró el efecto del cambio de geometría sobre el equilibrio, mientras que en el ejemplo 3-4 se despreció debido a que los desplazamientos eran muy pequeños.

3-3. Principio de Saint-Venant y concentraciones de esfuerzos

El análisis de barras cargadas axialmente en la mecánica de sólidos es muy exacto para las barras de sección transversal constante, cuando éstas transmiten fuerzas de extremo distribuidas uniformemente. Para dichas condiciones ideales, los esfuerzos y las deformaciones unitarias son uniformes en todas las partes. Sin embargo, las fuerzas aplicadas en realidad suelen aproximar fuerzas concentradas y las secciones transversales de los miembros pueden cambiar abruptamente. Esto ocasiona perturbaciones en los esfuerzos y en las deformaciones unitarias en la proximidad de tales fuerzas y en los cambios de sección transversal. En el pasado, esas situaciones se estudiaron analíticamente usando la *teoría matemática de la elasticidad*. Según ese enfoque, se formula el comportamiento de *elementos infinitesimales* bi y tridimensionales y las condiciones de equilibrio, deformación y propiedades mecánicas del material[2] se satisfacen sujetas a las condiciones de frontera prescritas. Recientemente se ha desarrollado un poderoso procedimiento numérico en el que un cuerpo se subdivide en un *número discreto* de elementos finitos, como cuadrados o cubos, y el análisis se lleva a cabo con una computadora. Éste es el análisis por el *método del elemento finito*. El resultado final del análisis por cualquiera de esos dos métodos puede usarse en forma muy eficaz para complementar las soluciones en la ingeniería de la mecánica de sólidos. Veremos a continuación un ejemplo que muestra soluciones más exactas, obtenidas con esos dos métodos avanzados, sobre la naturaleza de la distribución de los esfuerzos bajo cargas concentradas. Dichas soluciones permiten compararlas con las encontradas al aplicar el método de la mecánica de sólidos.

En la figura 3-9(a) se muestra un bloque corto sobre el que actúan fuerzas concentradas en sus extremos. Al analizar los esfuerzos en este bloque como problema bidimensional emplendo los métodos de la teoría de la elasticidad, se obtienen los resultados que se muestran en las figuras 3-9(b), (c) y (d).[3] El esfuerzo *promedio* σ_{prom} dado por la ecuación 1-6 también se muestra en esas figuras. Puede verse que en una sección a una distancia $b/4$ desde un extremo, figura 3-9(b), el esfuerzo normal máximo excede considerablemente al esfuerzo promedio. Para un material elástico, el esfuerzo máximo se vuelve teóricamente infinito bajo la carga concen-

[2]Éstos son los mismos conceptos básicos usados en la mecánica de sólidos.

[3]S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1970, pág. 60. La figura 3-9 está tomada de esta fuente.

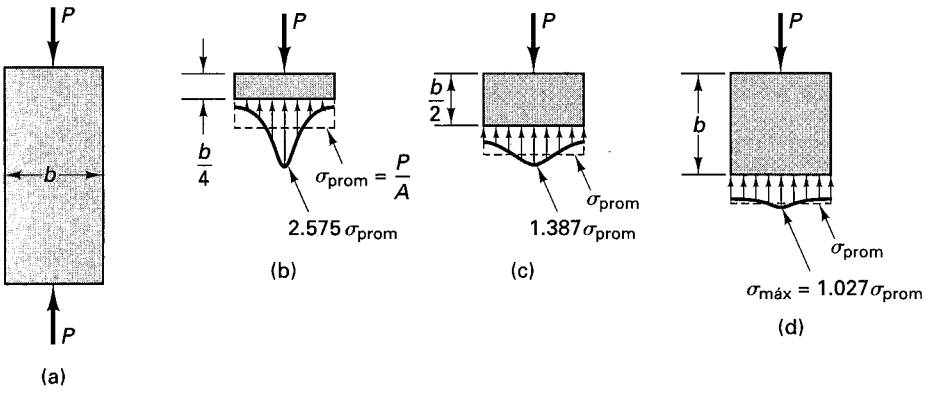


Fig. 3-9 Distribución de esfuerzos cerca de una fuerza concentrada en una placa rectangular elástica.

trada, ya que una fuerza finita actúa sobre un área cero. Sin embargo, en situaciones reales, no es posible la existencia de una fuerza verdaderamente concentrada y virtualmente todos los materiales exhiben algún comportamiento plástico; por tanto, no es posible que se dé un esfuerzo infinito.

Es importante notar dos aspectos básicos de esta solución: El esfuerzo *promedio* para todos los casos, al estar basado en condiciones de equilibrio, es siempre correcto y los esfuerzos normales a una distancia igual al ancho del miembro son esencialmente uniformes.

Esta última observación ilustra el famoso *principio de Saint-Venant*, que fue enunciado por el gran investigador francés de la teoría de la elasticidad en 1855. En términos comunes de ingeniería, este principio simplemente significa que es importante para los esfuerzos la manera de aplicar las fuerzas sólo en la vecindad de la región en que se aplican. Esto también es válido para las perturbaciones causadas por los cambios de sección transversal. Consciente o inconscientemente, este principio es casi siempre aplicado en sistemas idealizados que soportan cargas.

En la figura 3-10 se muestran los resultados de una solución para el mismo problema aplicando el método del elemento finito.[4] La red inicialmente no deformada en que se subdivide en forma arbitraria el bloque plano y la *red deformada sumamente exagerada* causada por la fuerza aplicada, se muestran en la figura 3-10(a). Colocando la red sobre rodillos como se indica, sólo la mitad superior del bloque tiene que ser analizado debido a la simetría respecto a la sección media. Las líneas de contorno para los esfuerzos calculados que se muestran en la figura 3-10(b), indican claramente el desarrollo de grandes esfuerzos en la vecindad de la fuerza concentrada. A diferencia de lo que ocurre en la solución basada en la elasticidad matemática, los esfuerzos en el modelo del elemento finito bajo la

[4]Sobre este tema véase, por ejemplo, O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, vol. 1, 4a. ed. Londres: McGraw-Hill Ltd., 1989; K. J. Bathe y E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976; R. H. Gallagher, *Finite Element Fundamentals*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1975.

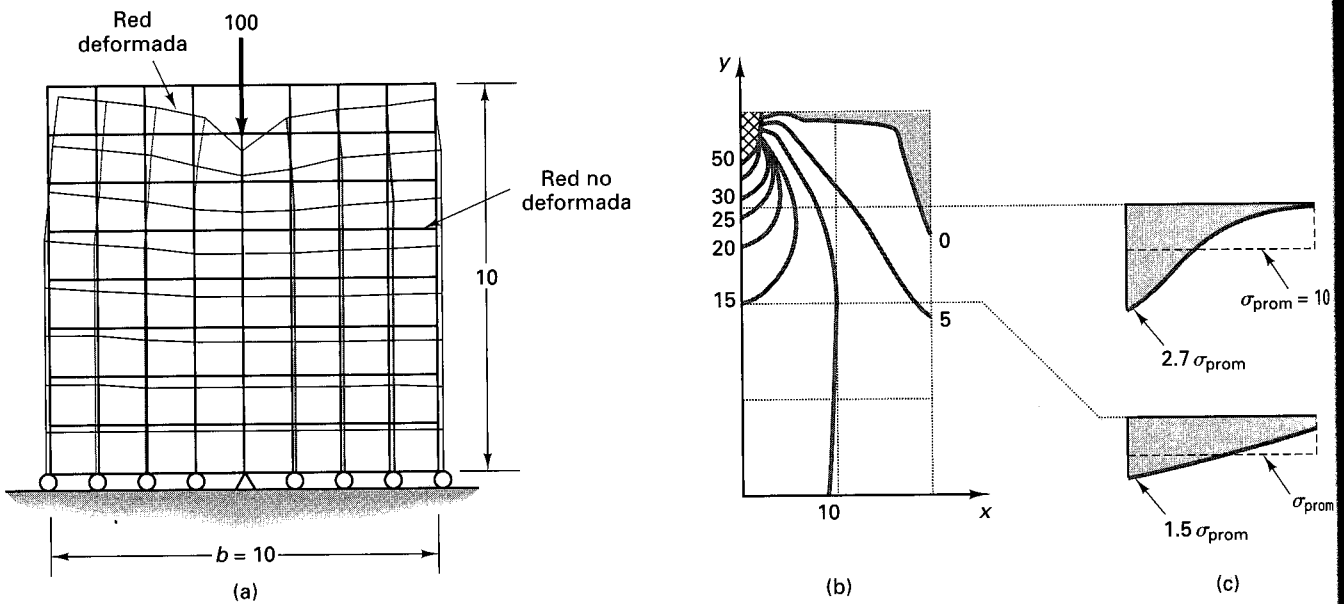


Fig. 3-10 Red deformada y red no deformada de una placa elástica; (b) contorno σ_y; (c) distribuciones de esfuerzo normal en $b/4$ y $b/2$.

carga aplicada son muy grandes, pero finitos, debido al tamaño finito de la red. Como es de esperarse, las esquinas no tienen esfuerzos. La distribución del esfuerzo en $b/4$ y $b/2$ bajo la parte superior del bloque, mostrada en la figura 3-10(c), concuerda razonablemente bien con los resultados más exactos dados en las figuras 3-9(b) y (c). Puede lograrse una mayor exactitud con una red más fina. Sin embargo, por más fina que se escoja la red, el procedimiento del elemento finito no puede proporcionar una solución *en un punto de carga*. En la figura 3-10(b) éste se identifica por un elemento cuadriculado. Lo mismo es cierto en la teoría matemática clásica de la elasticidad y hay que recurrir entonces a los procedimientos de la *mecánica de fractura para obtener información sobre tales problemas*.

El versátil método del elemento finito puede aplicarse a cuerpos de cualquier forma y para cualquier distribución de carga. Su uso en problemas de análisis exactos de esfuerzos es cada vez más amplio. Sin embargo, debido a la simplicidad de los procedimientos vistos en este texto, por lo menos para diseños preliminares, este método sigue siendo indispensable.

El ejemplo anterior es un caso extremo ya que teóricamente parecen ser posibles los esfuerzos infinitos bajo cargas concentradas. Sin embargo, hay numerosas situaciones como en agujeros para tornillos o cambios en sección transversal, donde los esfuerzos normales *máximos* son finitos. Esos esfuerzos máximos, en relación con el esfuerzo *promedio* dado por la ecuación 1-6 para los materiales elásticos lineales, dependen *sólo* de las *proporciones geométricas* de un miembro. La razón del esfuerzo máximo al promedio se llama *factor de concentración de esfuerzos* y se designa en este

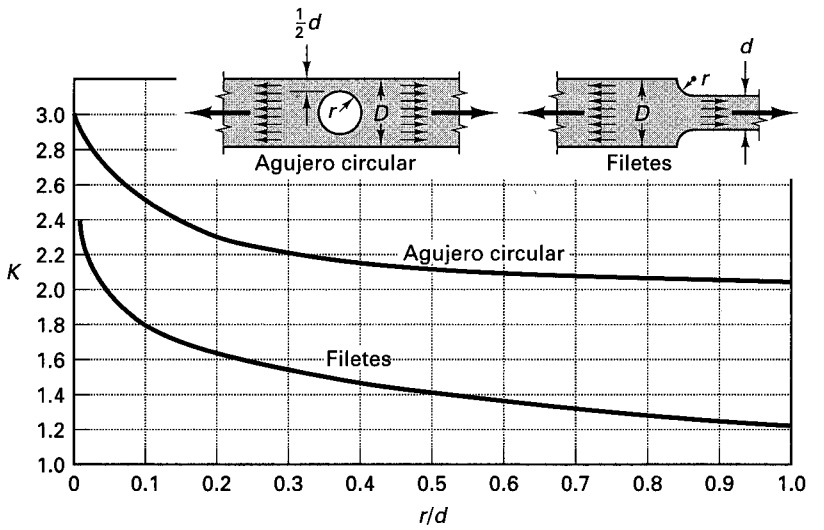


Fig. 3-11 Factores de concentración de esfuerzo para barras planas en tensión.

texto con la letra K. Se dispone de muchos de estos factores en la literatura técnica[5] dados en función de los parámetros geométricos de los miembros. Para el ejemplo anterior, a una profundidad desde la parte superior igual a un cuarto del ancho, $K = 2.575$. Por consiguiente, $\sigma_{máx} = 2.575\ \sigma_{prom}$. Generalizando esto, el esfuerzo normal máximo en una sección es

$$\sigma_{máx} = K\sigma_{prom} = K\frac{P}{A} \tag{3-11}$$

donde K es un factor apropiado de concentración de esfuerzos y P/A es el esfuerzo promedio dado por la ecuación 1-6.

Dos factores de concentración de esfuerzos para barras *planas* cargadas axialmente, particularmente importantes, se muestran en la figura 3-11.[6] Las K que pueden leerse en las gráficas dan la *razón* del esfuerzo normal máximo al esfuerzo promedio sobre la sección neta, como se muestra en la figura 3-12. Una considerable concentración de esfuerzos también ocurre en la raíz de las roscas. Esto depende en gran medida de la agudeza del corte. Para las roscas ordinarias, el factor de concentración de esfuerzos es del orden de 2 a 3. La aplicación de la ecuación 3-11 no presenta dificultades, siempre que se disponga de las gráficas apropiadas o de tablas de valores K. Muchos de los factores se han determinado empleando los métodos de la fotoelasticidad (véase la Sección 13-4).

[5]R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain* 5a. ed. Nueva York: McGraw-Hill, 1975.

[6]Esta figura está tomada del libro de M. M. Frocht, "Factors of stress concentration photoelastically determined", *Trans. ASME*, **57**, 1935, A-67.

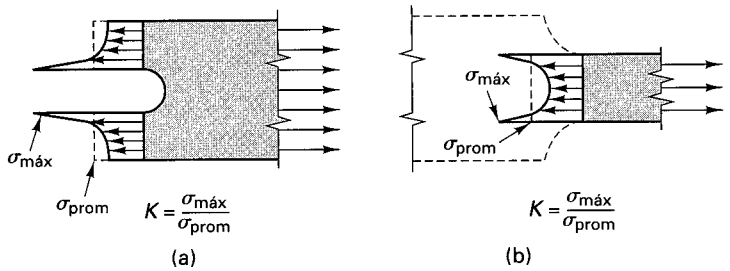


Fig. 3-12 Medición del factor de concentración de esfuerzo K.

En la figura 3-13 se muestra un ejemplo de una fractura por fatiga de bajo ciclaje en tensión de un tornillo de alta resistencia con una resistencia mínima especificada de 120 ksi (830 MPa). Nótese que la fractura ocurrió en la raíz de las roscas.

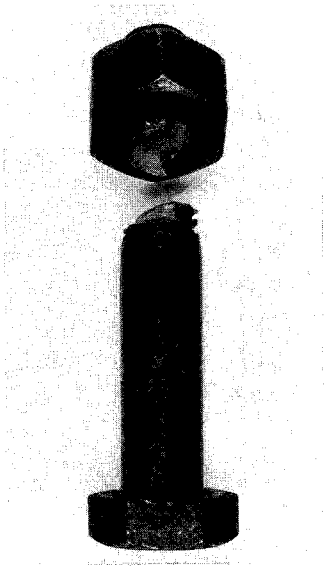


Fig. 3-13 Fractura por fatiga de bajo ciclaje en tensión de un tornillo A325 de acero de 7/8 in.

Ejemplo 3-7

Encuentre el esfuerzo máximo en el extremo A del miembro horquillado AB del ejemplo 1-3.

SOLUCIÓN

Proporciones geométricas:

$$\frac{\text{radio del agujero}}{\text{ancho neto}} = \frac{3/16}{1/2} = 0.375$$

De la figura 3-11:[7] $K \approx 2.15$ para $r/d = 0.375$.
Esfuerzo promedio del ejemplo 1-3: $\sigma_{prom} = P/A_{neta} = 11.2$ ksi
Esfuerzo máximo, ecuación 3.11: $\sigma_{máx} = K\sigma_{prom} = 2.15 \times 11.2 = 24.1$ ksi.

Esta respuesta indica que un gran incremento local en el esfuerzo ocurre en este agujero, un hecho que puede ser altamente significativo.

Al considerar factores de concentración de esfuerzos en el diseño debe recordarse que su determinación teórica o fotoelástica se basa en el empleo de la ley de Hooke. Si los miembros son sometidos a esfuerzos *gradualmente* más allá del límite proporcional de un material *dúctil*, esos factores pierden su importancia. Por ejemplo, considere una barra plana de *acero dulce* con las proporciones indicadas en la figura 3-14, que es sometida a una fuerza gradualmente creciente P. La distribución de los esfuerzos será geométricamente similar a la mostrada en la figura 3-12 hasta que $\sigma_{máx}$ alcanza el punto de fluencia del material. Esto se ilustra en el diagrama superior de la figura 3-14. Sin embargo, con un incremento adicional de la fuerza aplicada, $\sigma_{máx}$ permanece con el mismo valor, ya que una gran canti-

[7]En realidad, la concentración del esfuerzo depende de la condición del agujero, es decir, de si está vacío o lleno con un pasador o un tornillo.

dad de deformación puede tener lugar mientras el material fluye. Por tanto, el esfuerzo en A permanece virtualmente congelado en el mismo valor. No obstante, por equilibrio, los esfuerzos que actúan sobre el área neta deben ser suficientemente grandes para resistir la P incrementada. Esta condición se muestra en el diagrama medio de la figura 3-14. Finalmente, para un material idealmente plástico, el esfuerzo se vuelve uniforme a través de toda la sección neta entera. Por consiguiente, para materiales dúctiles antes de la ruptura, la concentración local de esfuerzos es prácticamente eliminada y se tiene una distribución casi uniforme del esfuerzo a través de la sección neta antes de que ocurra la estrechez.

El enunciado anterior no es totalmente cierto para los materiales menos dúctiles que el acero dulce. Sin embargo, la tendencia es en esa dirección a menos que el material sea muy frágil, como el vidrio. La conclusión presentada es válida para situaciones donde la fuerza se aplica gradualmente o es de carácter estático. *No es aplicable a cargas fluctuantes, como las que se tienen en algunas partes de máquinas.* Para cargas de fatiga, el nivel del esfuerzo de trabajo que realmente se alcanza *localmente* determina el comportamiento por fatiga del miembro. El esfuerzo máximo permisible se fija con ayuda de un diagrama *S-N* (Sección 2-10). *La falla de la mayoría de las partes de máquinas puede ser adjudicada a un agrietamiento progresivo que se origina en puntos de altos esfuerzos.* En el diseño de máquinas, entonces, las concentraciones de esfuerzos son de máxima importancia, aunque algunos diseñadores de máquinas piensan que los factores teóricos de concentraciones de esfuerzos son algo grandes. Aparentemente, en la actualidad existe la tendencia a suavizar los picos de los esfuerzos, aun en miembros sometidos a cargas cíclicas.

Del análisis anterior y de los diagramas acompañantes debería ser evidente el por qué un diseñador competente de máquinas trata de "aerodinamizar" las uniones y transiciones de elementos que conforman una estructura.

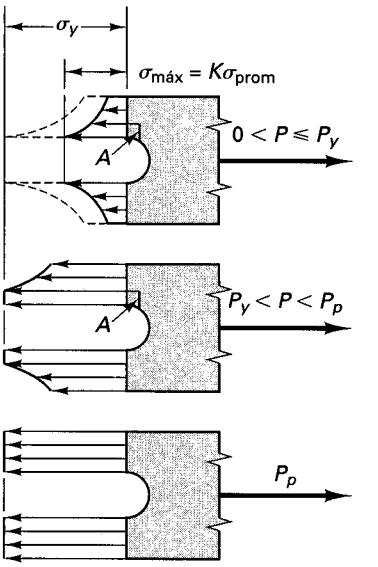


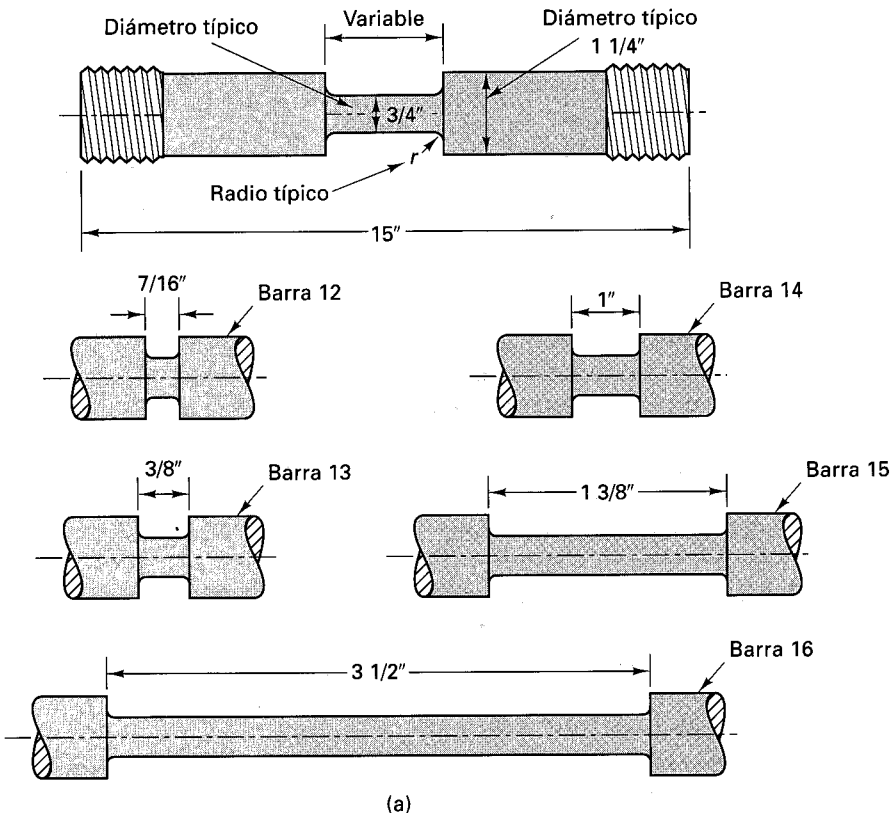
Fig. 3-14 Distribución del esfuerzo en un agujero de una barra plana idealmente plástica con una carga P aplicada progresivamente en forma creciente.

3-4. La prueba de tensión revisitada

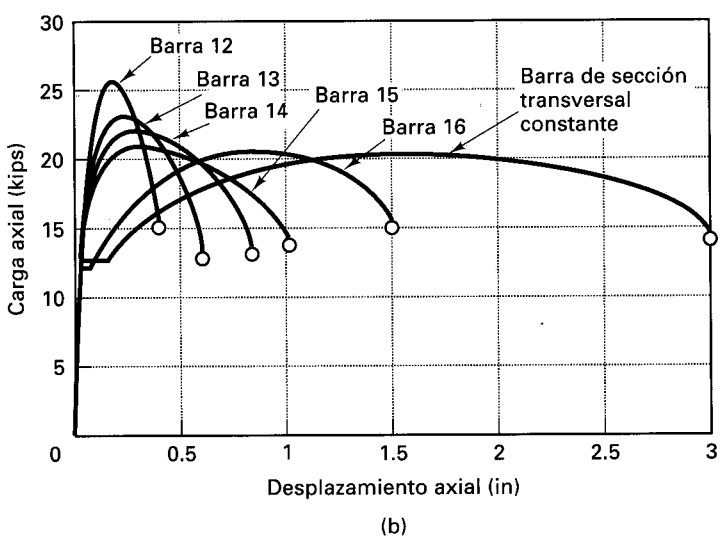
En las Secciones 2-2 y 2-3 se describió la prueba convencional de tensión. Ahora que conocemos el concepto de concentración de esfuerzos, es apropiado señalar las serias consecuencias que tiene la presencia de elevadores de esfuerzos en la prueba de tensión. Para este fin, considere una secuencia de probetas de prueba hechas de la misma barra circular de acero dulce con diferentes tamaños de ranuras maquinadas, como se muestra en la figura 3-15(a).[8] El ancho más pequeño de la ranura circular para la barra 12 es de 0.5 in (12.72 mm), para la barra 13 es de 0.75 in (19.05 mm) y el más grande, para la barra 16, es de 8 in (203.2 mm). El vástago de una probeta circular como el mostrado en la figura 3-15(a) es usualmente de 0.505 in (12.8 mm) de diámetro y de 15 in (381 mm) de longitud.

Los diagramas carga-desplazamiento para el grupo anterior de probetas hechas del mismo material, como se muestra en la figura 3-15(b), son enteramente diferentes. El material con la pequeña ranura en la barra 12

[8]Véase C.W. McGregor, "Yield point of mild steel", *Trans. ASME*, **53**, APM-53-15, págs. 187-200. Este trabajo fue sugerido por S. Timoshenko.



(a)



(b)

Fig. 3-15 (a) Diferentes ranuras en probetas para pruebas en tensión; (b) Diagramas correspondientes de carga-desplazamiento (adaptado de McGregor).

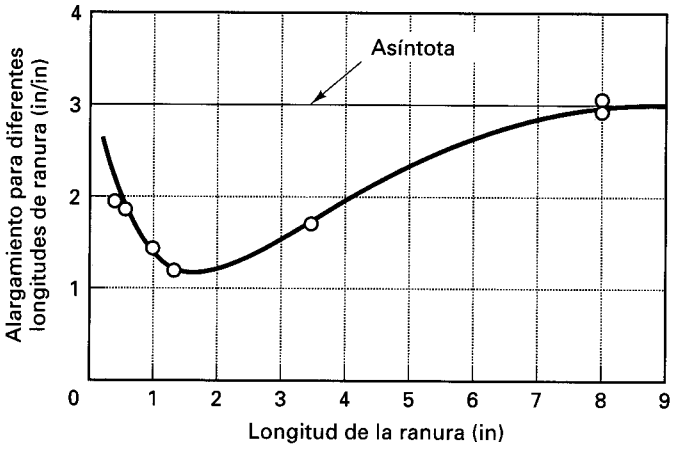


Fig. 3-16 Alargamiento en función de la longitud de la ranura.

está tan restringido lateralmente por el material a bajo esfuerzo en la barra de mayor sección transversal arriba y abajo de la ranura, que no puede deformarse plásticamente y la resistencia del material es movilizada para resistir el esfuerzo axial. La probeta muestra una peligrosa y pequeña ductilidad, aunque su resistencia axial es grande. La barra 13, con una ranura ligeramente más larga, en tanto disminuye su resistencia axial, exhibe más ductilidad y una resistencia axial menor. Las barras 14 y 15 muestran un decremento adicional en resistencia axial pero muestran una mejor ductilidad. Un comportamiento más dúctil está presente en la barra 15 y los resultados de la barra 16 se aproximan a los de una prueba con probeta de longitud estándar.

Es conveniente observar el porcentaje de alargamiento en barras con ranuras de longitud diferente (figura 3-16). Puede verse aquí que conforme se incrementa el ancho de la ranura, el porcentaje de alargamiento tiende asintóticamente a un valor constante. Esto explica la razón de que la longitud estándar de una barra de prueba sea relativamente larga.

El comportamiento tan diferente del material en muescas y ranuras se observa claramente en la figura 3-16. Ahora puede examinarse con cuidado la distribución real del esfuerzo en y cerca de una ranura, con el método del elemento finito usando una red muy fina. El problema es muy importante en aplicaciones críticas.

3-5. Energía de deformación elástica para esfuerzo uniaxial

En mecánica, la energía se define como la capacidad de efectuar trabajo y éste es el producto de una fuerza por la distancia en la dirección en que actúa la fuerza. En cuerpos sólidos deformables, los esfuerzos multiplicados por sus áreas respectivas son fuerzas y las deformaciones son distancias. El producto de esas dos cantidades es el *trabajo interno* hecho en un cuerpo por fuerzas aplicadas externamente. Este trabajo interno es almacenado en

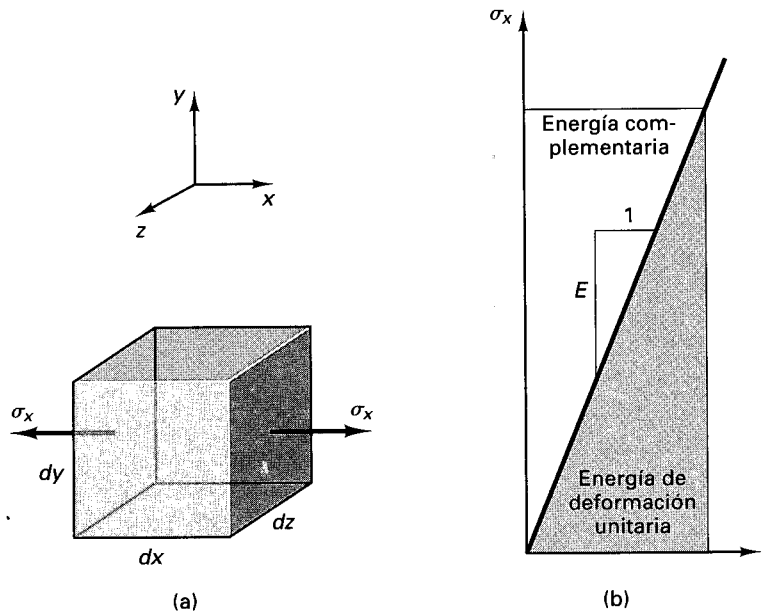


Fig. 3-17 (a) Elemento en tensión uniaxial y (b) diagrama hookeano esfuerzo-deformación unitaria.

un cuerpo elástico como *energía interna elástica de deformación* o *energía elástica de deformación unitaria*. Veremos a continuación un procedimiento para calcular la energía interna en barras cargadas axialmente.

Considere un elemento infinitesimal como el mostrado en la figura 3-17(a) sometido a un esfuerzo normal σ_x. La fuerza que actúa sobre la cara derecha o la izquierda de este elemento es $\sigma_x\, dy\, dz$, donde $dy\, dz$ es un área infinitesimal del elemento. Debido a esta fuerza, el elemento se alarga una cantidad $\epsilon_x\, dx$, donde ϵ_x es la deformación unitaria normal en la dirección x. Si el elemento está hecho de un material elástico lineal, el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria; figura 3-17(b). Por tanto, si el elemento está inicialmente libre de esfuerzos, la fuerza que finalmente actúa sobre el elemento crece linealmente desde cero hasta que alcanza su valor pleno. La fuerza promedio que actúa sobre el elemento, mientras tiene lugar la deformación es $\frac{1}{2}\sigma_x\, dy\, dz$. Esta fuerza promedio multiplicada por la distancia a través de la cual actúa, es el trabajo hecho sobre el elemento. Para un cuerpo perfectamente elástico, ninguna energía se disipa y el trabajo hecho sobre el elemento se almacena como energía interna de deformación unitaria recuperable. La energía interna de deformación unitaria elástica U para un elemento infinitesimal sometido a esfuerzo uniaxial es entonces

$$dU = \underbrace{\underbrace{\tfrac{1}{2}\sigma_x\, dy\, dz}_{\text{fuerza promedio}} \times \underbrace{\varepsilon_x\, dx}_{\text{distancia}}}_{\text{trabajo}} = \tfrac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\, dx\, dy\, dz = \tfrac{1}{2}\sigma_x\varepsilon_x\, dV \qquad (3\text{-}12)$$

donde dV es el volumen del elemento.

Reescribiendo en otra forma la ecuación 3-12, se obtiene la energía de deformación unitaria almacenada en un cuerpo elástico por *unidad de volumen* del material o su *densidad de energía de deformación unitaria* U_o. Así entonces,

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} \tag{3-13}$$

Esta expresión puede interpretarse gráficamente como un área bajo la recta inclinada del diagrama esfuerzo-deformación unitaria; figura 3-17(b). El área correspondiente encerrada por la recta inclinada y el eje vertical se llama *energía complementaria*, concepto que se usará en el capítulo 18. Para materiales elásticos lineales, las dos áreas son iguales. Expresiones análogas a la ecuación 3-13 son aplicables a los esfuerzos normales σ_y y σ_z y a las deformaciones unitarias normales ε_y y ε_z correspondientes.

Como en el rango elástico se aplica la ley de Hooke, $\sigma_x = E\varepsilon_x$, la ecuación 3-13 puede escribirse como

$$U_o = \frac{dU}{dV} = \frac{E\varepsilon_x^2}{2} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \tag{3-14}$$

o

$$U = \int_{\text{vol}} \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \tag{3-15}$$

Estas formas de la ecuación para la energía elástica de deformación unitaria son convenientes en las aplicaciones, aunque ellas ocultan la dependencia en la expresión de la energía de la fuerza y la distancia.

Para un material en particular, la sustitución en la ecuación 3-14 del valor del esfuerzo en el límite proporcional da un índice de la capacidad del material de almacenar o de absorber energía sin deformación permanente. La cantidad así encontrada se llama *módulo de resiliencia* y se usa para diferenciar los materiales en aplicaciones donde la energía debe ser absorbida por los miembros. Por ejemplo, un acero con límite proporcional de 200 MPa y una E de 200 GPa tiene un módulo de resiliencia de $\sigma^2/2E = 200^2/2 \times 200 \times 10^3 = 0.10$ N-mm/mm^3, mientras que una madera de pino Douglas de buena calidad, con límite proporcional de 40 MPa y una E de 12 GPa, tiene un módulo de resiliencia de 0.07 N · mm/mm^3. (Véase la figura 2-20)

Por un razonamiento análogo, el área bajo el diagrama completo esfuerzo-deformación unitaria en la figura 3-18, da una medida de la capacidad del material de absorber energía hasta la fractura y se llama *tenacidad*. Cuanto mayor es el área total bajo el diagrama esfuerzo-deformación unitaria, más tenaz es el material. En el rango inelástico, sólo es recuperable una pequeña parte de la energía absorbida por un material. La mayor parte de la energía se *disipa* en deformar permanentemente el material y se pierde en forma de calor. La energía que puede recuperarse cuando una probeta ha sido sometida a un esfuerzo como el obtenido en el punto A en la figura 3-18(b), está representada por el triángulo ABC. La recta AB de este triángulo es paralela a la recta OD, ya que todos los materiales se comportan esencialmente en forma elástica al liberarlos de esfuerzos.

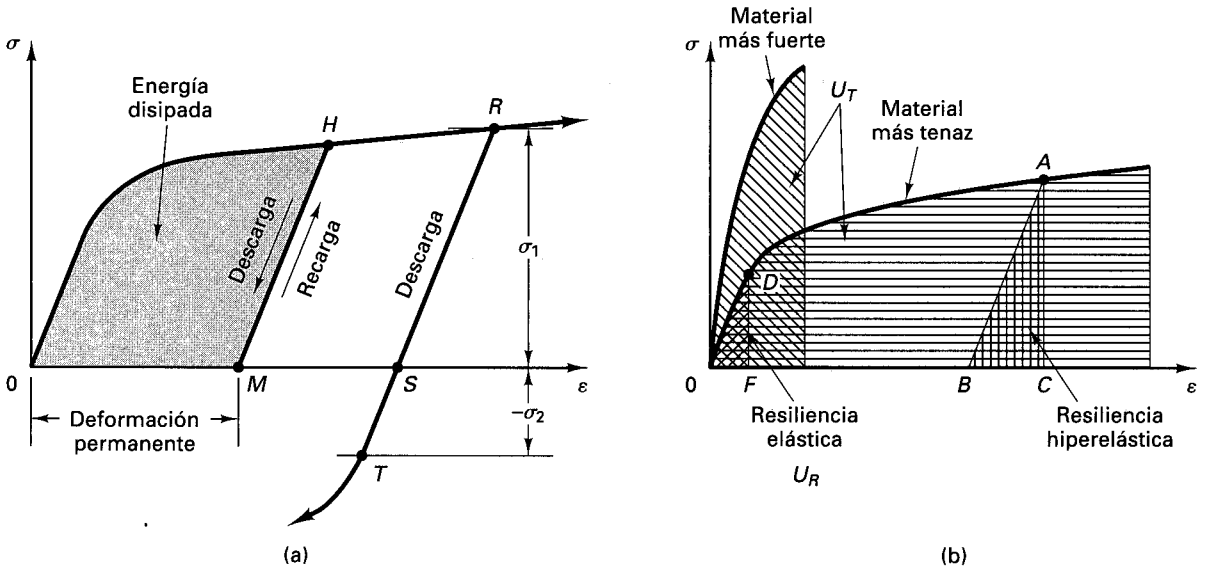


Fig. 3-18 Algunas propiedades típicas de materiales.

Ejemplo 3-8

Dos barras elásticas cuyas proporciones se muestran en la figura 3-19 deben absorber la misma cantidad de energía generada por fuerzas axiales actuando en el extremo libre. Despreciando las concentraciones de esfuerzos, compare los esfuerzos en las dos barras. El área transversal de la barra a la izquierda es A y el de la derecha es A y $2A$, como se muestra.

SOLUCIÓN

La barra que se muestra en la figura 3-19(a) es de área transversal uniforme; por tanto, el esfuerzo normal σ_1 es constante en todas las partes. Usando la ecuación 3-15 e integrando sobre el volumen V de la barra, puede escribirse la energía total para la barra como

$$U_1 = \int_V \frac{\sigma_1^2}{2E}\,dV = \frac{\sigma_2^2}{2E}\int_V dV = \frac{\sigma_1^2}{2E}(AL)$$

donde A es el área de la sección transversal de la barra y L es su longitud.

La barra de la figura 3-19(b) es de sección transversal variable. Por ello, si el esfuerzo σ_2 actúa en la parte inferior de la barra, el esfuerzo en la parte superior es $\frac{1}{2}\sigma_2$. De nuevo, usando la ecuación 3-15 e integrando sobre el

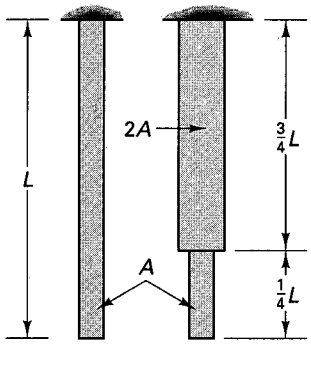


Fig. 3-19

volumen de la barra, se encuentra que la energía total que esta barra absorberá en términos del esfuerzo σ_2 es

$$U_2 = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \frac{\sigma_2^2}{2E}\int_{\text{parte inferior}} dV + \frac{(\sigma_2/2)^2}{2E}\int_{\text{parte superior}} dV$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{AL}{4}\right) + \frac{(\sigma_2/2)^2}{2E}\left(2A\,\frac{3L}{4}\right) = \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{5}{8}AL\right)$$

Si ambas barras van a absorber la misma cantidad de energía, $U_1 = U_2$ y

$$\frac{\sigma_1^2}{2E}(AL) = \frac{\sigma_2^2}{2E}\left(\frac{5}{8}AL\right) \quad \text{o} \quad \sigma_2 = 1.265\sigma_1$$

Por consiguiente, para la misma carga de energía, el esfuerzo en la barra "reforzada" es 26.5% mayor que en la barra simple. El aumento del área de la sección transversal sobre una parte de la barra es en realidad desfavorable. Esta situación no se encuentra en el diseño de miembros por cargas estáticas.

3-6. Deflexiones por el método de la energía

El principio de la conservación de la energía puede usarse en forma efectiva para encontrar deflexiones de miembros elásticos debido a fuerzas aplicadas. Métodos generales para hacer esto se verán en los capítulos 17 y 18. Aquí consideraremos el caso más limitado de determinar la deflexión causada por la aplicación de una sola fuerza axial. Con tal fin, la energía interna de deformación U de un miembro se iguala al trabajo externo W_e debido a la fuerza aplicada. Es decir,

$$\boxed{U = W_e} \tag{3-16}$$

En este tratamiento se supone que la fuerza externa es aplicada gradualmente. Esto significa que, al ser aplicada la fuerza, su efecto total sobre un miembro se alcanza de manera similar al mostrado en la figura 3-17(b) para el esfuerzo. Por tanto, el trabajo externo W_e es igual a un medio de la fuerza total multiplicada por la deflexión en la dirección de la acción de la fuerza. En la sección siguiente, este enfoque será generalizado a cargas dinámicas.

Ejemplo 3-9

Encuentre la deflexión del extremo libre de una barra elástica de área transversal A constante y longitud L debida a una fuerza axial P aplicada en el extremo libre.

SOLUCIÓN

Si la fuerza P se aplica gradualmente a la barra, el trabajo externo, $W_e = \frac{1}{2}P\Delta$, donde Δ es la deflexión del extremo de la barra. La expresión para la energía interna de deformación U de la barra se determinó en el ejemplo 3-8 y como $\sigma_1 = P/A$, es igual a

$$U = \frac{\sigma_1^2}{2E}AL = \frac{P^2L}{2AE}$$

Entonces, de $W_e = U$,

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L}{2AE} \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{PL}{AE}$$

que es la misma ecuación que la ecuación 3-4.

El uso de la ecuación 3.16 puede extenderse a sistemas de barras que consisten de varios miembros. Como la energía interna de deformación es una cantidad *escalar* positiva, las energías para varios miembros pueden sumarse aritméticamente. Esta energía de deformación total U puede igualarse al trabajo externo W_e causado por una fuerza para encontrar la deflexión en la dirección de esa fuerza. Como ilustración, para la ménsula mostrada en la figura 3-6 del ejemplo 3-4,

$$U = \frac{1}{2}\frac{P_{AB}^2 L_{AB}}{A_{AB}E} + \frac{1}{2}\frac{P_{BC}^2 L_{BC}}{A_{BC}E} = \frac{1}{2}P\Delta$$

donde los subíndices se refieren a los miembros. Una solución de esta ecuación da la deflexión Δ debida a la fuerza P.

Este método se amplía en el capítulo 18 a la solución de problemas con cualquier número de fuerzas aplicadas para encontrar las deflexiones de cualquier punto en cualquier dirección.

3-7. Cargas dinámicas y de impacto

Un peso que cae libremente o un cuerpo móvil que golpea una estructura, genera lo que se llama una carga o fuerza *dinámica* o *de impacto*. Los problemas que implican a tales fuerzas pueden ser analizados simplemente con base en las siguientes hipótesis:

1. Los materiales se comportan elásticamente y no tiene lugar disipación de energía en el punto de impacto o en los soportes, debido a la deformación local inelástica de los materiales.
2. La inercia de un sistema que resiste un impacto puede despreciarse.
3. La deflexión de un sistema es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada, ya sea ésta aplicada dinámica o estáticamente.

Entonces, usando el principio de conservación de la energía, puede suponerse adicionalmente que en el *instante* en que es detenido un cuerpo en movimiento, su energía cinética se transforma completamente en energía interna de deformación del sistema resistente. En este instante ocurre la deflexión máxima de un sistema resistente y comienzan las vibraciones. Sin embargo, como sólo son de interés primario los esfuerzos y deflexiones máximos, no veremos aquí ese tema.

Como ejemplo de una fuerza dinámica aplicada a un sistema elástico, consideremos un cuerpo que al caer golpea un resorte. Esta situación se ilustra en la figura 3-20(a), donde un peso W cae desde una altura h sobre la longitud libre de un resorte. *Este sistema representa un caso muy general ya que conceptualmente, todo sistema elástico puede ser tratado como un resorte equivalente.* Usando la constante de resorte k, la deflexión estática Δ_{est} del resorte debido al peso W es $\Delta_{est} = W/k$. De manera similar, la deflexión dinámica máxima $\Delta_{máx} = P_{din}/k$, donde P_{din} es la fuerza dinámica máxima experimentada por el resorte. Por tanto, la fuerza dinámica en términos del peso W y de las deflexiones del resorte es

$$P_{din} = \frac{\Delta_{máx}}{\Delta_{est}} W \tag{3-17}$$

Esta relación se muestra en la figura 3-20(b).

En el instante en que el resorte sufre su deflexión máxima, toda la energía del peso que cae se transforma en energía de deformación del resorte. Por tanto, una ecuación que represente la igualdad del trabajo externo y la energía interna de deformación puede escribirse como sigue:

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2} P_{din} \Delta_{máx} \tag{3-18}$$

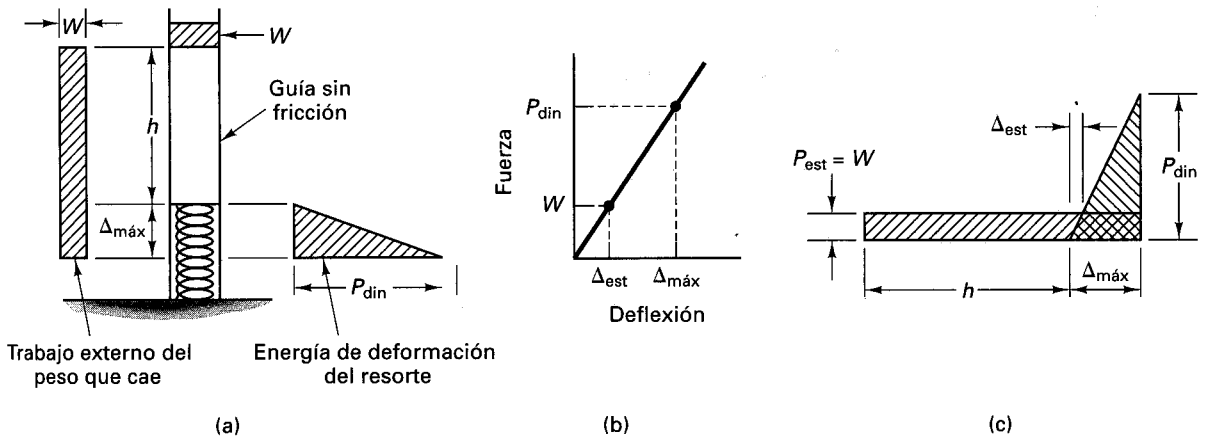


Fig. 3-20 Comportamiento de un sistema elástico bajo una fuerza de impacto.

Una interpretación gráfica de esta ecuación se muestra en la figura 3-20(c). Nótese que aparece un factor de un medio enfrente de la expresión para la energía de deformación ya que el resorte toma la carga *gradualmente*. Entonces, de la ecuación 3-17,

$$W(h + \Delta_{máx}) = \frac{1}{2}\frac{(\Delta_{máx})^2}{\Delta_{est}}W$$

o

$$(\Delta_{máx})^2 - 2\Delta_{est}\Delta_{máx} - 2h\Delta_{est} = 0$$

Por consiguiente,

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est} + \sqrt{(\Delta_{est})^2 + 2h\Delta_{est}}$$

o

$$\Delta_{máx} = \Delta_{est}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}\right) \tag{3-19}$$

y, usando de nuevo la ecuación 3-17,

$$\boxed{P_{din} = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}\right)} \tag{3-20}$$

La ecuación 3-19 da la deflexión máxima que ocurre en un resorte al ser golpeado por un peso W que cae desde una altura h y la ecuación 3-20 da la fuerza máxima experimentada por el resorte para la misma condición. Para aplicar esas ecuaciones, la deflexión estática Δ_{est} causada por el peso W aplicado gradualmente, se calcula con las fórmulas deducidas antes.

Después de encontrar la fuerza dinámica efectiva P_{din}, puede usarse en los cálculos como una fuerza estática. El efecto amplificador de una fuerza estática al aplicarla dinámicamente se llama *factor de impacto* y está dada por la expresión en paréntesis en las ecuaciones 3-19 y 3-20. El factor de impacto es sorprendentemente grande en la mayor parte de los casos. Por ejemplo, si una fuerza se aplica a un sistema elástico *repentinamente* (es decir, $h = 0$), es equivalente a *dos veces* la misma fuerza aplicada *gradualmente*. Si h es grande en comparación con Δ_{est}, el factor de impacto es aproximadamente igual a $\sqrt{2h/\Delta_{est}}$.

Pueden obtenerse ecuaciones similares para el caso en que un peso W se mueve horizontalmente con velocidad v y es detenido repentinamente por un cuerpo elástico. Para este fin, es necesario reemplazar el trabajo externo hecho por el peso al caer en la deducción anterior por la energía cinética de un cuerpo móvil, *usando un sistema consistente de unidades.* Por tanto, como la energía cinética de un cuerpo móvil es $Wv^2/2g$, donde g es la aceleración de la gravedad, puede demostrarse que

$$P_{din} = W\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{est}}} \quad \text{y} \quad \Delta_{máx} = \Delta_{est}\sqrt{\frac{v^2}{g\Delta_{est}}} \tag{3-21}$$

donde Δ_{est} es la deflexión estática causada por W que actúa en la dirección horizontal. En la ecuación 3-21, W está en unidades comunes en el sistema inglés.

Ejemplo 3-10

Determine el esfuerzo máximo en la barra de acero de la figura 3-21 causado por una masa de 4 kg que cae libremente una distancia de 1 m. Considere dos casos: uno como se muestra en la figura y otro cuando se retira la arandela de hule. Para la barra de acero considere $E = 200$ GPa y para la arandela tome $k = 4.5$ N/mm.

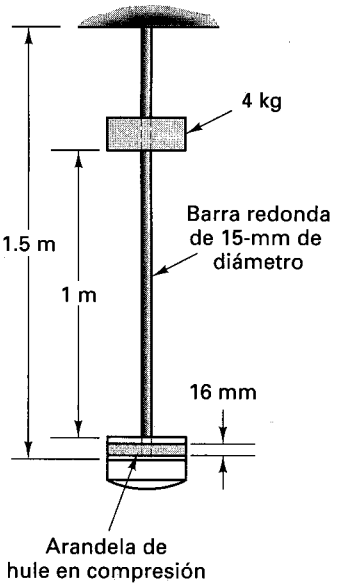


Fig. 3-21

SOLUCIÓN

La masa de 4 kg aplica una fuerza estática $P = ma = 4 \times 9.81 = 39.2$ N. El área de la barra es $A = \pi \times 15^2/4 = 177$ mm^2. Note que la longitud de la barra es de 1500 mm.

Solución para barra con arandela:

$$\Delta_{est} = \frac{PL}{AE} + \frac{P}{k} = \frac{39.2 \times 1500}{177 \times 200 \times 10^3} + \frac{39.2}{4.5}$$
$$= 1.66 \times 10^{-3} + 8.71 = 8.71 \text{ mm}$$

$$\sigma_{máx-din} = \frac{P_{din}}{A} = \frac{39.2}{177}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 1}{8.71 \times 10^{-3}}}\right) = 3.58 \text{ MPa}$$

Solución para barra sin arandela:

$$\sigma_{máx-din} = \frac{39.2}{177}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 1}{1.66 \times 10^{-6}}}\right) = 243 \text{ MPa}$$

La gran diferencia en los esfuerzos para las dos soluciones sugiere la necesidad de sistemas flexibles para resistir cargas dinámicas. Un estudio más amplio de este problema y tomando en consideración los resultados obtenidos en el ejemplo 3-8, conduce a la conclusión que para obtener los esfuerzos dinámicos más pequeños para el mismo sistema, se debe

1. seleccionar un material con un módulo elástico pequeño;
2. hacer grande el volumen total del miembro;
3. esforzar el material uniformemente y evitar concentraciones de esfuerzos.

Pueden citarse varios casos como ilustraciones de situaciones prácticas donde se usan esos principios. La madera se usa en durmientes para ferrocarriles porque su E es pequeña y el costo por unidad de volumen del material es pequeño. En cilindros neumáticos y martillos neumáticos, figura 3-22, se usan pernos muy largos para unir los extremos al tubo. Los pernos largos proporcionan un gran volumen de material, que, en operación, queda uniformemente esforzado en tensión. En las primeras etapas del desarrollo de este equipo se usaban pernos cortos y ocurrían fallas frecuentes.

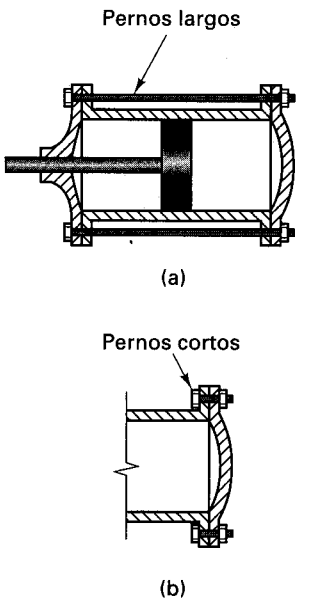


Fig. 3-22 (a) Buen diseño y (b) mal diseño de un cilindro neumático.

PROBLEMAS

Sección 3-2

3-1. Una barra de aleación de magnesio de 500 mm de largo debe resistir una fuerza axial de tensión de 10 kN. ¿Cuál debe ser el diámetro de la barra para que no se exceda un esfuerzo axial de 100 MPa o un alargamiento de 0.1%?

3-2. Una barra de acero de 10 m de longitud usada en un mecanismo de control debe transmitir una fuerza de tensión de 5 kN sin alargarse más de 4 mm o exceder un esfuerzo permisible de 150 MPa. (a) ¿Qué diámetro se requiere en la barra? Dé la respuesta al milímetro más cercano. $E = 210$ GPa. ¿Qué gobierna el diseño, la resistencia o la rigidez? (b) Encuentre la constante de resorte para la barra.

3-3. Cambie los datos en el ejemplo 3-2 a los siguientes: $P_1 = 10$ kips, $P_3 = 100$ kips y $P_4 = 50$ kips; los segmentos de barra AB, BC y CD son, respectivamente, de 4, 2 y 3 ft de longitud. Encuentre entonces (a) la fuerza P_2 necesaria para el equilibrio y (b) el alargamiento total de la barra AD. El área transversal de la barra de A a B es de 1 in^2, de B a C de 4 in^2 y de C a D de 2 in^2. Sea $E = 30 \times 10^3$ ksi. (c) Trace el diagrama de desplazamiento axial a lo largo de la barra. (d) Encuentre la constante del resorte axial de la barra.

3-4. Una masa $m = 2$ kg está unida a una barra de una aleación de níquel y tiene 20 mm de diámetro y de 400 mm de longitud. Determine la frecuencia de vibración. Considere la masa concentrada en un punto y desprecie el peso de la barra. Para la barra, sea $E = 180$ GPa. La frecuencia natural de vibración es $f = \sqrt{g/\Delta}/(2\pi)$ Hz, donde g es la aceleración de la gravedad y Δ es la deflexión estática del sistema.

3-5. Considere las tres esferas metálicas descritas en el problema P1-13 y encuentre una solución con las masas localizadas para generar esfuerzos mínimos en los alambres. Luego (a) grafique la distribución de las fuerzas axiales en los tres alambres, (b) grafique la deformación unitaria axial en los alambres y (c) dibuje el diagrama de desplazamiento para las esferas. Suponga que las deformaciones importantes ocurren sólo en los alambres (es decir, considere rígidas a las esferas). Todos los alambres tienen la misma longitud (1000 mm) y, comenzando desde la parte superior, tienen los siguientes diámetros: 2 mm, 1.5 mm y 1 mm, respectivamente. Los alambres están hechos de acero de alta resistencia con $E = 200$ GPa y resistencia última $\sigma_{últ} = 1200$ MPa.

3-6. En el ejemplo 3-2, figura 3-3, suponga que el punto O está fijo. Invierta la dirección de la fuerza P_4 y determine su magnitud de manera que el punto D no se mueva. Grafique la fuerza axial, la deformación unitaria axial y los diagramas de desplazamiento para la barra con las condiciones reformuladas.

3-7. Suponga que los segmentos L_1, L_2 y L_3 del miembro redondo de sección transversal variable en el problema 1-10 son de, respectivamente, 600, 500 y 400 mm de longitud. Grafique la fuerza axial, la deformación unitaria axial y los diagramas de desplazamiento a lo largo de la longitud de la barra. $E = 200$ GPa. Encuentre la constante de resorte axial para el sistema.

3-8. Una barra maciza de 50 mm de diámetro y 2000 mm de longitud consta de una parte de acero y una de aluminio unidas entre sí, como se muestra en la figura. Cuando se aplica la fuerza P al sistema, un extensómetro unido a la parte de aluminio indica una deformación unitaria axial de 873 μm/m. (a) Determine la magnitud

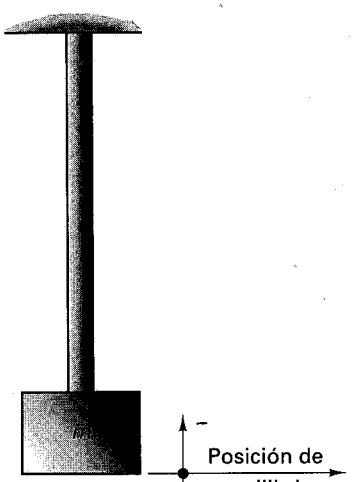


Fig. P3-4

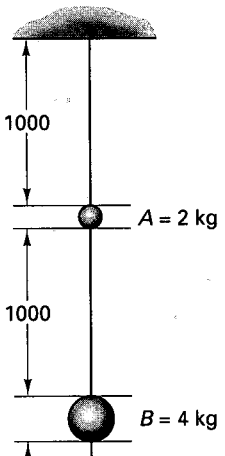


Fig. P3-5

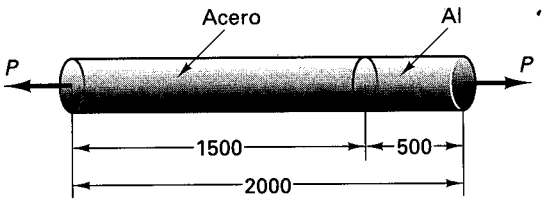


Fig. P3-8

de la fuerza aplicada P. (b) Si el sistema se comporta elásticamente, encuentre el alargamiento total de la barra. Sea $E_{ac} = 200$ GPa y $E_{al} = 70$ GPa.

3-9. Una barra de aleación de magnesio AE42X1 de 600 mm de longitud con un área transversal de 200 mm^2 está cargada axialmente por una fuerza P. El diagrama esfuerzo-deformación unitaria del material puede idealizarse como se muestra en la figura. Si esta barra se deforma cinco veces la deformación desplazada asociada al 0.2% de la resistencia a tensión, ¿que fuerza toma la barra? Si la fuerza aplicada se libera, ¿qué deformación permanente queda en la barra?

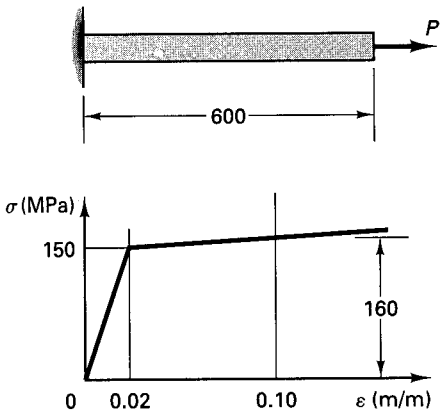


Fig. P3-9

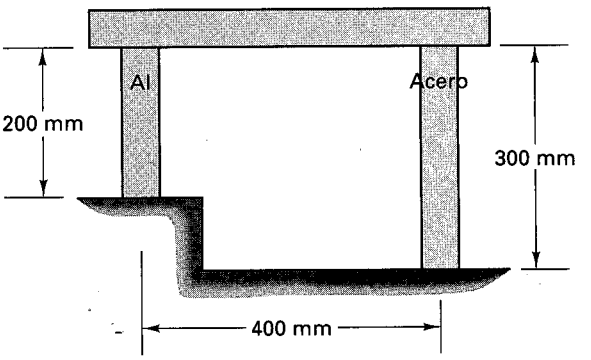


Fig. P3-10

3-10. Una barra rígida descansa sobre columnas de aluminio y acero, como se muestra en la figura. (a) Determine la inclinación de la barra horizontal después de que ocurre una elevación de temperatura de 100°C. Suponga que los coeficientes de expansión térmica para el aluminio y el acero son, respectivamente, 23.2×10^{-6}/°C y 11.7×10^{-6}/°C. Dibuje con una escala exagerada la posición de la barra después de la elevación de la temperatura. (b) ¿Qué esfuerzos se desarrollan en las columnas si sus partes superiores están impedidas de dilatarse? Sean los módulos elásticos del aluminio y del acero, respectivamente, 75 GPa y 200 GPa. Compare los esfuerzos obtenidos con los dados en la Tabla 1 del apéndice. (*Sugerencia:* La tendencia a dilatarse térmicamente es contrarrestada por la contracción elástica.)

3-11. Una barra de acero de 2 in de ancho y 0.5 in de espesor tiene 25 in de longitud, como se muestra en la figura. Al aplicar la fuerza P, el ancho de la barra se reduce en 0.3×10^{-3} in. Estime la magnitud de la fuerza aplicada P y el alargamiento axial de la barra. Suponga comportamiento elástico y considere $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\nu = 0.25$.

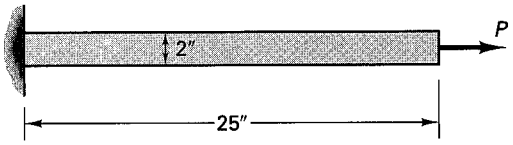


Fig. P3-11

3-12. Una placa de acero de 10 mm de espesor, 180 mm de ancho y 2000 mm de longitud está sometida a un conjunto de fuerzas de fricción uniformemente distribuidas a lo largo de sus dos bordes, como se muestra en la figura. Si la disminución total en la dimensión transversal de 180 mm en la sección *a-a* debido a las fuerzas aplicadas es de 16×10^{-3} mm, ¿cuál es el alargamiento total de la barra en la dirección longitudinal? Sea $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$. Suponga que el acero se comporta como un material elástico lineal.

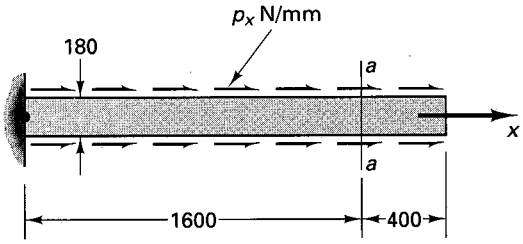


Fig. P3-12

3-13. Un pilote de madera uniforme, que ha sido hincado a una profundidad L en arcilla, soporta una carga F en su parte superior. Esta carga es resistida enteramente por la fricción f a lo largo del pilote que varía de manera parabólica tal como se muestra en la figura. (a) Determine el acortamiento total del pilote en términos de F, L, A y E. (b) Si $F = 400$ kN, $L = 10$ m, $A = 64{,}000$ mm^2 y $E = 10$ GPa, ¿cuánto se acorta el pilote? (*Sugerencia:* A partir del requisito de equilibrio, determine primero la constante k.)

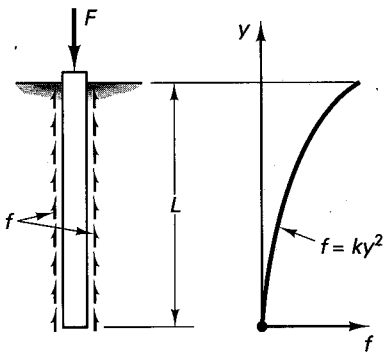


Fig. P3-13

3-14. Dos alambres están conectados a una barra rígida, como se muestra en la figura. El alambre a la izquierda es de una aleación de cobre con $A = 0.10\ \text{in}^2$ y $E = 20 \times 10^6$ psi. El alambre a la derecha, hecho de una aleación de aluminio, tiene $A = 0.20\ \text{in}^2$ y $E = 10 \times 10^6$ psi. (a) Si un peso $W = 2000$ lb se aplica como se muestra, ¿cuál será la deflexión del peso debido al alargamiento de los alambres? (b) ¿Dónde debe colocarse el peso para que la barra permanezca horizontal?

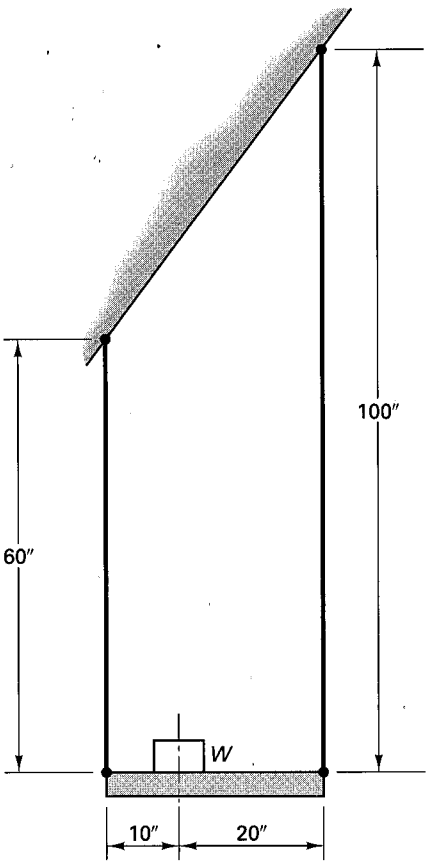


Fig. P3-14

3-15. En el ejemplo 3-3, figura 3-4, determine la magnitud de la fuerza hacia arriba que tendría que aplicarse al extremo libre para no tener desplazamiento en el extremo B. Trace los diagramas de fuerza axial y de desplazamientos para el problema revisado.

3-16. En el ejemplo 3-3, figura 3-4, subdivida la longitud L de la barra en cuatro segmentos similares al mostrado en la figura 3-5 y en el fondo de cada segmento aplique una fuerza vertical dirigida hacia abajo de valor $W/4$. Determine la deflexión del punto B usando esta aproximación y compárela con $\Delta = WL/(2AE)$. Repita la solución subdividiendo la longitud de la barra en 10 segmentos aplicando fuerzas de $W/10$ en los nodos y note la mejoría en los resultados. Trate de subdividir la barra en 20 segmentos.

3-17. Una ménsula de pared se construye como se muestra en la figura. Todas las juntas pueden considerarse articuladas. La barra de acero AB tiene área transversal de 5 mm^2. El miembro BC es una viga rígida. Si se coloca un tambor sin fricción de 1000 mm de diámetro con peso de 500 kg en la posición mostrada, ¿cuál será el alargamiento de la barra AB? $E = 200$ GN/m^2.

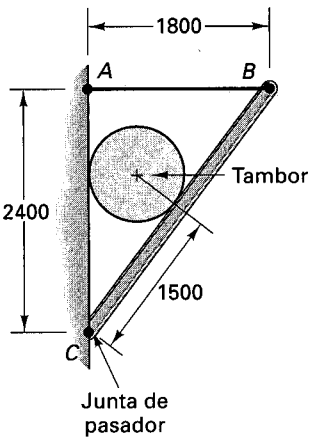


Fig. P3-17

3-18. Determine el acortamiento de la barra separadora tubular de acero AB debido a la aplicación de fuerzas de tensión en C y D. El área de la sección transversal del tubo es de 100 mm^2. Considere $E = 200$ GPa.

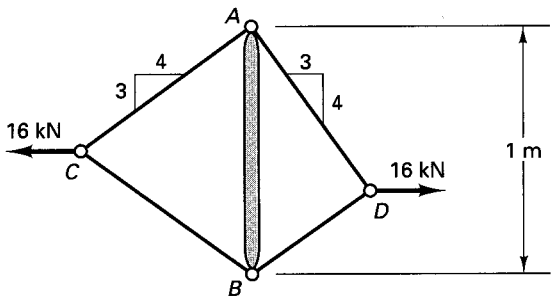


Fig. P3-18

3-19. Un sistema mecánico en un plano consta de dos barras rígidas, BD y EG y de tres barras pendulares, AB, CF y EH, como se muestra en la figura. Al aplicar la fuerza P en G, el esfuerzo en todas las barras pendulares es de 15 ksi. Cada una de estas barras tiene 20 in de longitud. (a) Determine la deflexión vertical de los puntos B, D, E y G causada por la aplicación de la fuerza $P = 300$ lb. (Como los desplazamientos verticales son pequeños, los desplazamientos horizontales son tan pequeños que se desprecian.) (b) Muestre la forma deflexionada del sistema exagerando la escala de los desplazamientos verticales. Considere $E = 30 \times 10^3$ ksi.

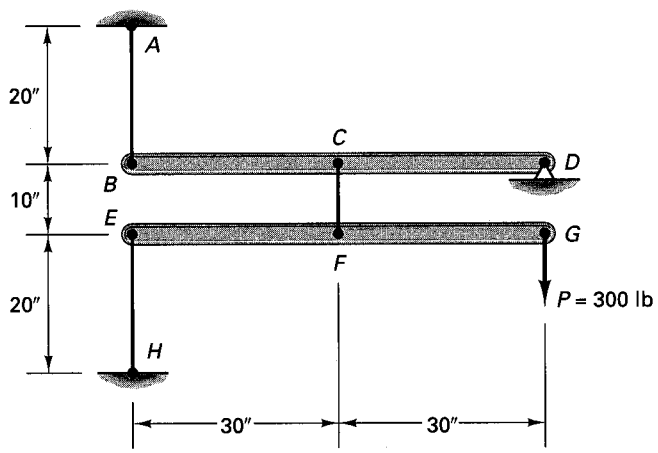


Fig. P3-19

3-20. Si en el ejemplo 3-3, la barra es de aluminio con área transversal de 1 in^2 con peso de 1.17 lb/ft, ¿cuál debe ser su longitud para que su extremo libre se alargue 0.250 in bajo su propio peso? $E = 10 \times 10^6$ psi.

3-21. ¿Cuál será la deflexión del extremo libre de la barra en el ejemplo 3-3, si en vez de la ley de Hooke, la relación esfuerzo-deformación unitaria es $\sigma = E\varepsilon^n$, donde n es un número que depende de las propiedades del material?

3-22. Una barra con dos áreas transversales diferentes está hecha de cobre suave y está sometida a una carga de tensión como se muestra en la figura. (a) Determine el alargamiento de la barra causado por la aplicación de la fuerza $P = 5$ kips. Suponga que la relación esfuerzo-deformación unitaria axial es

$$\varepsilon = \sigma/16{,}000 + (\sigma/165)^3$$

donde σ está en ksi. (b) Encuentre el alargamiento residual en la barra al retirar la fuerza P. Suponga que durante la descarga, el cobre se comporta como un material elástico lineal con una E igual a la tangente de la curva virgen σ-ϵ en el origen.

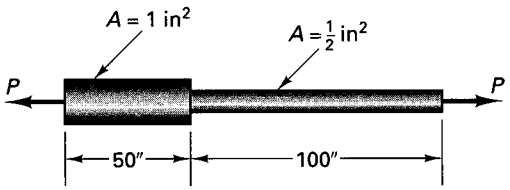


Fig. P3-22

3-23. Un sistema de dos barras tiene la configuración mostrada en la figura. El área transversal de la barra AB es de 130 mm^2 y el de la barra BC es de 100 mm^2. Si el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para las barras es bilineal como se muestra, ¿cuánto se alargará cada alambre debido a la aplicación de la fuerza vertical $P = 20$ kN?

3-24. La pequeña pieza simétrica ahusada mostrada en la figura está recortada de una placa de 4 mm de espesor. Determine el incremento en longitud de esta pieza causado por su propio peso cuando ella cuelga de su parte superior. La masa por unidad de volumen para este material es γ y el módulo elástico es E.

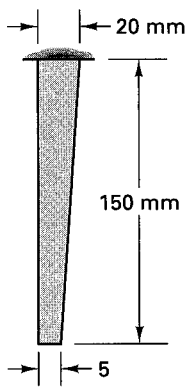
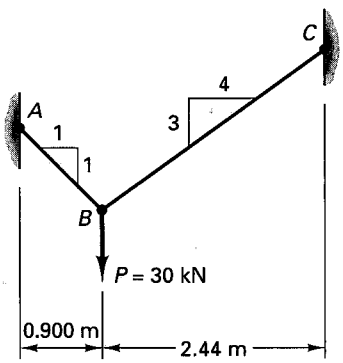


Fig. P3-24



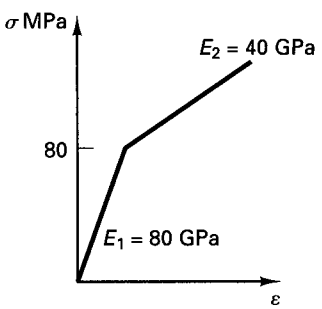


Fig. P3-23

3-25. Dos barras van a ser cortadas de una placa metálica de 1 in de espesor, por lo que ambas barras tendrán un espesor constante de 1 in. La barra A tendrá un ancho constante de 2 in en toda su longitud. La barra B tendrá 3 in de ancho en su parte superior y 1 in de ancho en el fondo. Cada barra estará sometida a la misma carga P. Determine la razón L_A/L_B de modo que las dos barras se alarguen la misma cantidad. Desprecie el peso de la barra.

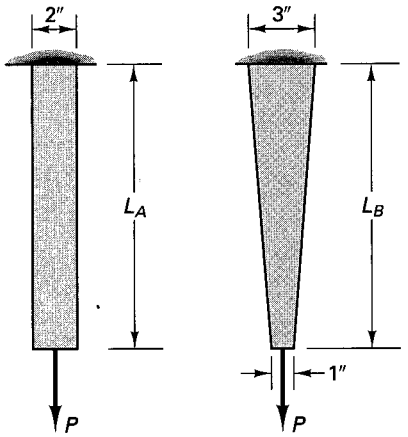


Fig. P3-25

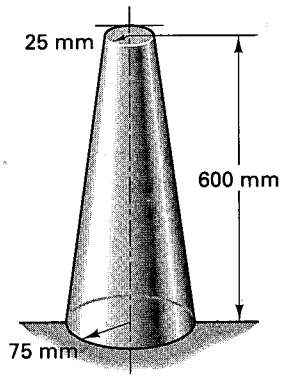


Fig. P3-26

3-26. Las dimensiones de un cono truncado recto circular soportado sobre su extremo mayor en una base rígida se muestran en la figura. Determine la deflexión de la parte superior debido al peso del cuerpo. El peso unitario del material es γ; el módulo elástico es E. (*Sugerencia:* Considere el origen de los ejes coordenados en el vértice del cono extendido.)

3-27. Encuentre el alargamiento total Δ de una barra elástica esbelta con área transversal constante A, como la mostrada en la figura, cuando gira en un plano horizontal con velocidad angular de ω radianes por segundo. El peso unitario del material es γ. Desprecie la pequeña cantidad de material adicional cerca del pasador. (*Sugerencia:* Primero encuentre el esfuerzo en una sección a una distancia r del pasador integrando el efecto de las fuerzas internas entre r y L. Véase el ejemplo 1-4.)

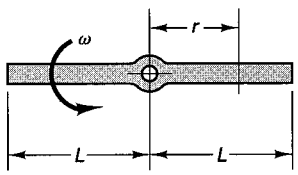


Fig. P3-27

3-28. Una barra elástica con área transversal A está unida al material que la rodea que tiene un espesor a, como se muestra en la figura. Determine el cambio de longitud de la barra debido a la aplicación de la fuerza P. Suponga que el soporte proporcionado a la barra por el material que la rodea varía linealmente como se muestra. Exprese la respuesta en términos de P, A, a y E, donde E es el módulo elástico de la barra.

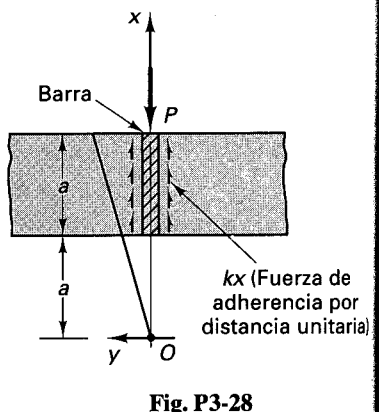


Fig. P3-28

3-29. Para el mismo marco que en el ejemplo 3-4, figura 3-6, encuentre las deflexiones horizontal y vertical en el punto B causadas por la aplicación de una fuerza horizontal de 3 kips en B. Suponga un comportamiento elástico lineal del material.

3-30. Determine los desplazamientos elásticos horizontal y vertical del punto de carga B para el sistema de dos barras con las dimensiones mostradas en la figura. Suponga que para cada barra, $AE = 10^4$ kips.

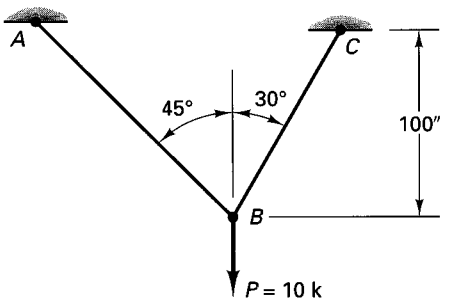


Fig. P3-30

3-31. Para los datos dados en el problema 3-20 y suponiendo un comportamiento elástico lineal, encuentre los desplazamientos horizontal y vertical del punto de carga B. Sea $E = 80$ GPa.

3-32. Repita el ejemplo 3-5, figura 3-7, suponiendo que sólo la barra AB experimenta un aumento de temperatura.

3-33. Una grúa pescante tiene las dimensiones mostradas en la figura. La barra AB tiene un área transversal de 300 mm^2 y el tubo BC, 320 mm^2. (a) Encuentre la rigidez vertical de la grúa en el punto B. (b) Determine la deflexión vertical causada por la aplicación de la fuerza $P = 16$ kN. Sea $E = 200$ GPa.

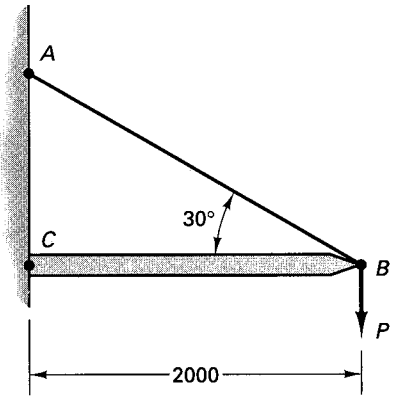


Fig. P3-33

3-34. Suponga que en el problema 3-33 la fuerza P es reemplazada por una masa de 2000 kg unida en B. Determine la frecuencia natural de vibración en la dirección vertical para este sistema. La frecuencia fundamental de vibración está dada por $f = \sqrt{g/\Delta}/(2\pi)$ Hz, donde g es la aceleración gravitacional y Δ es la deflexión estática.

3-35. Para los datos dados en el problema 3-23, encuentre los desplazamientos vertical y horizontal del punto B causados por una elevación de temperatura de 100°F en la barra. Suponga comportamiento elástico y use α y E dadas en la Tabla 1B del apéndice para la aleación de aluminio 6061-T6.

3-36. Para los datos dados en el problema 3-33, encuentre los desplazamientos vertical y horizontal del punto B causados por un aumento de temperatura de 80°C sólo en la barra. Considere $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°C$.

Sección 3-3

3-37. Una placa de 6 × 75 mm de 600 mm de longitud tiene un agujero circular de 25 mm de diámetro localizado en su centro. Encuentre la fuerza de tensión axial que puede aplicarse a esta placa en la dirección longitudinal sin exceder un esfuerzo permisible de 220 MPa.

3-38. Determine cuánto se debilita una barra plana maquinada sometida en tensión que se usa en una aplicación mecánica al tener una sección aumentada, como se muestra en la figura. Como la barra va a estar cargada cíclicamente, considere las concentraciones de esfuerzos.

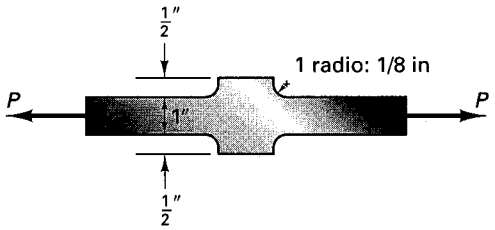


Fig. P3-38

3-39. Una parte de máquina de 10 mm de espesor y con las dimensiones mostradas en la figura va a estar sometida a carga cíclica. Si el esfuerzo máximo está limitado a 60 MPa, determine la fuerza P permisible. Obtenga los factores de concentración de esfuerzos con ayuda de la figura 3-11. ¿Dónde podría ocurrir una fractura potencial?

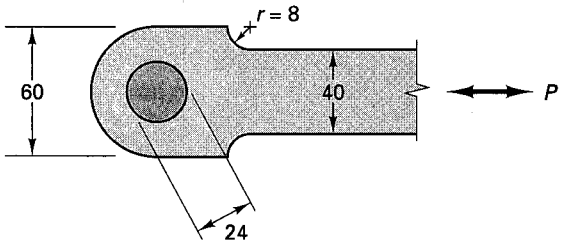


Fig. P3-39

3-40. Una parte de máquina de espesor constante que se usará para transmitir carga axial cíclica debe tener las dimensiones mostradas en la figura. (a) Seleccione el espesor necesario en el miembro para transmitir una fuerza axial de 12 kN con el fin de limitar el esfuerzo máximo a 80 MPa. Obtenga los factores de concentración de esfuerzos con ayuda de la figura 3-11. (b) ¿Dónde podría ocurrir una fractura potencial?

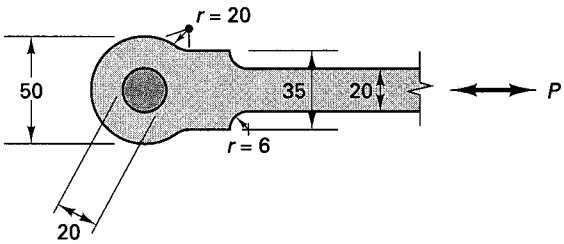


Fig. P3-40

3-41. Se muestra en la figura un extremo de una barra cuadrada de 10 mm por lado de acero usada para transmitir carga cíclica. Suponiendo que la barra se usa para servicio con carga cíclica de 10×10^6 de amplitud constante y factor de seguridad de 2, determine la resistencia de esta unión. Use las figuras 2-25 y 3-11 para estimar el esfuerzo permisible.

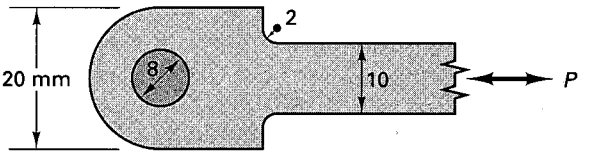


Fig. P3-41

3-42. Se tiene una ranura larga en una barra de acero de 10 x 60 mm de 240 mm de longitud, como se muestra en la figura. (a) Encuentre el esfuerzo máximo, si se aplica una fuerza axial $P = 300$ kN a la barra. Suponga que la curva superior en la figura 3-11 es aplicable. (b) Para el mismo caso, determine el alargamiento total de la barra. Desprecie los efectos locales de las concentraciones de esfuerzos y suponga que el área reducida de la sección transversal se extiende 120 mm. (c) Estime el alargamiento de la misma barra si $P = 350$ kN. Suponga que el acero fluye 0.020 mm/mm bajo un esfuerzo de 1000 MPa. (d) Al retirar la carga del inciso (c), ¿cuál es la deflexión residual? Considere $E = 200$ GPa.

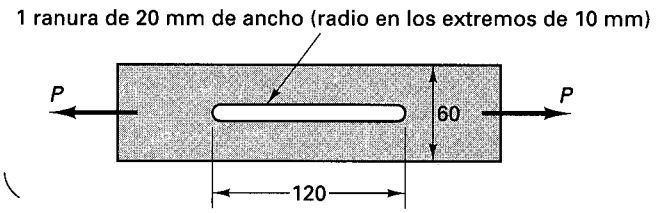


Fig. P3-42

Sección 3-4

3-43. Compare resiliencias elásticas en puntos de fluencia y resiliencias hiperelásticas justo antes de la resistencia última a tensión para tres materiales: aleación de aluminio 2024-T4, aleación de magnesio AM100A y acero al carbono al 0.2%. Use la tabla 1A para las propiedades físicas del material.

3-44. Usando los datos de las figuras 3-15(a) y (b), estime el módulo de tenacidad para las tres barras: No. 12, No. 15 y una barra de sección transversal constante. Note que las curvas se muestran con cargas axiales y desplazamientos axiales. Tal como están dadas, no son diagramas de esfuerzo-deformación unitaria. ¿Qué conclusiones pueden derivarse para aplicaciones prácticas?

Secciones 3-5 y 3-6

3-45. Verifique la deflexión vertical del punto B causada por la fuerza aplicada $P = 3$ kips en el ejemplo 3-4 usando la ecuación 3-16.

3-46. Aplicando la ecuación 3-16, encuentre la deflexión del punto G en el problema 3-16.

3-47. Encuentre la deflexión vertical del punto B causada por la carga aplicada en el problema 3-26, usando la ecuación 3-16.

3-48. Encuentre la deflexión vertical del punto B causada por la fuerza aplicada P en el problema 3-28, usando la ecuación 3-16.

3-49. Un sistema mecánico que consiste en una barra separadora de acero AB y cuatro barras de acero de alta resistencia, AC, CB, AD y DB, está sometido a fuerzas en C y D, como se muestra en la figura. Determine el incremento en la distancia CD que ocurre al aplicar las dos fuerzas de 8 kN. Las barras AC y CB tienen cada una un área de la sección transversal de 20 mm^2 y las barras AD y DB tienen cada una 40 mm^2. El área transversal de la barra separadora es de 100 mm^2. Considere $E = 200$ GPa.

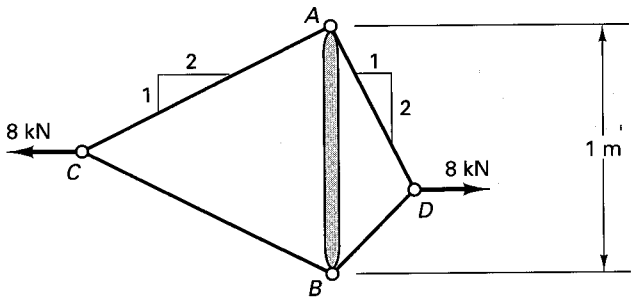


Fig. P3-49

Sección 3-7

3-50. Compare los esfuerzos dinámicos en las tres barras de acero de diámetros diferentes mostradas en la figura en sus respuestas a masas de 1.5 kg que caen libremente una distancia de 1 m. Sea $E = 200$ GPa. Suponga que no se disipa energía por deformación plástica de las superficies impactadas o en puntos de altos esfuerzos locales que ocurren en los soportes.

Fig. P3-50

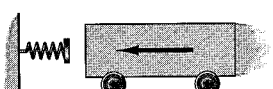


Fig. P3-51

3-51. Determine la rigidez requerida en el resorte, para el sistema mostrado en la figura, para detener una masa de 2 kg que se mueve con una velocidad de 3 m/s, de modo que durante el impacto la deflexión del resorte no exceda de 20 mm. Desprecie los efectos de la fricción.

4

Deformación axial de barras: Sistemas estáticamente indeterminados

4-1. Introducción

El capítulo anterior consideró la deformación axial de barras estáticamente determinadas debido a varias causas. Este capítulo extiende este tema al tratamiento de una clase mucho más amplia de sistemas estáticamente indeterminados. El mero hecho de que ambos extremos de una barra estén impedidos de moverse o estén soportados rígidamente, requiere una investigación complementaria de la deformación de tales sistemas para satisfacer las condiciones geométricas de frontera. Se considerarán casos linealmente elásticos e inelásticos, y se analizan los distintos enfoques para la solución de tales problemas.

4-2. Consideraciones generales

Como se indicó en la Sección 1-9, para algunos sistemas estructurales las ecuaciones del equilibrio estático son insuficientes para determinar las reacciones. En estos casos, algunas de las reacciones son redundantes o superfluas para mantener el equilibrio. En otras situaciones la redundancia puede también presentarse si algunas de las fuerzas internas no pueden

determinarse usando sólo las ecuaciones de la estática. En ambos casos, tal indeterminación estática puede presentarse en sistemas cargados axialmente. En la figura 4-1 se muestran dos ejemplos simples idealizados. Para el sistema mostrado en la figura 4-1(a), las reacciones R_1 y R_2 no pueden determinarse usando sólo ecuaciones de estática. Sin embargo, para el sistema mostrado en la figura 4-1(b), si bien la reacción puede encontrarse fácilmente, la distribución de las fuerzas entre los dos resortes, requiere de consideraciones adicionales. En ambos casos, las características de deformación de las componentes del sistema deben ser consideradas.

Hay varios procedimientos para eliminar la indeterminación estructural y reducir un problema a una condición estáticamente determinada, para que las fuerzas internas puedan encontrarse fácilmente. En todos esos procedimientos se aplican los tres conceptos básicos vistos antes y deben satisfacerse:

1. Las *condiciones de equilibrio* para el sistema deben cumplirse tanto en el sentido global como en el local.
2. La *compatibilidad geométrica* entre las partes deformadas de un cuerpo y en las fronteras deben satisfacerse.
3. Las *relaciones constitutivas* (relaciones esfuerzo-deformación unitaria) para los materiales del sistema deben satisfacerse.

Se presentarán dos métodos generales para resolver problemas simples. El enfoque en uno de esos métodos consiste, primero, en retirar y luego restaurar una reacción redundante tal que la condición de compatibilidad en las fronteras se satisfaga. Este es el *método de las fuerzas* de análisis, ya que la solución se obtiene directamente para las fuerzas reactivas desconocidas. Alternativamente, la compatibilidad de los desplazamientos de miembros adjuntos y en las fronteras se mantiene durante todo el proceso de carga y las soluciones para los desplazamientos se obtienen de las ecuaciones de equilibrio. Este es el *método de los desplazamientos* de análisis.

Es importante recalcar que en cualquiera de esos métodos, el problema fundamental consiste en satisfacer los tres requisitos básicos: *equilibrio, compatibilidad* y *conformidad con las relaciones constitutivas*. La secuencia en que éstos se aplican no es importante.

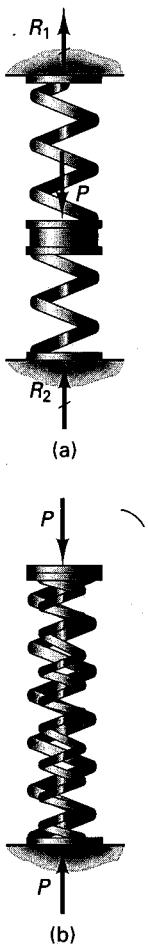


Fig. 4-1 Ejemplos de (a) indeterminación estática externa y (b) indeterminación estática interna.

4-3. Método de las fuerzas de análisis

Como ejemplo del método de las fuerzas de análisis, considere el sistema de barras linealmente elásticas y cargado axialmente mostrado en la figura 4-2. Las barras inicialmente no deformadas se muestran en la figura 4-2(a) con líneas en zig-zag como recordatorio de que pueden tratarse como resortes. Al aplicar la fuerza P en B, aparecen las reacciones R_1 y R_2 en los extremos y el sistema se deforma, como se muestra en la figura 4-2(b). Como sólo se dispone de una ecuación no trivial de estática para determinar las dos reacciones, este sistema es estáticamente indeterminado de primer grado. Aquí, la dirección hacia arriba de la fuerza aplicada P así como las supuestas para R_1 y R_2,

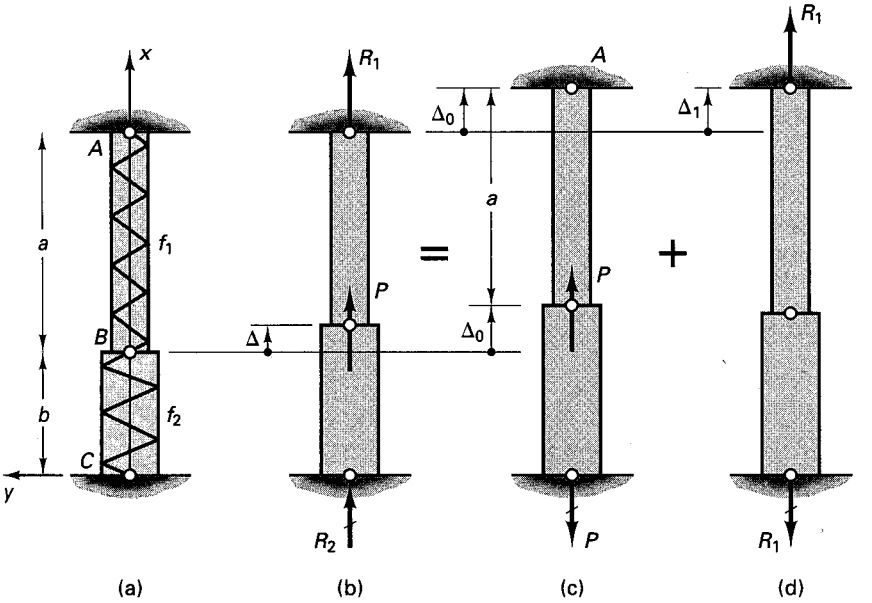


Fig. 4-2 Método de las fuerzas (flexibilidades) del análisis elástico para una barra cargada axialmente estáticamente indeterminada. Las deformaciones se muestran en forma muy exagerada.

coinciden con la dirección positiva del eje x. Por esta razón, esas cantidades serán tratadas como positivas. Con esta convención de signos, si una fuerza aplicada actúa hacia abajo, se considerará negativa. Una reacción calculada con un signo negativo significa que actúa con el sentido opuesto al supuesto. La adherencia a esta convención de signos es deseable, aunque en problemas de barras cargadas axialmente no es esencial, ya que los sentidos de las desviaciones y reacciones pueden determinarse usualmente por inspección. Sin embargo, para soluciones por computadora así como para los problemas más complejos que se verán en los capítulos 17 y 18, resulta necesario una estricta adherencia a un convención de signos específica.

Al aplicar el método de las fuerzas a barras cargadas axialmente, una de las reacciones es temporalmente retirada, convirtiendo al sistema en estáticamente determinado. Aquí optamos por retirar la reacción superior R_1, permitiendo que el sistema de dos segmentos de barra se deforme como se muestra en la figura 4-2(c). A tal sistema estructural simplificado se le llama *sistema primario,* ya que desde el punto de vista de la estática, él puede, por sí mismo, tomar la carga aplicada. (Sin embargo, desde el punto de vista de la resistencia, la reacción redundante puede ser necesaria y, entonces, no puede ser retirada en las condiciones reales de campo.) Nótese que aquí sólo el segmento inferior de la barra está sometido a esfuerzo. Por lo tanto, la misma deformación axial Δ_0 ocurre en A, en la parte superior de la barra, que en el punto B. Entonces, si la flexibilidad de la barra inferior elástica es f_2, se tiene

$$\Delta_0 = f_2 P \tag{4-1}$$

Este resultado, mostrado en la figura 4-2(c), viola la condición geométrica de frontera en A. Para satisfacerla, se encuentra a continuación la desviación Δ_1 causada por R_1 actuando sobre la barra *ABC descargada*; véase la figura 4-2(d). Esta desviación es causada por el alargamiento de ambas barras. Por tanto, si la flexibilidad de esas barras son f_1 y f_2, figura 4-2(a), la desviación es

$$\Delta_1 = (f_1 + f_2)R_1 \tag{4-2}$$

La compatibilidad de las deformaciones en A se logra entonces requiriendo que

$$\boxed{\Delta_0 + \Delta_1 = 0} \tag{4-3}$$

Sustituyendo las ecuaciones 4-1 y 4-2 en la ecuación 4-3 y despejando R_1, se tiene

$$R_1 = -\frac{f_2}{f_1 + f_2}P \tag{4-4}$$

El signo negativo del resultado indica que R_1 actúa con sentido contrario al supuesto. Como es de esperarse, de acuerdo con la ecuación 4-2, esto también es cierto para Δ_1.

La solución completa de este problema estáticamente indeterminado es la suma algebraica de las soluciones mostradas en las figuras 4-2(c) y (d). Después de obtener las reacciones, son aplicables los procedimientos antes vistos para determinar las fuerzas internas y las desviaciones.

Ya que las flexibilidades de miembros son particularmente útiles en la formulación de soluciones por el método de las fuerzas, este enfoque se conoce también como el *método de las flexibilidades* de análisis.

La suma algebraica de las dos soluciones es una aplicación del *principio de superposición* y se encontrará con frecuencia en este texto. Este principio se basa en la premisa de que el esfuerzo o deformación unitaria resultante en un sistema debido a varias fuerzas es la suma algebraica de sus efectos cuando éstas se aplican por separado. *Esta hipótesis es sólo cierta si cada efecto está linealmente relacionado con la fuerza que lo genera.* Ella es sólo aproximadamente cierta cuando las desviaciones o deformaciones debidas a una fuerza causan un cambio considerable en el efecto de otra fuerza. Afortunadamente, las magnitudes de las desviaciones son relativamente pequeñas en la mayoría de las estructuras de la ingeniería. Respecto a esto, es importante notar que las deformaciones mostradas en las figuras 4-2(b) a la (d) están *sumamente exageradas*. Además, como las deformaciones son muy pequeñas, *se usan en los cálculos las longitudes no deformadas* (iniciales) *de las barras.*

En la figura 4-3 se muestran relaciones fuerza-deformación para sistemas lineales y no lineales. Para los sistemas lineales considerados, una duplicación del desplazamiento, digamos de Δ_1 a Δ_2, también duplica la carga. Esto no es así para un sistema no lineal. Por lo tanto, para sistemas lineales que experimentan deformaciones pequeñas, la secuencia o número de cargas no es importante.

El procedimiento antes descrito es muy general para sistemas lineales y cualquier número de cargas axiales, secciones transversales de barras, pro-

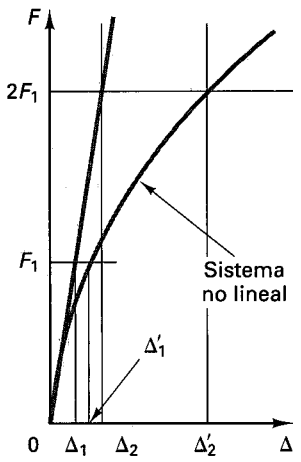


Fig. 4-3 Comparación de relaciones fuerza-desplazamiento entre sistemas lineales y no lineales.

piedades diferentes del material, así como efectos térmicos sobre la longitud de un sistema de barras, pueden incluirse en el análisis. Sin embargo, el método de las fuerzas no es favorecido en la práctica porque una selección sistemática de las redundantes en problemas *de gran tamaño* es difícil.

Se presentan a continuación tres ejemplos que ilustran aplicaciones del método de las fuerzas a sistemas de barras elásticas cargadas axialmente.

Ejemplo 4-1

Una barra elástica empotrada en ambos extremos está cargada como se muestra en la figura 4-4. Los coeficientes conocidos de flexibilidad f y $2f$ para cada uno de los tres segmentos de barra se muestran en la figura. Determine las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza axial y desplazamiento axial para la barra.

SOLUCIÓN

Retire el soporte inferior para obtener el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4-4(b) y calcule Δ_0. Como las fuerzas aplicadas actúan hacia abajo, a ellas se les asignan signos negativos de acuerdo con la convención de signos adoptada en la figura 4-2(b). A continuación se calcula la desviación causada por R_2 sobre un sistema descargado. Luego, resolviendo la ecuación 4-3, se determina la reacción R_2. El resto de la solución sigue el mismo procedimiento descrito en el ejemplo 3-2.

$$\Delta_0 = \sum_i f_i P_i = -2fP - f(2P + P) = -5fP$$

y

$$\Delta_1 = (2f + f + f)R_2 = 4fR_2$$

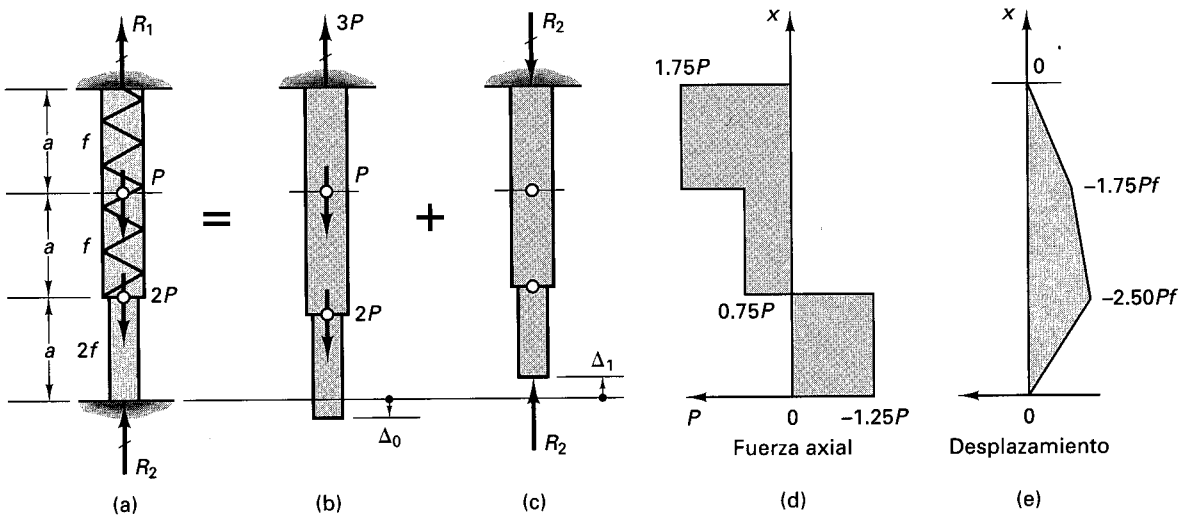


Fig. 4-4

Como

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0, \qquad R_2 = 1.25P$$

Note que las fuerzas aplicadas están soportadas por una reacción de compresión en el fondo y por una reacción de tensión en la parte superior. En problemas donde se dan la longitud y el área transversal de la barra junto con el módulo de elasticidad E del material, las flexibilidades se determinan usando la ecuación 3-9.

El diagrama de fuerza axial está dibujado en la figura 4-4(d). La fuerza de compresión en el tercio inferior de la barra causa una desviación *hacia abajo* de $1.25P \times 2f = 2.5Pf$. Las fuerzas de tensión alargan el resto de la barra $0.75Pf + 1.75Pf$ tal que el desplazamiento en la parte superior es cero. De esta manera, las condiciones cinemáticas de frontera se satisfacen en ambos extremos de la barra.

Ejemplo 4-2

Una barra elástica está soportada en sus extremos como se muestra en la figura 4-5. Si la temperatura de la barra se incrementa en ΔT, ¿qué fuerza axial se desarrolla en la barra? AE para la barra es constante.

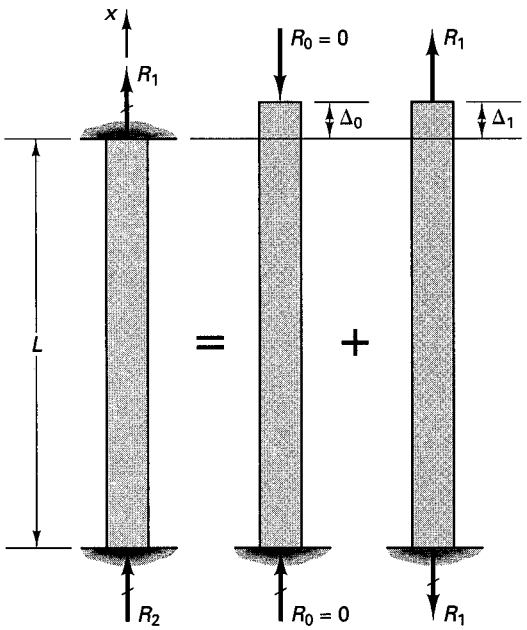


Fig. 4-5

SOLUCIÓN

Primero se retira el soporte superior y se determina Δ_0 usando la ecuación 2-11. El aumento de temperatura no genera ninguna fuerza axial en la barra. Entonces, usando la ecuación 3-8, se calcula Δ_1 y aplicando la ecuación 4-3 se encuentra la fuerza axial R_1 causada por el aumento de la temperatura.

$$\Delta_0 = \alpha \, \Delta T \, L_0$$

y

$$\Delta_1 = R_1 f = \frac{R_1 L}{AE}$$

Como

$$\Delta_0 + \Delta_1 = 0, \qquad R_1 = -\alpha \, \Delta T \, AE$$

Ejemplo 4-3

Para el sistema en un plano de tres barras elásticas mostrado en la figura 4-6(a), determine las fuerzas en las barras causadas por la fuerza aplicada P. El área A de la sección transversal de cada barra es la misma y su módulo de elasticidad es E.

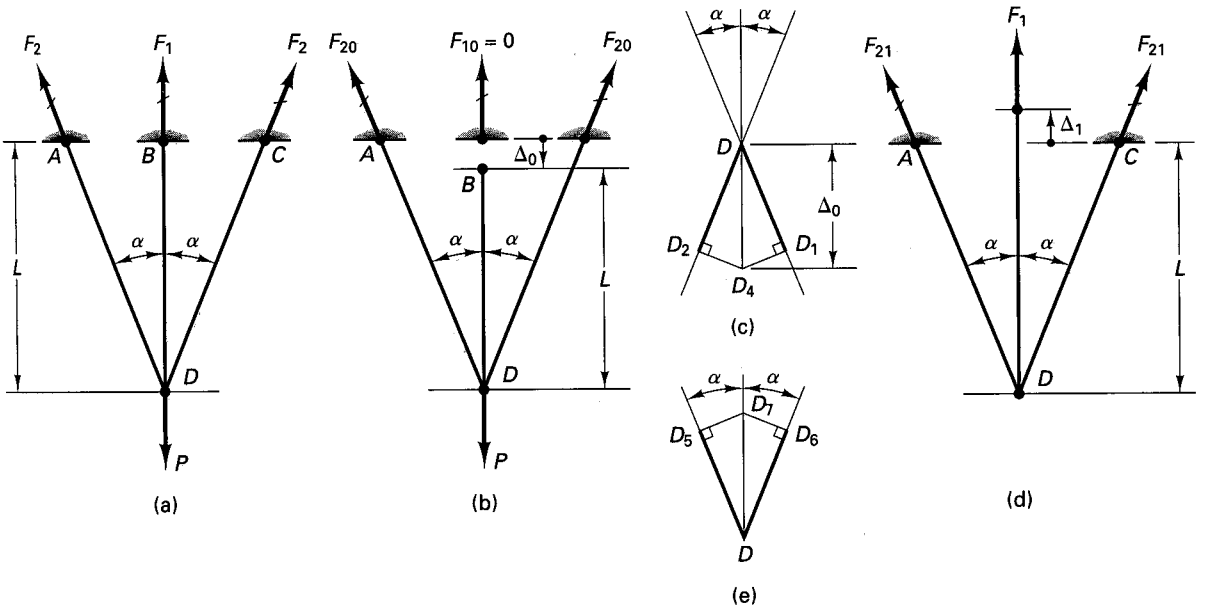


Fig. 4-6

SOLUCIÓN

Un diagrama de cuerpo libre del sistema primario supuesto con el soporte de la barra intermedia retirado al cortarlo en el punto B, se muestra en la figura 4-6(b). Entonces, usando estática, se determinan las fuerzas en las barras y la desviación del punto D se calcula usando el procedimiento ilustrado en el ejemplo 3-4. Como la barra BD no toma fuerza, la desviación Δ_0 en el punto B es la misma que en el punto D. Por simetría,

$$F_{10} = 0 \qquad \text{y} \qquad 2F_{20}\cos\alpha = P$$

Por lo tanto,

$$F_{20} = \frac{P}{2\cos\alpha}$$

Como

$$L_{AD}\cos\alpha = L, \qquad L_{AD} = L/\cos\alpha$$

Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación 3-4, el alargamiento de la barra AD en el sistema primario es

$$(\Delta_{AD})_0 = \frac{PL}{2AE\cos^2\alpha}$$

Sin embargo, como Δ_0 es igual a DD_4 en la figura 4-6(c),

$$\Delta_0\cos\alpha = (\Delta_{AD})_0 \qquad \text{y} \qquad \Delta_0 = -\frac{PL}{2AE\cos^3\alpha}$$

donde el signo negativo significa que la desviación es hacia abajo.

El mismo tipo de relación se aplica a la desviación hacia arriba del punto D causada por la fuerza F_1; véanse las figuras 4-6(d) y (e). Sin embargo, la desviación del punto B aumenta por el alargamiento de la barra BD. La última cantidad se calcula usando de nuevo la ecuación 3-4. Se tiene, entonces,

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L}{AE} + \frac{F_1 L}{2AE\cos^3\alpha}$$

Aplicando la ecuación 4-3 (es decir, $\Delta_0 + \Delta_1 = 0$) y notando que por estática $F_1 + 2F_2\cos\alpha = P$, se obtiene después de simplificar,

$$F_1 = \frac{P}{2\cos^3\alpha + 1} \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{P}{2\cos^3\alpha + 1}\cos^2\alpha \tag{4-5}$$

4-4. Introducción al método de los desplazamientos

Otro procedimiento para analizar problemas estáticamente indeterminados se basa en determinar los desplazamientos en puntos seleccionados y proporcionar información para encontrar las reacciones y fuerzas internas. Como ejemplo de este *método de los desplazamientos* de análisis, consi-

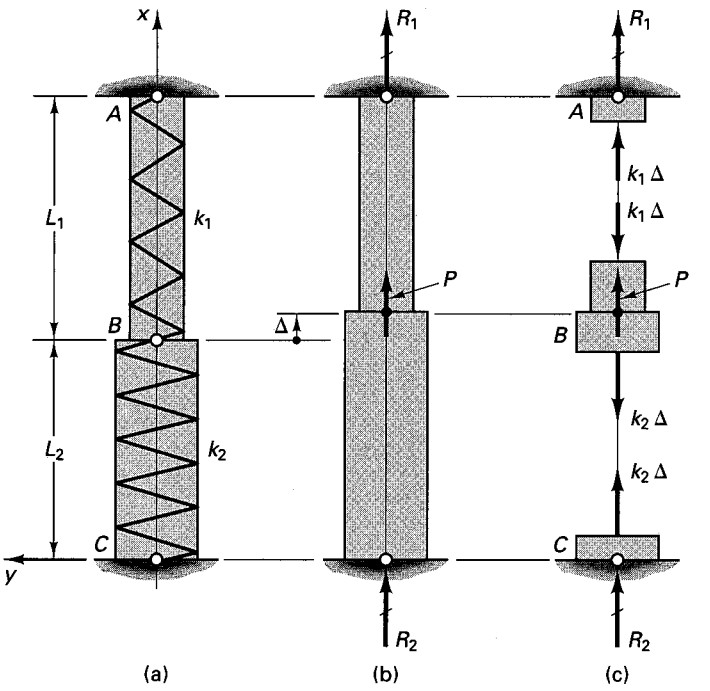


Fig. 4-7 Método de los desplazamientos (rigideces) de análisis para una barra cargada axialmente estáticamente indeterminada.

dere el sistema de barras elásticas cargadas axialmente mostrado en la figura 4-7. Las rigideces $k_i = A_i E_i / L_i$, dadas por la ecuación 3-7 para los segmentos de barras, se indican en la figura como k_1 y k_2. Una fuerza P aplicada en el punto B genera las reacciones R_1 y R_2. Esas fuerzas y el desplazamiento Δ en B se consideran positivos cuando actúan en el sentido positivo del eje x. Este problema es estáticamente indeterminado de primer grado.

El objetivo principal en este método de análisis es determinar el desplazamiento Δ, que es el parámetro principal del problema. En este ejemplo hay una sola cantidad Δ y, por lo tanto, se dice que el problema tiene *un grado de indeterminación cinemática* o *un grado de libertad.* Éste es el único tipo de problema que se verá en esta sección. Casos más complejos con varias cargas axiales y cambios en las secciones transversales de las barras, dando lugar a varios grados de libertad, se considerarán en la siguiente sección.

En este problema ilustrativo puede verse que el desplazamiento Δ en B causa compresión en la parte superior AB de la barra y tensión en la parte inferior BC de la barra. Por tanto, si k_1 y k_2 son las rigideces respectivas de las barras, las fuerzas internas respectivas son $k_1\Delta$ y $k_2\Delta$. Esas fuerzas y reacciones *internas* se muestran en cuerpos libres aislados en los puntos A, B y C en la figura 4-7(c). A esos puntos se les llama puntos nodales. El sentido de las fuerzas internas se conoce puesto que la barra superior está en

compresión y la inferior está en tensión. Escribiendo una ecuación de equilibrio para el cuerpo libre en el nodo B, se tiene

$$-k_1\Delta - k_2\Delta + P = 0 \tag{4-6}$$

y

$$\Delta = \frac{P}{k_1 + k_2} \tag{4-7}$$

Las ecuaciones de equilibrio para los cuerpos libres en los nodos A y C son

$$R_1 = -k_1\Delta \quad \text{y} \quad R_2 = -k_2\Delta \tag{4-8}$$

Entonces, con ayuda de la ecuación 4-7,

$$R_1 = -\frac{k_1}{k_1 + k_2}P \quad \text{y} \quad R_2 = -\frac{k_2}{k_1 + k_2}P \tag{4-9}$$

Los signos negativos en la ecuación 4-9 indican que las reacciones actúan en sentido contrario al supuesto.

Como en esta solución se usan las rigideces de las barras, este procedimiento suele llamarse *método de las rigideces.*

Ejemplo 4-4

Una barra elástica escalonada está cargada como se muestra en la figura 4-8. Usando el métodos de los desplazamientos, encuentre las reacciones. Las rigideces k_1 y k_2 de los segmentos de barra, sus áreas A_1 y A_2 y E son dadas.

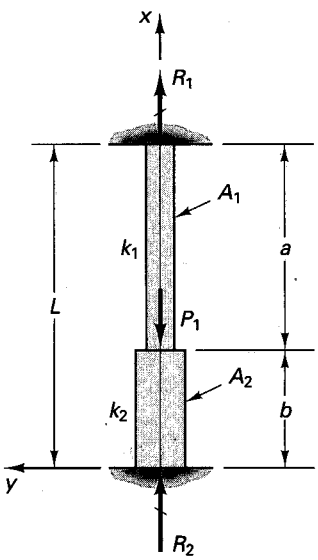


Fig. 4-8

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ecuación 3-7, las rigideces k para los segmentos superior e inferior de la barra, son

$$k_1 = A_1E/a \quad \text{y} \quad k_2 = A_2E/b$$

Por lo tanto, según la ecuación 4-7, la desviación Δ en B debido a la fuerza P_1 *hacia abajo* es

$$\Delta = -\frac{P_1}{k_1 + k_2} = -\frac{P_1}{A_1E/a + A_2E/b}$$

De acuerdo con las ecuaciones 4-8, $R_1 = -k_1\Delta$ y $R_2 = -k_2\Delta$. Sustituyendo las expresiones anteriores para Δ, k_1 y k_2, se obtiene

$$R_1 = \frac{P_1}{1 + aA_2/bA_1} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{P_1}{1 + bA_1/aA_2} \tag{4-10}$$

4-5. Método de los desplazamientos con varios grados de libertad

En esta sección se extiende el método de los desplazamientos a barras cargadas axialmente con varios grados de libertad (gdl). Este método es el más ampliamente usado para resolver problemas lineales y no lineales. Sin embargo, el análisis se limitará a problemas linealmente elásticos. Como se indicó en la sección previa, la solución de problemas no lineales usando este método está más allá del alcance de este texto.

El método de los desplazamientos es absolutamente general y puede usarse para el análisis de problemas estáticamente determinados así como indeterminados. Consideremos entonces un sistema de barras que consta de tres segmentos de rigideces variables definidas por sus respectivas constantes de resorte k_i, como se muestra en la figura 4-9(a). Cada uno de esos segmentos termina en un punto nodal, algunos de los cuales son comunes a los dos segmentos de barras adyacentes. Cada nodo, marcados en la figura de 1 a 4, puede desplazarse verticalmente en cualquier sentido. Por lo tanto, este sistema de barras tiene cuatro grados de libertad (es decir, un gdl por nodo).

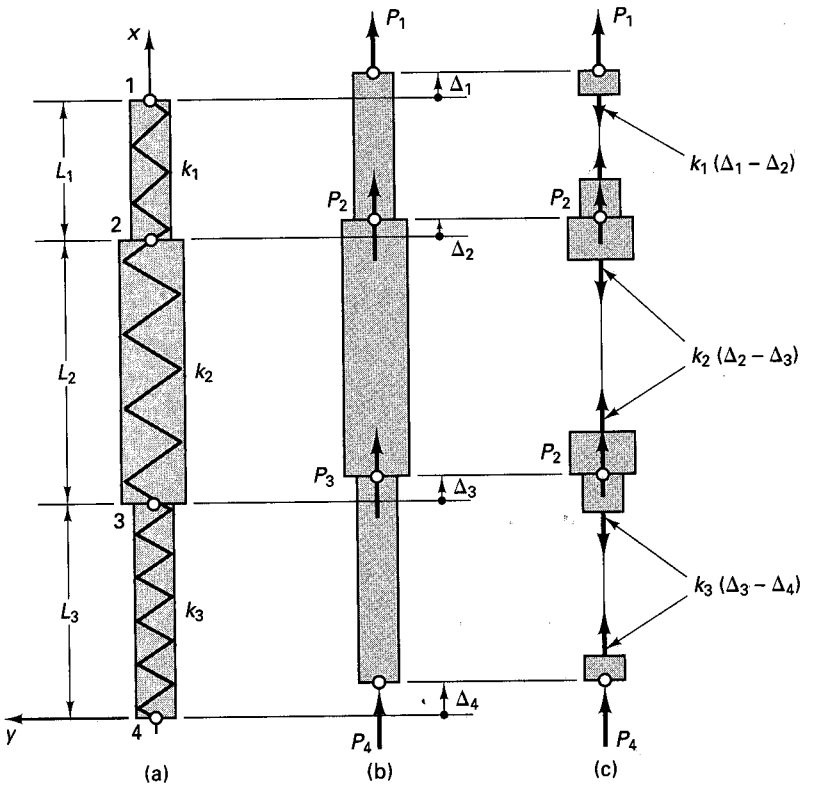


Fig. 4-9 Barra cargada axialmente con cuatro grados de libertad.

Una aplicación de fuerzas en los nodos ocasiona que el sistema de barras se desplace de manera geométricamente compatible, como se muestra en la figura 4-9(b). Aquí se muestran las fuerzas aplicadas y los desplazamientos de los nodos, con dirección positiva coincidiendo con el sentido positivo del eje x. Los posibles desplazamientos en los nodos dan lugar a varios casos especiales. Sin desviación en los extremos, se tiene un problema estáticamente indeterminado. Sin embargo, si sólo un punto nodal está fijo y se aplican fuerzas o desplazamientos en los otros nodos, el problema es estáticamente determinado. Sin embargo, si se especifica un desplazamiento en un nodo, no es posible también especificar una fuerza aplicada y viceversa.

Con la aplicación de las fuerzas y/o desplazamientos, se generan fuerzas internas en el sistema de barras. La magnitud y sentido de esas fuerzas pueden determinarse del modo siguiente. Con la convención de signos adoptada, la extensión[1] del segmento de barra entre el i-ésimo y el $(i+1)$-ésimo nodo es $\Delta_i - \Delta_{i+1}$. Multiplicando este alargamiento por la constante de resorte del segmento de barra se determina la fuerza interna de tensión $(\Delta_i - \Delta_{i+1})k_i$. En la figura 4-9(c) se muestran diagramas de nodos aislados que muestran esas fuerzas internas así como fuerzas aplicadas al nodo.

El problema se resuelve escribiendo la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ para cada nodo. Entonces, comenzando con el nodo 1, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
P_1 - k_1(\Delta_1 - \Delta_2) &= 0 \\
P_2 + k_1(\Delta_1 - \Delta_2) - k_2(\Delta_2 - \Delta_3) &= 0 \\
P_3 + k_2(\Delta_2 - \Delta_3) - k_3(\Delta_3 - \Delta_4) &= 0 \\
P_4 + k_3(\Delta_3 - \Delta_4) &= 0
\end{aligned} \tag{4-11}$$

Es usual escribir esas ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
k_1\Delta_1 - k_1\Delta_2 &= P_1 \\
-k_1\Delta_1 + (k_1 + k_2)\Delta_2 - k_2\Delta_3 &= P_2 \\
-k_2\Delta_2 + (k_2 + k_3)\Delta_3 - k_3\Delta_4 &= P_3 \\
-k_3\Delta_3 + k_3\Delta_4 &= P_4
\end{aligned} \tag{4-12}$$

En la mayoría de los problemas se conocen las fuerzas aplicadas P_i y las P_i restantes que ocurren en nodos de desplazamiento nulo son reacciones. Sin embargo, esas ecuaciones pueden aplicarse a un amplio rango de problemas especificando desplazamientos en vez de fuerzas aplicadas. En tales casos, por lo menos un nodo debe tener un desplazamiento conocido (a menudo igual a cero) donde se genere una reacción. Como se indicó antes, en un nodo cualquiera se puede especificar ya sea una fuerza aplicada o bien un desplazamiento, pero no ambos. Esas ecuaciones se resuelven simultáneamente para encontrar las cantidades desconocidas.

[1]Esto puede aclararse notando el efecto sobre un segmento de barra de los desplazamientos nodales tomados uno a la vez.

En aplicaciones típicas del método de los desplazamientos, las desviaciones Δ_i o las reacciones P_i son las incógnitas, y por claridad es costumbre escribir la ecuación 4-12 en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \qquad (4\text{-}13)$$

Esta ecuación muestra cómo se construye la *matriz de rigidez simétrica* del sistema a partir de las rigideces de los miembros. El patrón de esta matriz se repite para cualquier número de puntos nodales. Esta formulación muestra más claramente que el caso anterior —de un sistema de un solo grado de libertad— por qué este enfoque se llama a menudo *método de las rigideces*. Se dispone de excelentes programas de computadora para resolver esas ecuaciones simultáneamente.[2] En la ecuación 4-13, para eliminar desplazamientos de cuerpo rígido, por lo menos una de las Δ debe ser cero y su P libre.

El método de los desplazamientos se usa ampliamente en la práctica en el análisis de grandes y complejos problemas con ayuda de computadoras. Se presentan a continuación dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 4-5

Para la barra elástica sin peso soportada en ambos extremos como se muestra en la figura 4-10, determine los desplazamientos nodales y las reacciones usando el método de los desplazamientos. La sección transversal de la barra es constante en toda su longitud.

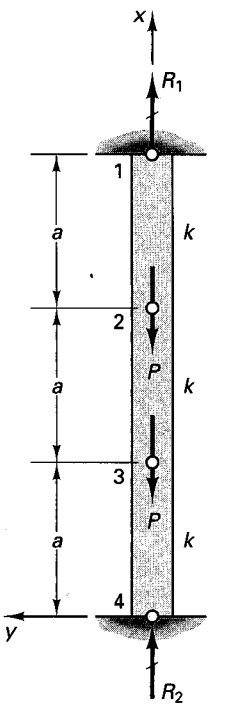


Fig. 4-10

SOLUCIÓN

Aquí, sólo Δ_2 y Δ_3 tienen que encontrarse, ya que $\Delta_1 = \Delta_4 = 0$. Por lo tanto, el sistema tiene dos grados de libertad cinemática. El coeficiente de rigidez k es el mismo para cada segmento de la barra. Aplicando las ecuaciones 4-12 y haciendo $\Delta_1 = \Delta_4 = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} -k\,\Delta_2 &= R_1 \\ 2k\,\Delta_2 - k\,\Delta_3 &= -P \\ -k\,\Delta_2 + 2k\,\Delta_3 &= -P \\ -k\,\Delta_3 &= R_2 \end{aligned}$$

Resolviendo la segunda y la tercera ecuaciones, simultáneamente, $\Delta_2 = \Delta_3 = -P/k$, y entonces de la primera y última ecuaciones, $R_1 = R_2 = P$. Este resultado, que pudo ser anticipado, significa que la carga superior está col-

[2] E. L. Wilson, CAL-86, *Computer Assisted Learning of Structural Analysis and the CAL-/SAP Development System*, Reporte núm. UCB/SESM-86/05, Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de California, Berkeley, California, 1986.

gada de arriba y la carga inferior está soportada en la base. El segmento medio de la barra no se distorsiona y se mueve como cuerpo rígido una distancia $\Delta_2 = \Delta_3$.

En este problema, el método de las fuerzas sería más fácil de aplicar que el método de los desplazamientos ya que hay sólo un grado de indeterminación estática.

Ejemplo 4-6

(a) Considere la misma barra cargada del ejemplo 4-5 soportada sólo en su parte superior y libre en el fondo; véase la figura 4-11. Determine los desplazamientos nodales y la reacción. Para este caso, $R_2 = 0$. (b) Resuelva la parte (a) si el extremo libre se desplaza $3P/k$ hacia arriba.

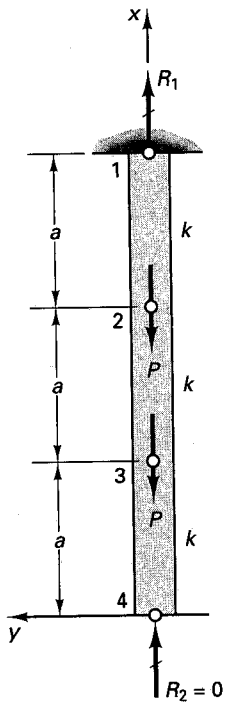


Fig. 4-11

SOLUCIÓN

(a) Aquí, $\Delta_1 = 0$ y deben determinarse tres desplazamientos nodales: Δ_2, Δ_3 y Δ_4. Por tanto, este problema estáticamente determinado tiene tres grados de libertad. Aplicando las ecuaciones 4-12, se tiene

$$\begin{aligned} -k\,\Delta_2 &= R_1 \\ 2k\,\Delta_2 - k\,\Delta_3 &= -P \\ -k\,\Delta_2 + 2k\,\Delta_3 - k\,\Delta_4 &= -P \\ -k\,\Delta_3 + k\,\Delta_4 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las últimas tres ecuaciones simultáneamente se obtiene $\Delta_2 = 2P/k$, $\Delta_3 = \Delta_4 = -3P/k$ y entonces, de la primera ecuación, $R_1 = 2P$. Estos resultados pueden ser verificados fácilmente por medio de los procedimientos vistos en el capítulo 3.

(b) En este caso, una fuerza R_2 de magnitud desconocida debe aplicarse en el extremo libre para generar el desplazamiento especificado $\Delta_4 = 3P/k$. Como antes, $\Delta_1 = 0$. Por tanto, mientras que las tres primeras ecuaciones establecidas para la parte (a) son aplicables, la cuarta ecuación debe ser ahora

$$-k\,\Delta_3 + k\,\Delta_4 = R_2$$

Después de sustituir el valor dado para Δ_4 y resolviendo simultáneamente las cuatro ecuaciones aplicables, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = P/k$ y $R_1 = 0$.

4-6. Problemas no lineales estáticamente indeterminados

Los procedimientos analizados en las tres secciones precedentes son muy efectivos para resolver problemas de barras cargadas axialmente estáticamente indeterminadas y *linealmente elásticas*. Limitando los problemas a un grado de indeterminación cinemática, los procedimientos pueden ex-

tenderse para incluir casos de comportamiento inelástico del material. Con este enfoque, la barra escalonada en la figura 4-12 o las barras simétricas en la figura 4-6 pueden analizarse independientemente de las propiedades mecánicas en cada parte de un sistema compuesto de dos partes. Por otra parte, la barra en la figura 4-4(a), con dos grados de indeterminación cinemática y tres segmentos esforzados en forma diferente, no es susceptible a este tipo de análisis.

En este enfoque ampliado, las fuerzas siguen siendo las incógnitas y están relacionadas en la unión de los dos sistemas por una condición de compatibilidad. En tales problemas, siempre puede escribirse una ecuación global de *equilibrio* para un sistema. Por ejemplo, para la barra en la figura 4-12, tal ecuación es

$$R_1 + R_2 + P = 0 \tag{4-14}$$

Entonces, para garantizar la *compatibilidad* en la unión de los dos segmentos de barra, las desviaciones en B se determinan usando dos caminos diferentes. Por lo tanto, como los extremos A y C están fijos, la desviación de la barra AB en B es Δ_{AB} y para la barra BC es Δ_{BC}; se infiere que

$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} \tag{4-15}$$

Al calcular esas cantidades es usualmente conveniente visualizar las barras cortadas y separadas en B y determinar las Δ para cada parte del sistema mantenido en equilibrio por las fuerzas en el corte.

Cualesquiera leyes constitutivas, incluyendo efectos térmicos y movimientos de los soportes pueden incluirse en la formulación de la última ecuación. Si el comportamiento de la barra es *linealmente elástico*, con ayuda de la ecuación 3-4, la ecuación especializada toma la forma

$$\frac{R_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{R_2 L_2}{A_2 E_2} \tag{4-16}$$

Como no se fijan restricciones en las relaciones constitutivas para calcular desviaciones según la ecuación 4-15, es posible tratar numerosos problemas no lineales. Los problemas con indeterminación estática interna pueden resolverse de manera similar. Sin embargo, debe recalcarse que, excepto para miembros continuos de material linealmente elástico, *la superposición no puede usarse con el procedimiento descrito.* Se presentan a continuación varios ejemplos usando el procedimiento antes descrito así como otras variantes.

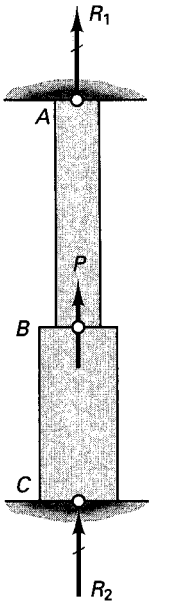


Fig. 4-12 Barra de material no lineal.

Ejemplo 4-7

Una barra escalonada está empotrada en ambos extremos; véase la figura 4-13(a). Su parte superior tiene un área transversal A_1; el área transversal de su parte inferior es A_2. (a) Si el material de la barra es elástico con módulo elástico E, ¿cuáles son las reacciones R_1 y R_2 causadas por la aplica-

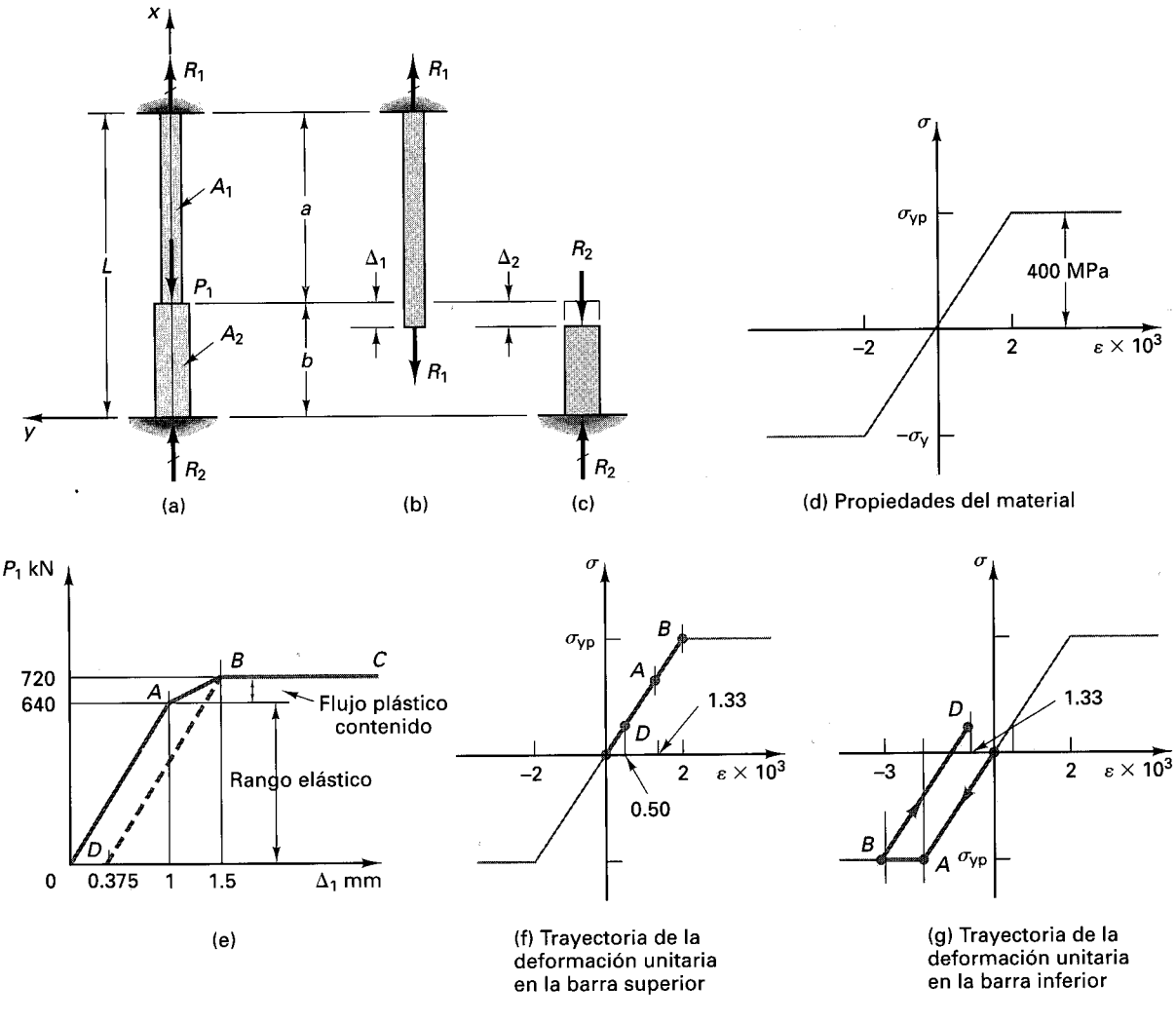


Fig. 4-13

ción de una fuerza axial P_1 en el punto de discontinuidad de la sección? Use las ecuaciones 4-14 y 4-16. (b) Si $A_1 = 600$ mm^2, $A_2 = 1200$ mm^2, $a = 750$ mm, $b = 500$ mm y el material es linealmente plástico y perfectamente elástico, como se muestra en la figura 4-13(d), determine el desplazamiento Δ_1 del escalón como función de la carga aplicada P_1. Sea $E = 200$ GPa. (c) Suponiendo que en el instante de la fluencia inminente en toda la barra se retira la fuerza aplicada P_1, determine la fuerza residual en la barra y la desviación residual en el escalón de la barra. (d) Usando un diagrama esfuerzo-deformación unitaria para el material, muestre el comportamiento de deformación unitaria para cada una de las dos partes de la barra durante la aplicación y retiro de la fuerza P_1.

SOLUCIÓN

(a) En este enfoque es conveniente visualizar la barra dividida en dos, como se muestra en las figuras 4-13(b) y (c). La parte superior está sometida en toda su longitud a una fuerza de tensión R_1 y se alarga una cantidad Δ_1. La parte inferior se contrae una cantidad Δ_2 bajo la acción de una fuerza de compresión R_2. Esas desviaciones deben ser iguales. Por lo tanto, usando las ecuaciones 4-14 y 4-15 o su equivalente, la ecuación 4-16, se tiene lo siguiente:

Por estática:

$$R_1 + R_2 = P_1$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \qquad \text{o} \qquad \frac{R_1 a}{A_1 E} = \frac{R_2 b}{A_2 E}$$

Resolviendo esas dos ecuaciones simultáneamente,

$$R_1 = \frac{P_1}{1 + aA_2/bA_1} \qquad \text{y} \qquad R_2 = \frac{P_1}{1 + bA_1/aA_2} \tag{4-10}$$

que coinciden con el resultado encontrado en el ejemplo 4-4.

(b) Por sustitución directa de los datos en las ecuaciones 4-10,

$$R_1 = \frac{P_1}{1 + 750 \times 1200/(500 \times 600)} = \frac{P_1}{4} \qquad \text{y} \qquad R_2 = \frac{3P_1}{4}$$

Por consiguiente, los esfuerzos normales son

$$\sigma_1 = R_1/A_1 = P/2400 \qquad \text{y} \qquad \sigma_2 = R_2/A_2 = -P/1600$$

Como $|\sigma_2| > \sigma_1$, la carga en la fluencia inminente se encuentra haciendo $\sigma_2 = -400$ MPa. Bajo esta carga, la parte inferior de la barra alcanza justamente la fluencia, y la deformación unitaria adquiere la magnitud $\varepsilon_{yp} = \sigma_{yp}/E = 2 \times 10^{-3}$. Por lo tanto, de la relación previa entre σ_2 y P,

$$P_{yp} = 1600\,\sigma_{yp} = 640 \times 10^3\,\text{N} = 640\,\text{kN}$$

y

$$\Delta_2 = \Delta_1 = \varepsilon_{yp} b = 2 \times 10^{-3} \times 500 = 1\,\text{mm}$$

Estas cantidades localizan el punto B en la figura 4-13(e).

Al incrementar P_1 más allá de 640 kN, la parte inferior de la barra continúa fluyendo tomando una fuerza de compresión $R_2 = \sigma_{yp} A_2 = 480$ kN. En el punto de fluencia inminente para la barra entera, la parte superior alcanza justamente la fluencia. Esto ocurre cuando $R_1 = \sigma_{yp} A_1 = 240$ kN y la deformación unitaria en la parte superior alcanza justamente el valor $\epsilon_{yp} = \sigma_{yp}/E$. Por tanto,

$$P_1 = R_1 + R_2 = 720\,\text{kN}$$

y

$$\Delta_1 = \varepsilon_{yp} a = 2 \times 10^{-3} \times 750 = 1.5 \text{ mm}$$

Más allá de este punto, el flujo plástico no está contenido y $P_1 = 720$ kN es la carga *última* o carga *límite* de la barra.

Note la simplicidad de calcular la carga límite, la cual, sin embargo, no proporciona información sobre las características de desviación del sistema. En general, el análisis plástico al límite es más simple que el análisis elástico, que, a su vez, es más simple que trazar la relación carga-deflexión elastoplástica.

(c) De acuerdo con la solución en la parte (b) cuando la fuerza aplicada a P_1 alcanza justamente el valor de 720 kN y se desvía 1.5 mm, punto B en la figura 4-13(e), la barra entera se vuelve plástica. En este instante, $R_1 = 240$ kN y $R_2 = 480$ kN. Al retirar esta fuerza la barra se recupera elásticamente (véase la sección 2-8). En las ecuaciones elásticas, una fuerza tal debe considerarse con signo opuesto al de la fuerza aplicada inicialmente. Por lo tanto, para la solución encontrada para la parte (b) con base en las ecuaciones 4-10, las reacciones superior e inferior causadas por el retiro de la fuerza P_1 son, respectivamente, $-P_1/4$ y $-3P_1/4$.

La fuerza residual R_{res} en la barra es igual a la fuerza inicial en cualquiera de las partes de la barra, menos la reducción en esas fuerzas causada por el retiro de la fuerza aplicada. Por consiguiente, para la parte superior de la barra,

$$R_{res} = R_1 - P_1/4 = 240 - 720/4 = 60 \text{ kN}$$

Igualmente, para la parte inferior de la barra,

$$R_{res} = R_2 - 3P_1/4 = 480 - 3 \times 720/4 = 60 \text{ kN}$$

Ambos resultados son iguales, ya que ninguna fuerza aplicada queda en la discontinuidad de la barra.

La desviación residual en la discontinuidad de la barra puede determinarse usando cualquier parte de ésta. Por ejemplo, como la parte superior pierde $P_1/4 = 180$ kN de la fuerza de tensión, basada en la ecuación 3-4, se contrae $aP_1/(4A_1E) = 1.125$ mm. Por consiguiente, la desviación residual es $1.5 - 1.125 = 0.375$ mm, como se muestra en la figura 4-13(e). La recuperación elástica mostrada en esta figura por la línea de rayas BD es paralela a OA.

(d) Los comportamientos de deformación unitaria para las dos partes de la barra están dados en las figuras 4-13(f) y (g). Como se muestra en la parte (b), el segmento inferior empieza a fluir primero. En ese instante, $\Delta_1 = 1$ mm y la deformación unitaria en la barra inferior es $\Delta_1/b = 2 \times 10^{-3}$, mientras que en la barra superior es $\Delta_1/a = 1.33 \times 10^{-3}$. Estos resultados se identifican por los puntos A en las figuras. El instante en que la barra superior comienza a fluir ocurre en $\Delta_1 = 1.5$ mm. Por tanto, las deformaciones unitarias en ambas partes de la barra se han incrementado por un factor de 1.5 y se muestran así en las figuras por sus respectivos puntos B. Ningún incremento de esfuerzo puede ocurrir en la barra inferior durante este tiempo ya que está en un estado de deformación plástica pura. Cuando la carga aplicada se retira por completo, la desviación residual $\Delta_1 = 0.375$ mm. Por

consiguiente, las deformaciones unitarias residuales correspondientes Δ_1/a y Δ_1/b son, respectivamente, 0.50×10^{-3} y 0.75×10^{-3} m/m. Los puntos correspondientes están identificados por los puntos D en las figuras 4-13(f) y (g).

Ejemplo 4-8

Una barra de aluminio de 30 in de longitud está contenida dentro de un tubo de acero; véase las figuras 4-14(a) y (b). Los dos materiales están unidos entre sí. Si los diagramas esfuerzo-deformación unitaria para los dos materiales pueden idealizarse como se muestra, respectivamente, en la figura 4-14(d), ¿qué desviación ocurrirá en el extremo si $P_1 = 80$ kips y si $P_2 = 125$ kips? Las áreas de las secciones transversales del acero A_s y del aluminio A_a son las mismas e iguales a 0.5 in^2.

SOLUCIÓN

Este problema es estáticamente indeterminado de forma interna, ya que se desconoce la manera en que la resistencia a la fuerza P está distribuida entre los dos materiales. Sin embargo, la fuerza total axial en una sección arbitraria puede determinarse fácilmente; véase la figura 4-14(c). Para un problema interno estáticamente indeterminado, los requisitos de equilibrio siguen siendo válidos pero es necesaria una condición adicional para resolver el problema. Esta condición auxiliar proviene de los requisitos de compatibilidad de las deformaciones. Sin embargo, como los requisitos de

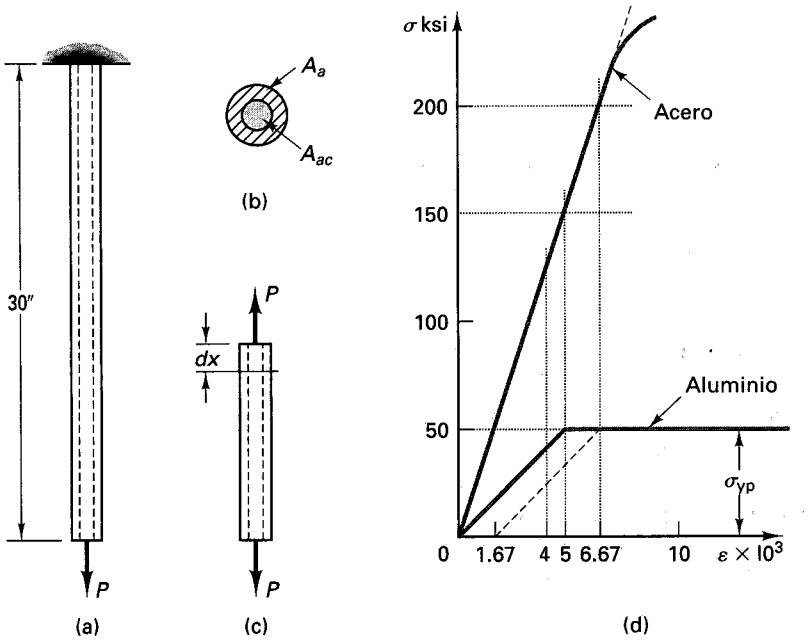


Fig. 4-14

la estática implican fuerzas y las deformaciones implican desplazamientos, debe añadirse una condición basada en las propiedades de los materiales.

Sean los subíndices *al* y *ac* sobre P, ϵ y σ los que identifiquen esas cantidades referidas al aluminio y al acero, respectivamente. Luego, notando que la fuerza aplicada está soportada por una fuerza desarrollada en el acero y en el aluminio y que en toda sección el desplazamiento o la deformación unitaria de los dos materiales es la misma, y suponiendo tentativamente una respuesta elástica de ambos materiales, se tiene lo siguiente:

Por equilibrio:

$$P_a + P_s = P_1 \text{ o } P_2$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_{al} = \Delta_{ac} \qquad \text{o} \qquad \varepsilon_{al} = \varepsilon_{ac}$$

De las propiedades de los materiales:

$$\varepsilon_{al} = \sigma_{al}/E_{al} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_{ac} = \sigma_{ac}/E_{ac}$$

Notando que $\sigma_{al} = P_{al}/A_{al}$ y $\sigma_{ac} = P_{ac}/A_{ac}$, se pueden resolver las tres ecuaciones. Del diagrama, los módulos elásticos son $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi y $E_{al} = 10 \times 10^6$ psi. Entonces,

$$\varepsilon_{al} = \varepsilon_{ac} = \frac{\sigma_{al}}{E_{al}} = \frac{\sigma_{ac}}{E_{ac}} = \frac{P_{al}}{A_{al}E_{al}} = \frac{P_{ac}}{A_{ac}E_{ac}}$$

Por consiguiente, $P_{ac} = [A_{ac}E_{ac}/(A_{al}E_{al})]P_{al} = 3P_{al}$, y $P_{al} + 3P_{al} = P_1 = 80$ k; por lo tanto, $P_{al} = 20$ k y $P_{ac} = 60$ k.

Aplicando la ecuación 3-4 a cualquiera de los materiales, la desviación en el extremo para 80 kips será

$$\Delta = \frac{P_{ac}L}{A_{ac}E_{ac}} = \frac{P_{al}L}{A_{al}E_{al}} = \frac{20 \times 10^3 \times 30}{0.5 \times 10 \times 10^6} = 0.120 \text{ in}$$

Esto corresponde a una deformación unitaria de $0.120/30 = 4 \times 10^{-3}$ in/in. En este rango, ambos materiales responden elásticamente, lo que satisface la hipótesis sobre las propiedades de los materiales hecha al principio de esta solución. De hecho, como puede verse en la figura 4-14(d), como para la respuesta elástica lineal la deformación unitaria puede alcanzar el valor 5×10^{-3} in/in en ambos materiales, por proporción directa, la fuerza aplicada P puede ser tan grande como 100 kips.

Bajo $P = 100$ kips, el esfuerzo en el aluminio alcanza el valor de 50 ksi. De acuerdo con el diagrama idealizado esfuerzo-deformación unitaria, ningún esfuerzo mayor puede ser resistido por este material, aunque las deformaciones unitarias pueden seguir creciendo. Por lo tanto, más allá de $P = 100$ kips puede considerarse que la barra de aluminio resiste sólo $P_a = A_a\sigma_{yp} = 0.5 \times 50 = 25$ kips. El resto de la carga aplicada debe ser tomada por el tubo de acero. Por lo tanto, para $P_2 = 125$ kips, 100 kips deben ser tomados por el tubo de acero. Por consiguiente, $\sigma_{ac} = 100/0.5 = 200$ ksi. Para este nivel de esfuerzo, $\varepsilon_{ac} = 200/(30 \times 10^3) = 6.67 \times 10^{-3}$ in/in. Por lo tanto, la desviación del extremo

$$\Delta = \varepsilon_{ac}L = 6.67 \times 10^{-3} \times 30 = 0.200 \text{ in}$$

Note que no es posible determinar Δ a partir de la deformación unitaria en el aluminio ya que no corresponde una deformación unitaria única al esfuerzo mayor de 50 ksi, que es todo lo que la barra de aluminio puede soportar. Sin embargo, en este caso, el tubo elástico de acero restringe el flujo plástico. Por lo tanto, como las deformaciones unitarias en ambos materiales son iguales, $\varepsilon_{ac} = \varepsilon_{al} = 6.67 \times 10^{-3}$ in/in; véase la figura 4-14(d).

Si se retira la fuerza aplicada $P_2 = 125$ kips, ambos materiales en la barra se recuperan elásticamente. Así entonces, si se imagina uno que la adherencia entre los dos materiales se rompe, el tubo de acero retomaría su forma inicial; pero se tendría en la barra de aluminio una deformación permanente (alargamiento) de $(6.67 - 5) \times 10^{-3} = 1.67 \times 10^{-3}$ in/in. Esta incompatibilidad de las deformaciones unitarias no puede desarrollarse si los dos materiales están unidos entre sí. Más bien, se desarrollan esfuerzos residuales que mantienen la misma deformación axial en ambos materiales. En este caso, la barra de aluminio queda ligeramente comprimida y el tubo de acero ligeramente estirado. El procedimiento para la solución de este tipo de problemas se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4-9

Una barra de acero con área transversal de 2 in^2 y longitud de 15.0025 in se inserta sin remacharse en un tubo de cobre como se muestra en la figura 4-15. El tubo de cobre tiene un área transversal de 3 in^2 y 15 in de longitud. Si se aplica una fuerza axial $P = 25$ kips sobre una tapa rígida, ¿qué esfuerzos se desarrollarán en los dos materiales? Suponga que los módulos elásticos del acero y del cobre son $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi y $E_{co} = 17 \times 10^6$ psi, respectivamente.

SOLUCIÓN

Si la fuerza aplicada P es suficientemente grande para cerrar la pequeña abertura, se desarrollará una fuerza P_{ac} en la barra de acero y una fuerza P_{co} en el tubo de cobre. Además, al cargar la barra, la barra de acero se

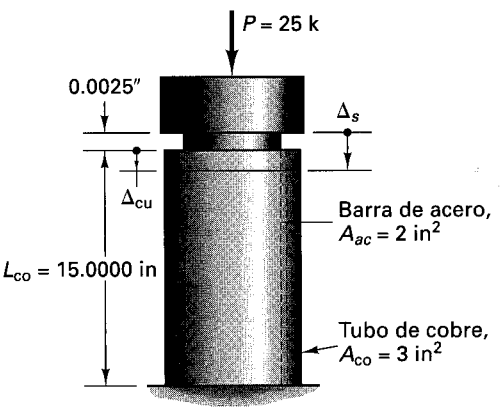


Fig. 4-15

comprimirá axialmente Δ_{ac}, que es igual a la deformación axial Δ_{co} del tubo de cobre más la abertura inicial. Por consiguiente,

Por estática:

$$P_{ac} + P_{co} = 25{,}000 \text{ lb}$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_{ac} = \Delta_{co} + 0.0025$$

Aplicando la ecuación 3-4, $\Delta = PL/AE$, sustituyendo y simplificando,

$$\frac{P_{ac}L_{ac}}{A_{ac}E_{ac}} = \frac{P_{co}L_{co}}{A_{co}E_{co}} + 0.0025$$

$$\frac{15.0025}{2 \times 30 \times 10^6} P_{ac} - \frac{15}{3 \times 17 \times 10^6} P_{co} = 0.0025$$

$$P_{ac} - 1.176P_{co} = 10{,}000 \text{ lb}$$

Resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente,

$$P_{co} = 6900 \text{ lb} \qquad \text{y} \qquad P_{ac} = 18{,}100 \text{ lb}$$

y dividiendo esas fuerzas entre sus respectivas áreas transversales se obtiene

$$\sigma_{co} = 6900/3 = 2300 \text{ psi} \qquad \text{y} \qquad \sigma_{ac} = 18{,}100/2 = 9050 \text{ psi}$$

Si cualquiera de esos esfuerzos cae arriba del límite proporcional de su material o si la fuerza aplicada es muy pequeña para cerrar la abertura, la solución anterior no será válida. Note también que como las deformaciones consideradas son pequeñas, es suficientemente exacto usar $L_{ac} = L_{co}$.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

La fuerza F necesaria para cerrar la abertura puede encontrarse primero usando la ecuación 3-4. Al desarrollar esta fuerza, la barra actúa como un "resorte" y resiste una parte de la fuerza aplicada. La fuerza restante P' causa deflexiones iguales Δ'_{ac} y Δ'_{co} en los dos materiales.

$$F = \frac{\Delta A_{ac}E_{ac}}{L_{ac}} = \frac{0.0025 \times 2 \times 30 \times 10^6}{15.0025} = 10{,}000 \text{ lb} = 10 \text{ kips}$$

$$P' = P - F = 25 - 10 = 15 \text{ kips}$$

Entonces, si P'_{ac} es la fuerza resistida por la barra de acero, además de la fuerza F' y P'_{co} es la fuerza tomada por el tubo de cobre,

Por estática:

$$P'_{ac} + P'_{co} = P' = 15$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_{ac}' = \Delta_{co}' \qquad \text{o} \qquad \frac{P_{ac}' L_{ac}}{A_{ac} E_{ac}} = \frac{P_{co}' L_{co}}{A_{co} E_{co}}$$

$$\frac{15}{2 \times 30 \times 10^6} P_{ac} = \frac{15}{3 \times 17 \times 10^6} P_{co}' \qquad P_{co}' = \frac{17}{20} P_{ac}'$$

Resolviendo las dos ecuaciones apropiadas simultáneamente, se encuentra que $P'_{co} + 6.9$ kips y $P'_{ac} = 8.1$ kips, o $P_{ac} = P'_{ac} + F = 18.1$ kips.

Si $(\sigma_{yp})_{ac} = 40$ ksi y $(\sigma_{yp})_{co} = 10$ ksi, la carga límite para este conjunto puede determinarse como sigue:

$$P_{\text{últ}} = (\sigma_{yp})_{ac} A_{ac} + (\sigma_{yp})_{co} A_{co} = 110 \text{ kips}$$

En la carga última, ambos materiales fluyen; por lo tanto, la pequeña discrepancia en las longitudes iniciales de las partes no es de consecuencia.

Ejemplo 4-10

Un tubo de cobre de 12 in de longitud y un área transversal de 3 in^2 se coloca entre dos tapas muy rígidas hechas de Invar;[3] véase la figura 4-16(a). Cuatro pernos de 3/4 in de acero están dispuestos en forma simétrica paralelamente al eje del tubo y están ligeramente apretados. Encuentre el esfuerzo en el tubo si la temperatura del conjunto se eleva de 60°F a 160°F. Sea $E_{co} = 17 \times 10^6$ psi, $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi, $\alpha_{co} = 9.1 \times 10^{-6}$ por °F y $\alpha_{ac} = 6.5 \times 10^{-6}$ por °F.

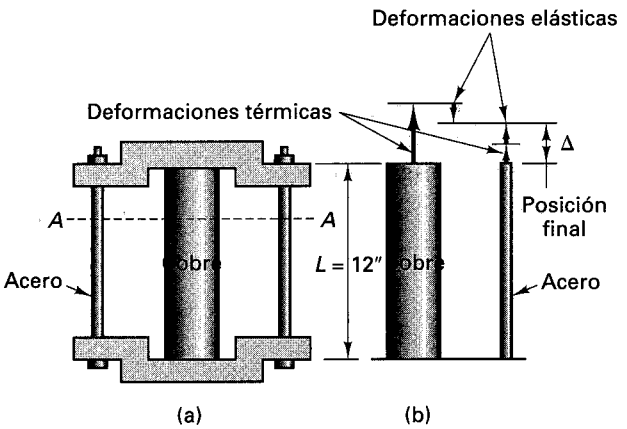


Fig. 4-16

[3]Invar es un acero aleado que a temperaturas ordinarias tiene un $\alpha \approx 0$ y por esta razón es usado en las mejores cintas de topógrafo y resortes de relojes.

SOLUCIÓN

Si el tubo de cobre y los pernos de acero pudieran expandirse libremente, tendrían lugar los alargamientos térmicos axiales mostrados en la figura 4-16(b). Sin embargo, como la deformación axial del tubo debe ser la misma que la de los pernos, el tubo de cobre será empujado hacia abajo y los pernos serán jalados hacia fuera, de manera que las deformaciones netas serán las mismas. Además, como puede establecerse al considerar un cuerpo libre del conjunto arriba de alguna sección arbitraria como la A-A en la figura 4-16(a), la fuerza de compresión P_{co} en el tubo de cobre y la fuerza de tensión P_{ac} en los pernos de acero, son iguales. Por consiguiente,

Por estática:

$$P_{co} = P_{ac} = P$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_{co} = \Delta_{ac} = \Delta$$

Esta relación cinemática, con base en la figura 4-16(b) y con la ayuda de las ecuaciones 2-11 y 3-4, toma la forma

$$\alpha_{co}\Delta T L_{co} - \frac{P_{co}L_{co}}{A_{co}E_{co}} = \alpha_{ac}\Delta T L_{ac} + \frac{P_{ac}L_{ac}}{A_{ac}E_{ac}}$$

o, como $L_{co} = L_{ac}$, $\Delta T = 100°\text{F}$ y $0.442\ \text{in}^2$ es el área transversal de un perno:

$$9.1 \times 10^{-6} \times 100 - \frac{P_{co}}{3 \times 17 \times 10^6} = 6.5 \times 10^{-6} \times 100 + \frac{P_{ac}}{4 \times 0.442 \times 30 \times 10^6}$$

Al resolver las dos ecuaciones simultáneamente, se obtiene $P = 6750$ lb. Por lo tanto, el esfuerzo en el tubo de cobre es $\sigma_{co} = 6750/3 = 2250$ psi.

La expresión cinemática que hemos usado puede también establecerse con base en el siguiente enunciado: La expansión diferencial de los dos materiales debido al cambio de temperatura es ajustado por o es igual a las deformaciones elásticas que tienen lugar en los dos materiales.

Ejemplo 4-11

Un perno de acero con área transversal $A_1 = 600\ \text{mm}^2$ se usa para sujetar dos arandelas de acero con espesor total L, cada una con área transversal $A_2 = 5400\ \text{mm}^2$; véase la figura 4-17(a). Si el perno en este arreglo se aprieta inicialmente de manera que su esfuerzo es de 150 MPa, ¿cuál será el esfuerzo final en este perno después de que se aplique una fuerza $P = 75$ kN al conjunto?

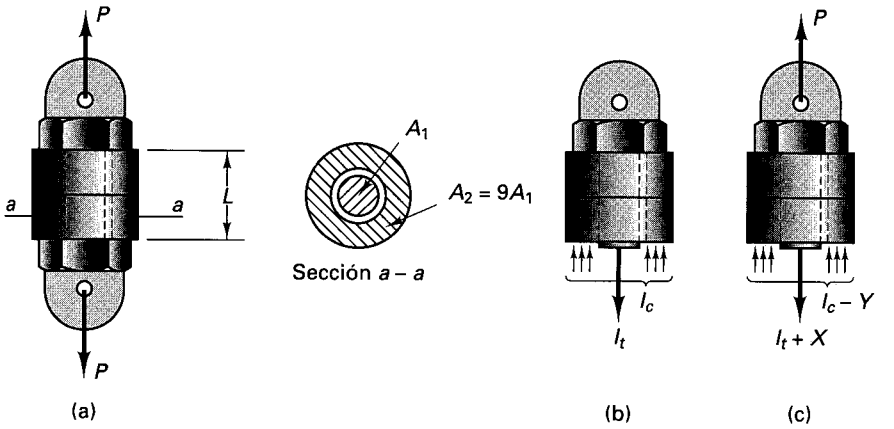


Fig. 4-17

SOLUCIÓN

Un cuerpo libre correspondiente a las condiciones iniciales del conjunto se muestra en la figura 4-17(b), donde I_t es la fuerza inicial de tensión en el perno e I_c es la fuerza inicial de compresión en las arandelas. Por estática, $I_t = I_c$. En la figura 4-17(c) se muestra un cuerpo libre del conjunto después de que se aplica la fuerza P, donde X designa el incremento en la fuerza de tensión en el perno y Y es el decremento en la fuerza de compresión sobre las arandelas debido a P. Como resultado de esas fuerzas X y Y, si las partes adyacentes permanecen en contacto, el perno se alarga la misma cantidad que las arandelas se expanden elásticamente. Por tanto, las condiciones finales son las siguientes:

Por estática:

$$P + (I_c - Y) = (I_t + X)$$

o, como $I_c = I_t$,

$$X + Y = P$$

Por compatibilidad:

$$\Delta_{\text{perno}} = \Delta_{\text{arandelas}}$$

Aplicando la ecuación 3-4,

$$\frac{XL}{A_1E} = \frac{YL}{A_2E} \qquad \text{es decir,} \qquad Y = \frac{A_2}{A_1}X$$

Resolviendo las dos ecuaciones simultáneamente,

$$X = \frac{P}{1 + A_2/A_1} = \frac{P}{1 + 9} = 0.1P = 7.5 \text{ kN}$$

Por tanto, el incremento del esfuerzo en el perno es $X/A_1 = 12.5$ MPa y el esfuerzo en el perno después de la aplicación de la fuerza P toma el valor 162.5 MPa. Este resultado sorprendente indica que la mayor parte de la

fuerza aplicada es tomada al disminuir la fuerza inicial de compresión sobre las arandelas, ya que $Y = 0.9P$.

La solución no es válida si uno de los materiales deja de comportarse elásticamente o si la fuerza aplicada es tal que la precompresión inicial de las partes es destruida.

Situaciones que se aproximan al problema precedente idealizado se encuentran en muchas aplicaciones prácticas. Al enfriarse, un remache caliente usado en la conexión de placas, desarrolla en él enormes esfuerzos de tensión. Los pernos fuertemente apretados, como en la cabeza de un motor de automóvil o en la brida de un recipiente a presión, tienen altos esfuerzos iniciales de tensión; lo mismo pasa en los tendones de acero en una viga de concreto preesforzado. Es crucial que al aplicar las cargas de trabajo, ocurra sólo un pequeño incremento en los esfuerzos iniciales de tensión.

Ejemplo 4-12

Extienda la solución del ejemplo 4-3 para la estructura mostrada en la figura 4-18(a) al rango plástico del comportamiento del material y dibuje un diagrama fuerza-desplazamiento. El área transversal A de cada barra es la misma. Suponga un comportamiento ideal elasto-plástico con el material fluyendo en σ_{yp}.

SOLUCIÓN

La *ecuación de equilibrio* para fuerzas en el nudo C, figura 4-18(c), tomando en cuenta la simetría, es

$$F_1 + 2F_2 \cos \alpha = P$$

La *ecuación de compatibilidad* en el nudo C, figura 4-18(a), que relaciona los alargamientos en las barras AC' y DC' con el de la barra BC', es

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha$$

En estas dos ecuaciones, se supone que las deformaciones son pequeñas. Sin embargo, esas ecuaciones son ciertas si el material de la barra se comporta elástica o plásticamente.

Observando que las barras inclinadas tienen $L/(\cos\alpha)$ de longitud, usando la ecuación 3-4 y la ecuación de compatibilidad establecida,

$$\frac{F_2[L/\cos\alpha]}{AE} = \frac{F_1 L}{AE}\cos\alpha \qquad \text{o} \qquad F_2 = F_1 \cos^2\alpha$$

Sustituyendo esta última expresión en la ecuación de equilibrio del nudo C y simplificando, se llega a los mismos resultados encontrados en el ejemplo 4-3:

$$F_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha} \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}\cos^2\alpha \qquad (4\text{-}5)$$

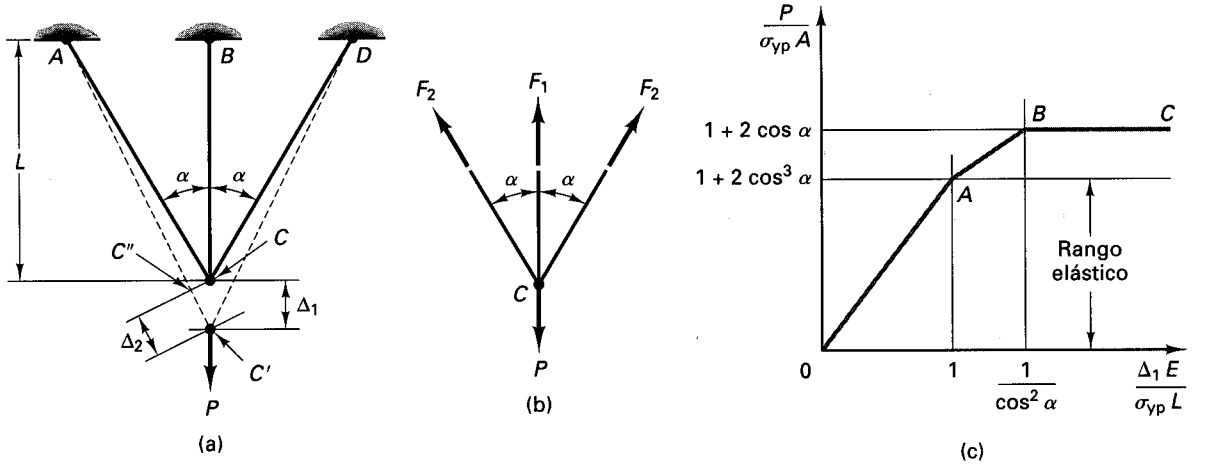


Fig. 4-18

Se ve de esta solución que la fuerza máxima ocurre en la barra vertical. En la fluencia inminente $F_1 = \sigma_{yp}A$ y, por la ecuación 3-4, $\Delta_1 = \sigma_{yp}L/E$. Sustituyendo $F_1 = \sigma_{yp}A$ en el lado izquierdo de la ecuación 4-5, se obtiene la fuerza $P = \sigma_{yp}A(1 + 2\cos^3\alpha)$ en el límite del comportamiento elástico. Este valor de P que ocurre en $\Delta_1 = \sigma_{yp}L/E$ está identificado por el punto A en la figura 4-18(c).

Incrementando la fuerza P más allá de la primera fluencia en la barra vertical, la fuerza $F_1 = \sigma_{yp}A$ permanece constante y la ecuación de estática en la junta C es suficiente para determinar la fuerza F_2 hasta que el esfuerzo en las barras inclinadas alcance el valor σ_{yp}. Esto ocurre cuando $F_2 = \sigma_{yp}A$. En la fluencia inminente en las barras inclinadas, con la barra vertical ya fluyendo, la ecuación de equilibrio en la junta C da $P = \sigma_{yp}A\ (1 + 2\cos\alpha)$. Esta condición corresponde a la *carga límite plástica* del sistema. Note que el procedimiento para encontrar esta carga es bastante simple, ya que el sistema es estáticamente determinado cuando se alcanza la carga límite. En el capítulo 20 tal carga límite es asociada con el concepto de *mecanismo de colapso.*

En la fluencia inminente en las barras inclinadas, de acuerdo con la ecuación 3-4, $\Delta_2 = (\sigma_{yp}/E)\ [L/\cos\alpha]$ y $\Delta_1 = \Delta_2/\cos\alpha = \sigma_{yp}L/(E\cos^2\alpha)$. Este valor de Δ_1 localiza la abscisa del punto B en la figura 4-18(c). Más allá de este punto, todas las barras continúan fluyendo sin límite con base en una plasticidad ideal.

4-7. Enfoque de la ecuación diferencial para desviaciones

En la Sección 3-2 la desviación axial u de una barra fue calculada, en esencia, resolviendo una ecuación diferencial de primer orden $\varepsilon_x = du/dx$, ecuación 3-1. Es instructivo reformular este problema como una ecuación

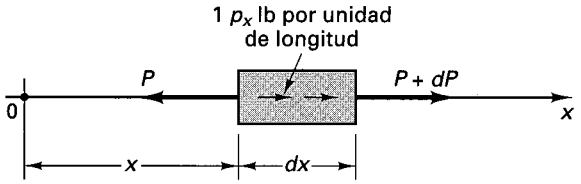


Fig. 4-19 Elemento infinitesimal de una barra cargada axialmente.

de segundo orden. Una ecuación semejante, para materiales linealmente elásticos, se obtiene de dos observaciones. Primero, como en general, $du/dx = \varepsilon = \sigma/E = P/AE$, se tiene

$$P = AE\frac{du}{dx} \tag{4-17}$$

Otra relación se basa en los requisitos de equilibrio para un elemento infinitesimal de una barra cargada axialmente. Para este fin, considere un elemento típico como el mostrado en la figura 4-19, donde todas las fuerzas se muestran con un sentido positivo de acuerdo con la convención de signos adoptada previamente. Como $\Sigma F_x = 0$ o $dP + p_x\,dx = 0$,

$$\frac{dP}{dx} = -p_x \quad \left[\frac{\text{lb}}{\text{in}}\right]\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right] \tag{4-18}$$

Esta ecuación establece que la razón de cambio respecto a x de la fuerza axial interna P es igual al negativo de la fuerza aplicada p_x. Con base en esto y suponiendo AE constante,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{AE}\frac{dP}{dx} \quad \text{o} \quad AE\frac{d^2u}{dx^2} = -p_x \tag{4-19}$$

Es importante notar que los tres conceptos básicos de la mecánica de sólidos están incluidos en la derivación de esta ecuación diferencial. Los requisitos de la *estática* se satisfacen al usar la ecuación 4-18 y los de la *cinemática* al usar la ecuación 3-1. La *relación constitutiva* está definida por la ecuación 2-8. Una solución de la ecuación 4-19 *sometida a las condiciones de frontera prescritas constituye una solución de cualquier problema dado de barras elásticas cargadas axialmente.* La ecuación 4-19 es igualmente aplicable a problemas estáticamente determinados *e* indeterminados. Sin embargo, por facilidad de la solución, p_x/AE debe ser una función continua. Cuando la función es discontinua, se tienen varias alternativas posibles. Una de ellas es obtener soluciones para cada segmento de una barra y aplicar las condiciones de continuidad en las juntas.[4] Esto está relacionado con el procedimiento estáticamente determinado visto en la Sección 3-2 y

[4]Esto requiere que los desplazamientos de los segmentos de barra agrandados sean iguales en una discontinuidad y que las fuerzas axiales que actúan sobre un elemento infinitesimal aislado en la discontinuidad estén en equilibrio. (Véase por ejemplo, el elemento en *B* en la figura 4-7 (c), donde en una discontinuidad la fuerza *P* puede también ser cero.)

con el procedimiento estáticamente indeterminado considerado en las Secciones 4-4 y 4-5. Para fuerzas concentradas, conviene usar las funciones de singularidad analizadas en la Sección 7-14. Sin embargo, el uso directo de la ecuación 4-19 para barras en que se aplican varias cargas axiales y/o cambian las secciones transversales puede resultar muy laborioso. Por tanto, los procedimientos vistos antes, incluyendo el esquema de dividir los problemas en estáticamente determinados e indeterminados, son más útiles en las aplicaciones prácticas.

El ejemplo que sigue ilustra el procedimiento cuando p_x es una función continua.

Ejemplo 4-13

(a) Considere una barra de sección transversal uniforme empotrada entre dos soportes rígidos que es girada en una centrifugadora, de manera tal que se desarrolla en la barra una fuerza axial distribuida aproximadamente uniforme p_0 N/m, como se muestra en la figura 4-20(a). Determine las reacciones en sus extremos. (b) Si la misma barra está soportada sólo en un extremo, figura 4-20(b), ¿cuáles serán los desplazamientos $u(x)$ a lo largo de la barra?

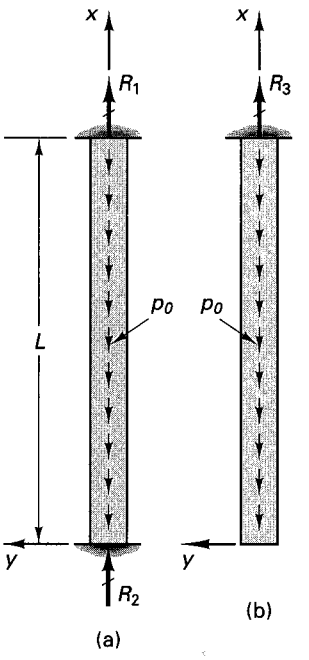


Fig. 4-20

SOLUCIÓN

(a) Usando la ecuación 4-19 y tomando en cuenta la ecuación 4-17, al integrar dos veces se obtiene,

$$AE\frac{d^2u}{dx^2} = -(-p_o) = p_o$$

$$AE\frac{du}{dx} = p_o x + C_1 = P$$

$$AEu = \frac{p_o x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 pueden encontrarse observando que la desviación u es cero en ambos extremos; es decir, $u(0) = 0$ y $u(L) = 0$. Por consiguiente, de la última ecuación,

$$AEu(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad C_2 = 0$$

$$AEu(L) = p_o L^2/2 + C_1 L = 0 \qquad \text{y} \qquad C_1 = -p_o L/2$$

Como $u'(x) = du/dx$, de la ecuación 4-17,

$$R_2 = P(0) = AE\,u'(0) = -p_o L/2$$

El signo negativo implica que esta fuerza es generada por esfuerzos de compresión. Similarmente,

$$R_1 = P(L) = AE\,u'(L) = p_o L/2$$

Estos resultados indican que las fuerzas aplicadas son compartidas igualmente por los dos soportes.

(b) La solución general para el problema encontrada en (a) permanece aplicable. Sin embargo, diferentes constantes de integración deben determinarse a partir de las dos condiciones de frontera. Éstas son $P(0) = 0$ y $u(L) = 0$; por consiguiente, $AEu'(0) = 0$ y $C_1 = 0$. Similarmente,

$$AEu(L) = p_o L^2/2 + C_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad C_2 = -p_o L^2/2$$

Por lo tanto,

$$AEu = -\frac{p_o}{2}(L^2 - x^2)$$

Como es de esperarse,

$$R_3 = AE\,u'(L) = p_o L$$

PROBLEMAS

Sección 4-3

4-1. Considere la barra dada en el ejemplo 3-2 y suponga que sus extremos O y D están fijos y que $P_2 = 390$ kN y $P_3 = 200$ kN actúan en las direcciones mostradas. (a) Determine las reacciones. (b) Dibuje los diagramas de fuerza axial, de deformación unitaria axial y de desplazamiento axial.

4-2. Si en el problema 4-1, además de las fuerzas aplicadas, hay un descenso de temperatura de 50°C, ¿qué reacciones se desarrollan en los soportes? Sea $\alpha = 25 \times 10^{-6}/°C$.

4-3. Para la barra elástica con sección transversal constante de 2 in^2 mostrada en la figura, (a) determine las reacciones y (b) dibuje los diagramas de fuerza axial, de deformación unitaria axial y de desplazamiento axial. Sea $E = 10 \times 10^3$ ksi.

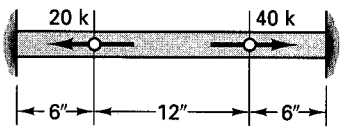


Fig. P4-3

4-4. Una barra de aluminio con extremos agrandados para minimizar las concentraciones de esfuerzos debe diseñarse para tomar una carga de inversión completa de 7.5 kN durante 5×10^8 ciclos. Calcule la sección transversal requerida en la barra si el factor de seguridad debe ser de 1.8. Use los datos de la figura 2-26 y suponga que la barra tiene sección transversal constante.

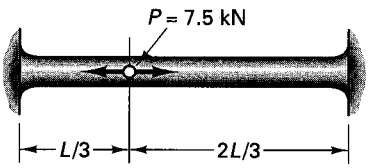


Fig. P4-4

4-5. Una barra elástica de sección transversal variable, empotrada en ambos extremos, está cargada como se muestra en la figura. Las flexibilidades de los segmentos de barra son $f/2$, f y f. Determine las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza axial y desplazamiento axial.

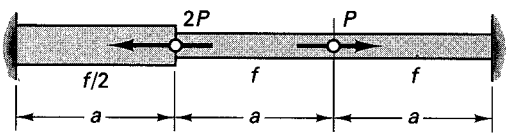


Fig. P4-5

4-6. Considere la misma barra elástica de área transversal variable mostrada en las dos figuras alternativas. Determine la desviación Δ_{ab} en a causada por la aplicación de una fuerza unitaria en b y demuestre que es igual a Δ_{ba} que es la desviación en b debida a la aplicación de una fuerza unitaria en a. Sea $A_1 = 2A_2$. (En la Sección 19-4 se muestra que esta relación es verdadera en general para los sistemas elásticos. Ella es ampliamente usada en el análisis. Esta conclusión puede alcanzarse por inspección para barras estáticamente determinadas.)

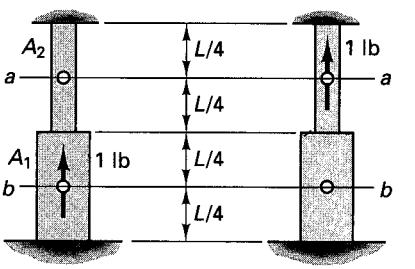


Fig. P4-6

4-7. Si se aplica una carga de 1 kip a una barra rígida suspendida de tres alambres como se muestra en la figura, ¿qué fuerza será resistida por cada alambre? Los alambres exteriores son de aluminio ($E = 10^7$ psi). El alambre interior es de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi). Inicialmente los alambres están tensos.

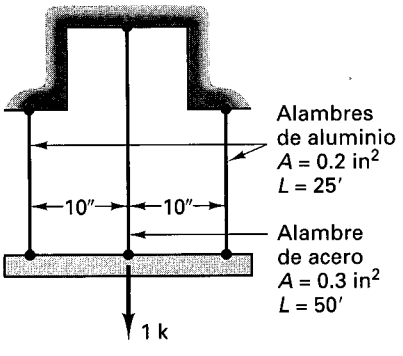


Fig. P4-7

Fig. P4-8

4-8. Tres alambres idénticos de acero igualmente espaciados están unidos a una barra rígida que soporta una masa M que desarrolla una fuerza hacia abajo de 6 kN, como se muestra en la figura. Inicialmente esta fuerza está igualmente distribuida entre los tres alambres. Los esfuerzos en los alambres caen dentro del rango elástico lineal de comportamiento del material. (a) Calcule las fuerzas en los alambres causadas por un descenso de temperatura de 60°C en el alambre derecho. Propiedades de los alambres: $A = 10$ mm^2, $L = 2000$ mm, $E = 200$ GPa, $\alpha = 12.5 \times 10^{-6}$/°C. (b) ¿Para qué cambio de temperatura dejará de estar tenso el alambre medio?

4-9. Si en el sistema mostrado en la figura P4-7 la fuerza aplicada de 1 k es reemplazada por una masa de 500 lb unida a la viga, ¿cuál será la frecuencia natural vertical de vibración? La frecuencia de vibración está dada por $f = \sqrt{g/\Delta}/2$ Hz, donde g es la aceleración de la gravedad y Δ es la desviación estática en el centro del sistema.

4-10. Inicialmente, al aplicar una fuerza de 3 kN a una barra rígida que cuelga de tres alambres paralelos de acero, los tres alambres quedan tensos. ¿Qué fuerzas adicionales se desarrollarán en los alambres si el alambre izquierdo se desliza 3 mm desde su soporte? Cada alambre tiene un área de sección transversal de 10 mm^2 y un módulo elástico de 200 GPa.

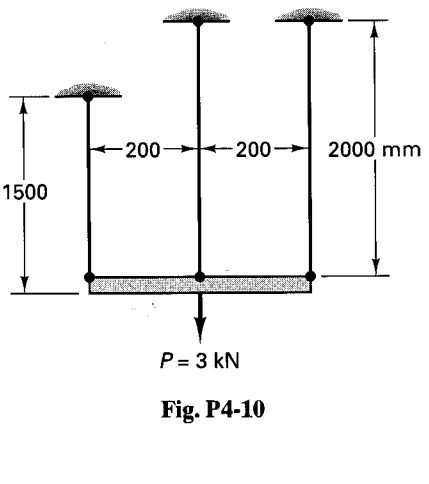


Fig. P4-10

4-11. Resuelva el ejemplo 4-3 cambiando los ángulos de inclinación de las barras α a 30° y considerando que el área transversal de la barra BD es $2A$. Las secciones transversales de las barras AD y DC permanecen iguales a A.

4-12. Resuelva el ejemplo 4-3 suponiendo que la barra media de acero y las barras exteriores de aluminio 6061-T6 aumentan 50°C en temperatura. Sea $\alpha = 30°$, $P = 2$ kN, y $L = 2000$ mm; todas las barras tienen $A = 40$ mm^2. Use la Tabla 1B en el apéndice para las propiedades físicas de los materiales.

Sección 4-4

4-13. Una barra elástica empotrada en ambos extremos está cargada por una carga axial P, como se muestra en la figura. El área transversal de la barra A es constante. (a) Determine las reacciones e interprete los resultados en relación a la posición de la fuerza aplicada. (b) Dibuje el diagrama de desplazamiento axial, suponiendo que E es conocida.

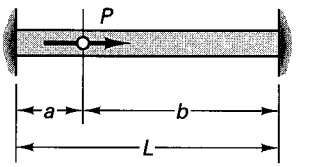
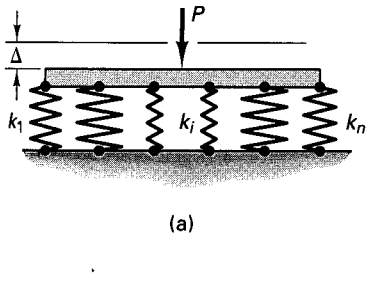


Fig. P4-13

4-14. Para resortes dispuestos simétricamente en paralelo, la constante de resorte combinada $k = \Sigma_n k_i$; véase la figura (a). Justifique que para resortes en serie, como en la figura (b), la constante de resorte del sistema k se deriva de $1/k = \Sigma_n 1/k_i$, o, alternativamente, $f = \Sigma_n f_i$, donde f es la flexibilidad del sistema y f_i es la flexibilidad del i-ésimo resorte.



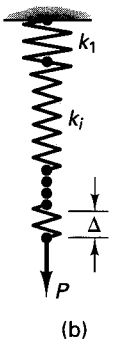


Fig. P4-14

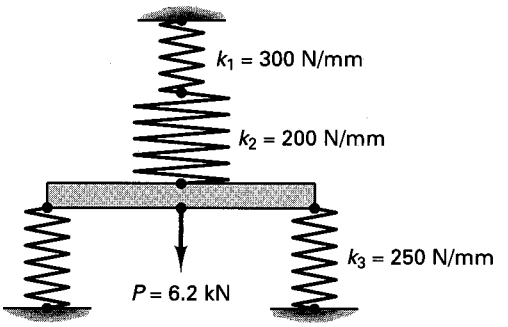


Fig. P4-15

4-15. Un arreglo simétrico de resortes está unido a una barra rígida y soporta una fuerza aplicada P, como se muestra en la figura. (a) Encuentre las reacciones. (*Sugerencia:* Use las relaciones dadas en el problema 4-14.) (b) ¿Cómo se distribuye la desviación total entre los dos resortes superiores?

4-16. Calcule la constante de resorte para el sistema de dos resortes paralelos mostrado en la figura P4-16. (*Sugerencia:* Encuentre la distribución de fuerzas entre los resortes aplicando la fuerza unitaria mostrada.)

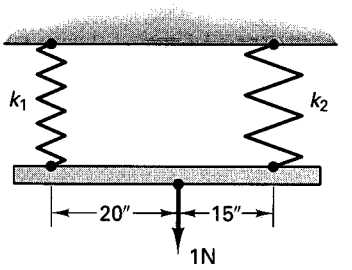


Fig. P4-16

4-17. Resuelva el problema 4-7 usando el método de los desplazamientos.

4-18. Una barra elástica de sección transversal variable y empotrada en ambos extremos, está cargada axialmente como se muestra en la figura. El área transversal de la parte menor es A y el de la parte mayor es $2A$. (a) Usando el método de los desplazamientos, encuentre las reacciones. (b) Dibuje un diagrama cualitativo del desplazamiento axial. (*Sugerencia:* Use la relación dada en el problema 4-14 para determinar las rigideces combinadas de los segmentos de barra a la izquierda de P.)

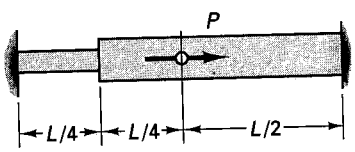


Fig. P4-18

4-19. Una barra de espesor constante y empotrada en ambos extremos tiene la geometría mostrada en la figura. Determine las reacciones causadas por la fuerza axial P aplicada. (*Sugerencia:* Encuentre primero la rigidez de la parte ahusada de la barra.)

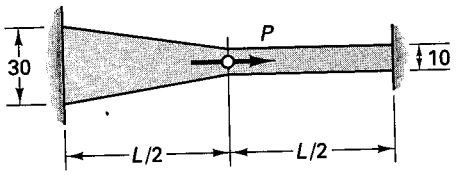


Fig. P4-19

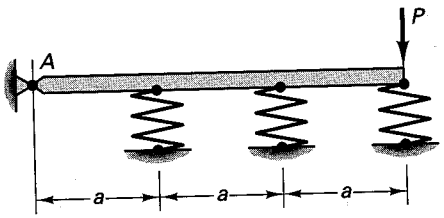


Fig. P4-20

4-20. Una barra rígida está articulada en su extremo A y además está soportada sobre tres resortes idénticos, cada uno de rigidez k. (a) ¿Cuál es el grado de indeterminación estática del sistema? (b) ¿Cuántos grados de libertad se tienen? (c) Encuentre las fuerzas que actúan sobre los resortes.

4-21. Una barra rígida está soportada por un pasador en A y dos alambres linealmente elásticos en B y C, como se muestra en la figura. El área del alambre en B es de 80 mm^2 y el área del alambre en C es de 100 mm^2. Determine las reacciones en A, B y C causadas por la fuerza aplicada $P = 6$ kN.

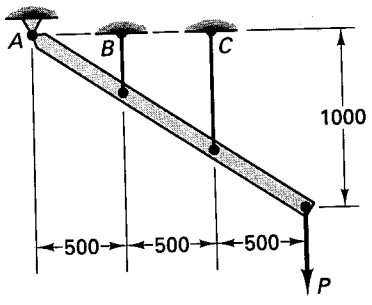


Fig. P4-21

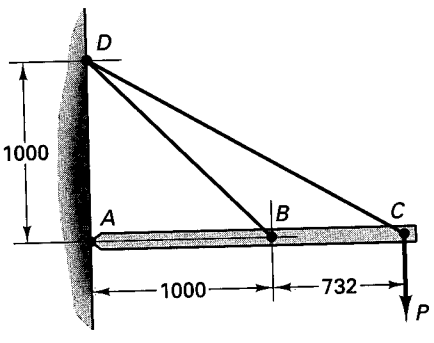


Fig. P4-22

4-22. Una barra rígida está soportada por un pasador en A y dos alambres idénticos linealmente elásticos inclinados en B y C. Determine las fuerzas en los alambres causadas por la fuerza aplicada $P = 8$ kN.

4-23. Cinco barras de acero, cada una con área transversal de 500 mm^2, están dispuestas de manera simétrica, como se muestra en la figura. Suponga que el acero se comporta como un material linealmente elástico con $E = 200$ GPa. Determine la desviación del nodo A debido a la fuerza $P = 2$ MN. Suponga que inicialmente las barras están tensas.

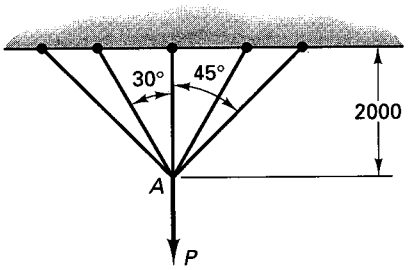


Fig. P4-23

Sección 4-5

4-24. Una barra elástica de sección transversal variable y empotrada en ambos extremos está cargada axialmente en varios puntos como se muestra en la figura. La sección transversal mayor tiene un área de $2A$ y la menor tiene un área A. (a) Compare los grados de indeterminación cinemática y estática. (b) Determine las reacciones si $P_1 = 3P, P_2 = 2P$ y $P_3 = P$. (c) Dibuje el diagrama de fuerza axial.

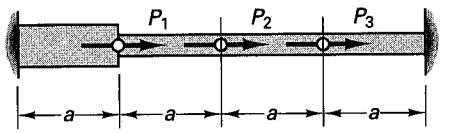


Fig. P4-24

4-25. Resuelva el problema 4-24 después de retirar la fuerza P_1. (*Sugerencia:* El grado de indeterminación cinemática puede reducirse usando una relación dada en el problema 4-14.)

Sección 4-6

4-26. Un material tiene una relación no lineal esfuerzo-deformación unitaria dada por $\sigma = K\epsilon^n$, donde K y n son constantes del material. Si una barra hecha con este material y que tiene área transversal constante A, está inicialmente empotrada en ambos extremos y luego se carga como se muestra en la figura, ¿qué tanto de la fuerza aplicada P es tomada por el soporte izquierdo?

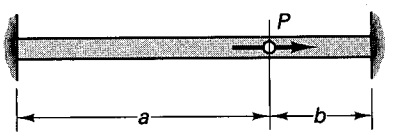


Fig. P4-26

4-27. Una barra está fija en A y cargada por una fuerza axial P, como se muestra en la figura. El material es plástico y perfectamente elástico, con $E = 200$ GPa y un esfuerzo de fluencia de 200 MPa. Antes de la aplicación de la carga existe una abertura de 3 mm entre el extremo de la barra y el soporte fijo C. (a) Dibuje el diagrama carga-desplazamiento para el punto de carga, suponiendo que P aumenta desde cero al valor último para la barra. El área transversal de A a B es de 200 mm^2 y de B a C es de 100 mm^2. (b) ¿Cuál será el desplazamiento residual del punto B al liberar la fuerza aplicada?

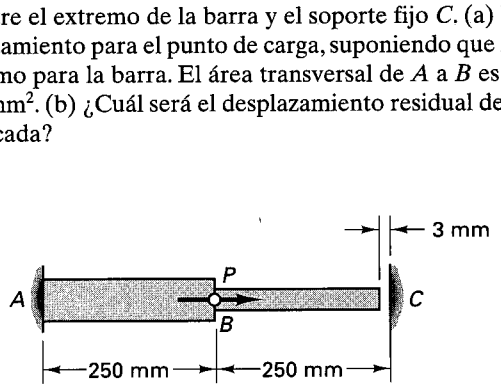


Fig. P4-27

4-28. La sección transversal de una columna corta de concreto reforzado es como se muestra en la figura. Cuatro barras redondas de 1 in sirven como refuerzo. (a) Determine la resistencia elástica instantánea de la columna con base en esfuerzos permisibles. (b) Estime la resistencia última (plástica) de la columna. Suponga que ambos materiales son plásticos y perfectamente elásticos. Para el acero, sea $\sigma_{perm} = 24$ ksi, $\sigma_{yp} = 60$ ksi y $E = 30 \times 10^6$ psi y para el concreto, $\sigma_{perm} = 2000$ psi, $\sigma_{yp} = 4600$ psi y $E = 2 \times 10^6$ psi. (Se ha demostrado experimentalmente que cuando el acero fluye, la resistencia a la "fluencia" del concreto es aproximadamente $0.85\sigma_{últ}$, donde $\sigma_{últ}$ es la resistencia última a compresión de una probeta cilíndrica sin refuerzo del mismo material, edad y condiciones de curado. Para lograr un comportamiento dúctil en las columnas, el uso de estribos o espirales laterales de refuerzo es esencial.)

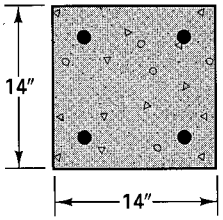


Fig. P4-28

4-29. Una plataforma rígida descansa sobre dos barras de aluminio ($E = 10^7$ psi), cada una de 10.000 in de longitud. Una tercera barra de acero ($E = 30 \times 10^6$ psi) situada entre las dos anteriores tiene 9.995 in de longitud. (a) ¿Cuál será el esfuerzo en la barra de acero si una fuerza P de 100 kips se aplica sobre la plataforma? (b) ¿Cuánto se acortan las barras de aluminio? (c) ¿Cuál será la resistencia última (plástica) para el sistema si $(\sigma_{yp})_{Al} = 40$ ksi y $(\sigma_{yp})_{Ac} = 60$ ksi?

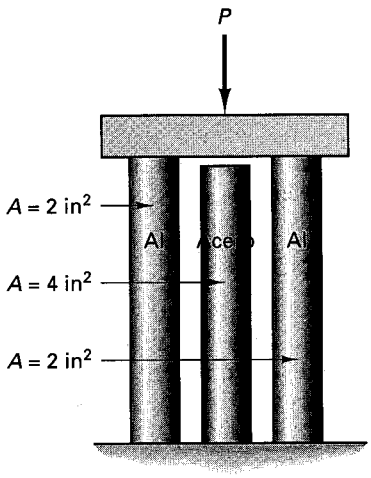


Fig. P4-29

4-30. Una fuerza $P = 1$ kN se aplica a una barra rígida suspendida de tres alambres como se muestra en la figura. Todos los alambres son de igual tamaño y del mismo material. Para cada alambre, $A = 80$ mm^2, $E = 200$ GPa y $L = 4$ m. Si inicialmente no hay holgura en los alambres, ¿cómo se distribuye la carga aplicada entre éstos?

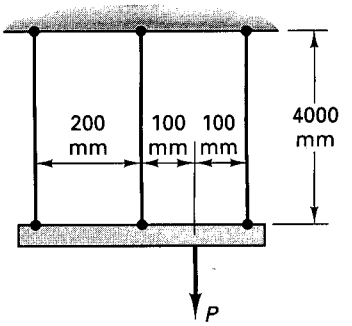


Fig. P4-30

4-31. Una barra de aluminio de 7 in de largo que tiene dos áreas transversales diferentes, se inserta en un eslabón de acero, como se muestra en la figura. Si a 50°F no existe fuerza axial en la barra de aluminio, ¿cuál será la magnitud de esta fuerza cuando la temperatura se eleva a 160°F? $E_{Al} = 10^7$ psi y $\alpha_{Al} = 12.0 \times 10^{-6}$/°F; $E_{Ac} = 30 \times 10^6$ psi y $\alpha_{Ac} = 6.5 \times 10^{-6}$/°F.

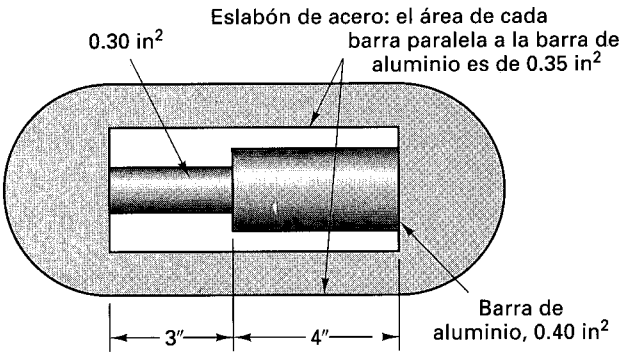


Fig. P4-31

4-32. Un tubo de aluminio está comprimido axialmente entre las dos tuercas pesadas de un perno de acero, como se muestra en la figura. Si se sabe que el esfuerzo axial en el manguito a 60°C es de 20 MPa, ¿a qué temperatura se anula este preesfuerzo? Para el tubo de aluminio, $A = 1000$ mm^2, $E = 70 \times 10^3$ MPa y $\alpha = 23.2 \times 10^{-6}$ por °C. Para el perno de acero, $A = 500$ mm^2, $E = 200 \times 10^3$ MPa y $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$ por °C.

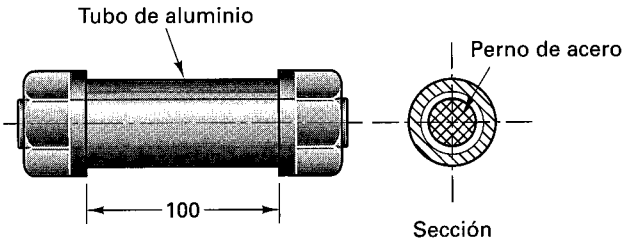


Fig. P4-32

4-33. Resuelva el ejemplo 4-12 suponiendo que el módulo elástico E_1 para la barra media es tres veces más pequeño que el de las barras exteriores (es decir, $E_2 = E_3 = 3E_1$).

4-34. Dibuje el diagrama carga-deformación para la junta A en el problema 4-23 debido a la fuerza aplicada P, suponiendo que el esfuerzo de fluencia para el material $\sigma_{yp} = 250$ MPa.

4-35. Un estudio sobre flujo plástico fue iniciado en la Universidad de California en 1930. Una serie de experimentos fue terminada en 1957. El arreglo típico usado fue como el mostrado en la figura; e inicialmente fue aplicado un esfuerzo de compresión de 800 psi a los cilindros de concreto apretando las tres barras de acero. La constante de resorte k era de 6900 lb/in; el área A de cada barra era de 0.20 in^2; la longitud efectiva de cada barra era $L = 24$ in; el módulo elástico de las barras $E = 30 \times 10^6$ psi y la E del concreto era aproximadamente de 4×10^6 psi. Si el cambio en deformación Δ debido a la contracción y flujo plástico en una de las probetas de concreto después de 27 años se encontró que era de 0.0308 in, ¿qué cambio en esfuerzo ocurrió en el concreto? ¿Qué tan bien se mantuvo el esfuerzo constante? ¿Cómo se compara la deformación total en el concreto con la deformación elástica? En sus cálculos incluya el cambio de esfuerzo en las barras de acero, pero desprecie la deformación de las placas extremas.

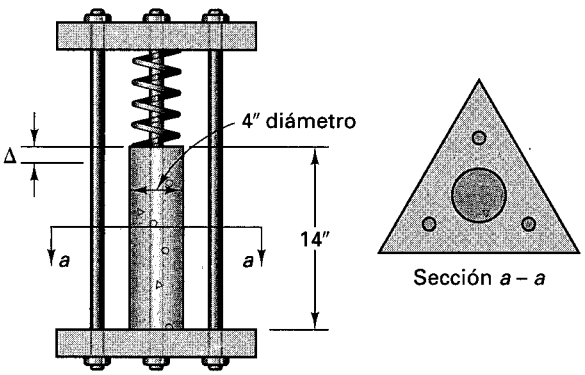


Fig. P4-35

Sección 4-7

4-36. Resuelva el problema 3-27 usando la ecuación 4-19.

4-37. Resuelva el problema 3-26 usando la ecuación 4-19.

4-38. Resuelva el problema 4-13 usando la ecuación 4-19 y las condiciones de continuidad o las funciones de singularidad.

5

Ley de Hooke generalizada; recipientes a presión

5-1. Introducción

Además de la deformación unitaria normal vista en el capítulo anterior en conexión con barras cargadas axialmente, en general, un cuerpo puede también estar sometido a deformaciones unitarias cortantes. Para los propósitos del análisis de la deformación, tales deformaciones unitarias deben relacionarse con los esfuerzos cortantes aplicados. Este tema se verá en la Parte A de este capítulo. En la Parte B se dan definiciones matemáticas generales para los esfuerzos y las deformaciones unitarias cortantes. Posteriormente, empleando el método de superposición se sintetiza la ley de Hooke, que relaciona los esfuerzos y las deformaciones unitarias para un estado tridimensional de esfuerzo. En la Parte C se consideran los recipientes a presión de pared delgada así como los cascarones de revolución. La ley generalizada de Hooke se emplea para el análisis de deformación de esos importantes elementos de construcción. En la Parte D se desarrolla una solución para los cilindros de pared gruesa. Esto ilustra una solución de un problema típico de valor en la frontera en la teoría matemática de la elasticidad y, al mismo tiempo, proporciona límites a la aplicabilidad de las ecuaciones establecidas para los recipientes a presión de pared delgada usando la mecánica de sólidos.

Parte A RELACIONES CONSTITUTIVAS PARA CORTANTE

5-2. Relaciones esfuerzo-deformación unitaria para cortante

Además de las deformaciones unitarias normales relacionadas con las deformaciones unitarias axiales en barras estudiadas en los capítulos 3 y 4, un cuerpo puede estar sometido a esfuerzos cortantes que generan deformaciones cortantes. Un ejemplo se muestra en la figura 5-1. El cambio en el ángulo recto inicial entre dos planos cualquiera imaginarios de un cuerpo define la *deformación unitaria cortante* γ. Para elementos infinitesimales, esos pequeños ángulos se miden en *radianes*. Los subíndices de γ mostrados en la figura 5-1, asocian una deformación unitaria particular con un par de ejes coordenados. La transformación de una deformación unitaria cortante a cualquier otro conjunto mutuamente perpendicular de planos será analizada en la Sección 11-13.

Para los fines del análisis de la deformación, es esencial establecer una relación entre la deformación unitaria cortante y el esfuerzo cortante con base en experimentos. Como quedará claro en el próximo capítulo, tales experimentos conviene llevarlos a cabo sobre tubos circulares de pared delgada sometidos a torsión. Los elementos de tales tubos están esencialmente en un estado de esfuerzo cortante puro. Ilustraciones de las condiciones que imperan en la pared de un tubo se muestran en la figura 5-2. Las deformaciones unitarias cortantes correspondientes pueden determinarse de las medidas geométricas apropiadas.

Note que de acuerdo con la Sección 1-4, los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares son iguales; véase la figura 5-2(a). Además, como en este análisis, los esfuerzos y las deformaciones unitarias están limitados al caso en un plano, los subíndices de ambos pueden omitirse; véase la figura 5-2(b). Efectuando los experimentos con tubos de pa-

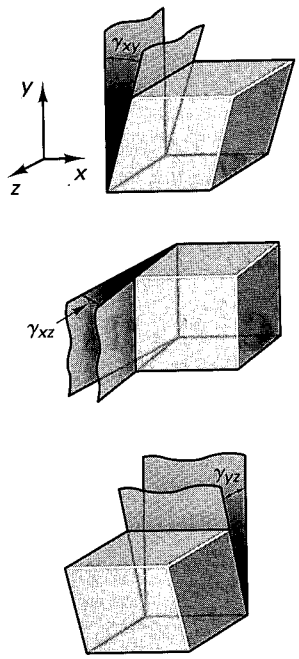


Fig. 5-1 Posibles deformaciones cortantes de un elemento.

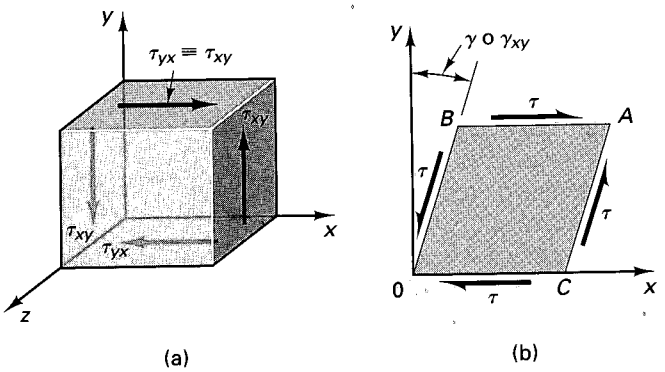


Fig. 5-2 Elemento en cortante puro.

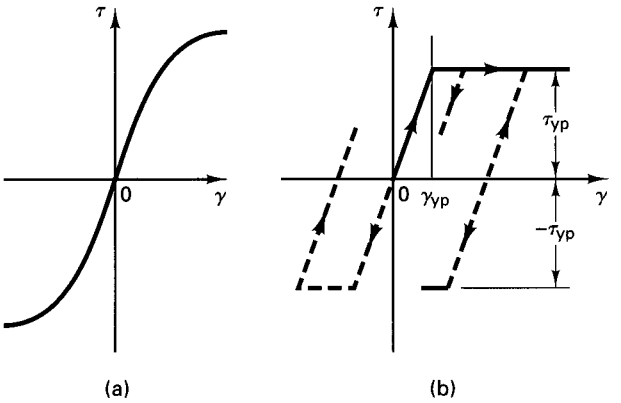


Fig. 5-3 Diagramas esfuerzo-deformación unitaria cortantes; (a) típico y (b) idealizado para un material dúctil.

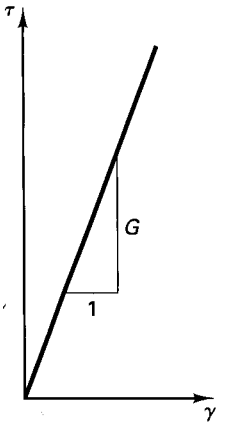


Fig. 5-4 Relación lineal o hookeana entre esfuerzo cortante puro y deformación unitaria.

red delgada, los diagramas generados de esfuerzo-deformación unitaria cortantes, excepto por la escala, se parecen mucho a los encontrados para probetas a tensión (Véanse las figuras 2-5, 2-9 y 2-12).

Dos diagramas $\tau-\gamma$ se muestran en la figura 5-3. En el diagrama idealizado de comportamiento elástico perfectamente plástico, figura 5-3(b), τ_{yp} y γ_{yp} designan, respectivamente, el esfuerzo cortante de fluencia y la deformación unitaria cortante de fluencia.

En numerosos problemas técnicos, los esfuerzos cortantes no exceden la resistencia de fluencia del material. Para la mayoría de los materiales en este rango de esfuerzos, igual que para las barras cargadas axialmente, puede postularse una relación *lineal* entre el esfuerzo cortante puro y el ángulo γ que se genera. Por lo tanto, matemáticamente, la extensión de la ley de Hooke para esfuerzos y deformaciones unitarias cortantes tiene la forma

$$\tau = G\gamma \tag{5-1}$$

donde G es una constante de proporcionalidad llamada *módulo cortante de elasticidad* o *módulo de rigidez*. Igual que E, G es una constante para un material dado. La relación dada por la ecuación 5-1 se muestra en la figura 5-4.

Ejemplo 5-1

Una de las monturas de cortante para una pequeña pieza de equipo vibratorio mecánico tiene las dimensiones mostradas en la figura 5-5. El cojinete de hule[1] de Grado 50 de 8 mm de espesor tiene una $G = 0.64$ N/mm^2. Determine la constante de resorte cortante k_s para esta montura. Desprecie la rigidez de las placas metálicas exteriores a las que el hule está adherido.

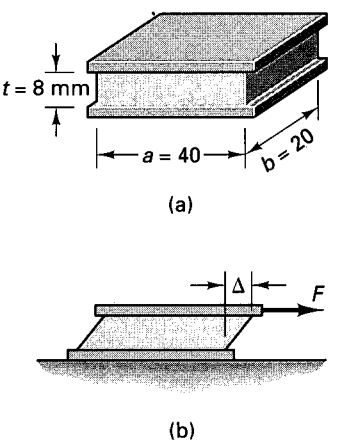


Fig. 5-5

[1]P. B. Lindley, *Engineering Design with Natural Rubber*, Hertford, England: Malaysian Rubber Producers' Research Association, 1978.

SOLUCIÓN

Aquí $\gamma \approx \dfrac{\Delta}{t}$; por consiguiente, de la ecuación 5-1,

$$\tau = G\gamma = \frac{G\,\Delta}{t}$$

Además,

$$F = \tau ab = \frac{G\,\Delta ab}{t}$$

Por lo tanto,

$$k_s = \frac{F}{\Delta} = \frac{Gab}{t} = \frac{0.64 \times 20 \times 40}{8} = 64\ \text{N/mm}$$

Esta solución no toma en cuenta los pequeños efectos locales en los extremos ya que no actúan esfuerzos cortantes en las dos fronteras.

5-3. Energía de deformación unitaria elástica para esfuerzos cortantes

Una expresión para la energía elástica de deformación unitaria para un elemento infinitesimal en cortante puro puede establecerse de manera análoga a la obtenida para el esfuerzo uniaxial. Considere entonces un elemento en un estado de cortante, como se muestra en la figura 5-6(a). La forma deformada de este elemento se muestra en la figura 5-6(b), donde se

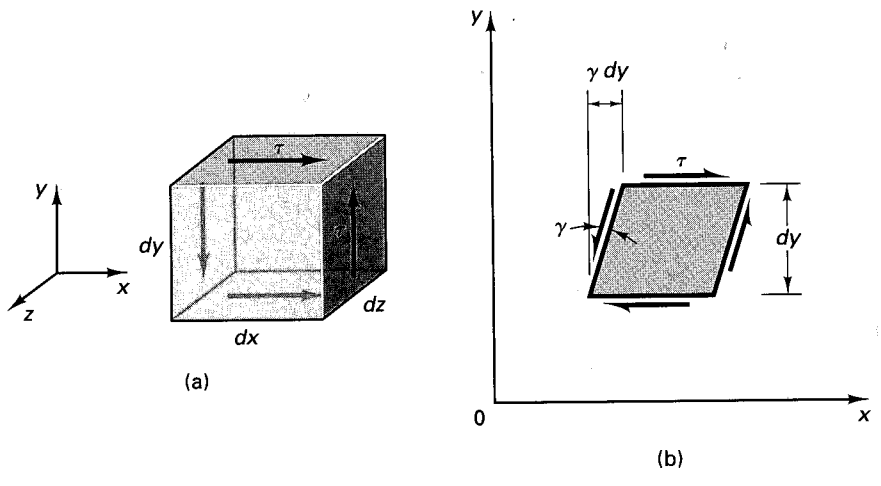


Fig. 5-6 Un elemento para obtener la energía de deformación unitaria debido a esfuerzos cortantes puros.

supone que el plano inferior del elemento está fijo en su posición.[2] Cuando este elemento se deforma, la fuerza en el plano superior alcanza un valor final de $\tau\, dx\, dz$. El desplazamiento total de esta fuerza para una pequeña deformación del elemento es $\gamma\, dy$; véase la figura 5-6(b). Por lo tanto, como el trabajo externo hecho sobre el elemento es igual a la energía elástica de deformación unitaria recuperable interna,

$$dU_{\text{cortante}} = \underbrace{\frac{1}{2}\tau\, dx\, dz}_{\text{fuerza promedio}} \times \underbrace{\gamma\, dy}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{2}\tau\gamma\, dV \tag{5-2}$$

donde dV es el volumen del elemento infinitesimal.

Reescribiendo la ecuación 5-2, la densidad de la energía de deformación unitaria por cortante es

$$(U_o)_{\text{cortante}} = \left(\frac{dU}{dV}\right)_{\text{cortante}} = \frac{\tau\gamma}{2} \tag{5-3}$$

Usando la ley de Hooke para esfuerzos cortantes, $\tau = G\gamma$, la ecuación 5-3 puede expresarse como

$$(U_o)_{\text{cortante}} = \left(\frac{dU}{dV}\right)_{\text{cortante}} = \frac{\tau^2}{2G} \tag{5-4}$$

o

$$U_{\text{cortante}} = \int_{\text{vol}} \frac{\tau^2}{2G}\, dV \tag{5-5}$$

Note la similitud de las ecuaciones 5-2 a la 5-5 con las ecuaciones 3-12 a la 3-15 para elementos en un estado de esfuerzo uniaxial.

Aplicaciones de esas ecuaciones se dan en los capítulos 6, 14 y 18.

Parte B CONCEPTOS GENERALIZADOS DE LA DEFORMACIÓN UNITARIA Y LEY DE HOOKE

5-4. Definición matemática de la deformación unitaria[3]

Como las deformaciones unitarias varían generalmente de punto a punto, la definición de la deformación unitaria debe referirse a un elemento infinitesimal. Teniendo esto en cuenta, considere una deformación unitaria extensional ocurriendo en una dirección, como se muestra en la figura 5-7(a). Algunos puntos como el A y el B se mueven a A' y B', respectivamente.

[2]Esta hipótesis no hace a la expresión menos general.

[3]Esta sección y la siguiente pueden omitirse sin pérdida de continuidad en el texto.

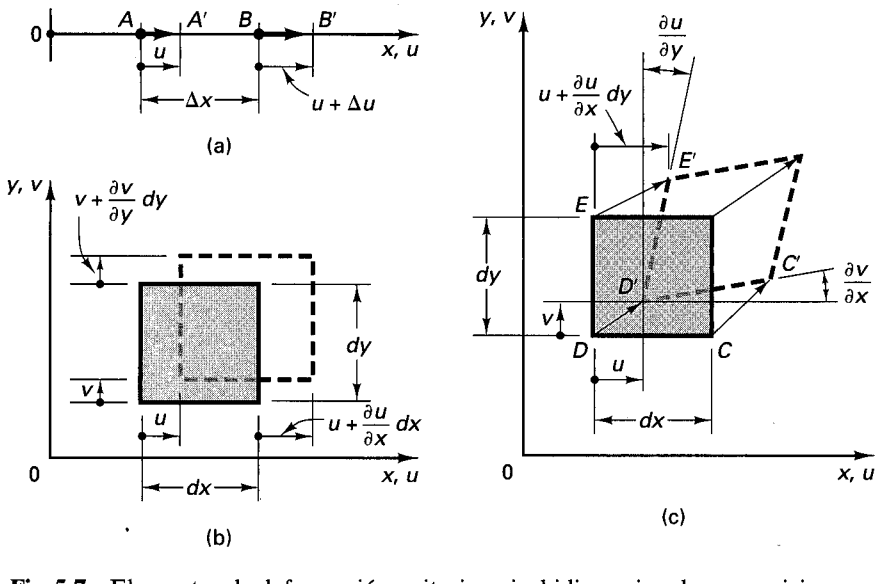


Fig. 5-7 Elementos de deformación unitaria uni y bidimensionales en posiciones inicial y final.

Durante la deformación, el punto A experimenta un desplazamiento u. El desplazamiento del punto B es $u + \Delta u$, ya que además del desplazamiento de cuerpo rígido u, común a todo el elemento Δx, un alargamiento Δu tiene lugar dentro del elemento. Con base en esto, la definición de la deformación unitaria normal extensional es[4]

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \tag{5-6}$$

Si un cuerpo se deforma en direcciones ortogonales, como se muestra para un caso bidimensional en la figura 5-7(b), deben adscribirse subíndices a ϵ para diferenciar entre las direcciones de las deformaciones unitarias. Por la misma razón, es también necesario cambiar las derivadas ordinarias a parciales. Por tanto, si en un punto de un cuerpo, u, v y w son las tres componentes de desplazamiento que ocurren, respectivamente en las direcciones x, y y z de los ejes coordenados, las definiciones básicas de la *deformación unitaria normal* son

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{5-7}$$

[4]Una definición más precisa de la deformación unitaria extensional, más afín a los conceptos generales de *alargamiento* o *estiramiento*, puede expresarse, usando la figura 5-7(c), como

$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{D'C' - DC}{DC} \tag{5-6a}$$

donde los desplazamientos vectoriales de los puntos C y D son $\mathbf{u}_C = CC'$ y $\mathbf{u}_D = DD'$. Para las pequeñas deformaciones consideradas aquí, la ecuación 5-6a se reduce a la ecuación 5-6. Véase también las Secciones 11-11 y 11-12.

Note que subíndices dobles análogos a los usados para esfuerzos, pueden usarse para las deformaciones unitarias. Así entonces,

$$\varepsilon_x \equiv \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_y \equiv \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_z \equiv \varepsilon_{zz} \tag{5-8}$$

donde uno de los subíndices designa la dirección del elemento de línea y el otro la dirección del desplazamiento. Signos positivos se asignan a los alargamientos.

Además de deformaciones unitarias normales, un elemento puede también experimentar una deformación unitaria cortante, como se muestra en el plano x-y en la figura 5-7(c). Ésta inclina los lados del elemento deformado en relación con los ejes x y y. Como v es el desplazamiento en la dirección y, cuando uno se mueve en la dirección x, $\partial v/\partial x$ es la pendiente del lado inicialmente horizontal de un elemento infinitesimal. Similarmente, el lado vertical se inclina un ángulo $\partial u/\partial y$. De acuerdo con esto, el ángulo inicialmente recto CDE se reduce mediante la cantidad $\partial v/\partial x + \partial u/\partial y$. Por lo tanto, para cambios pequeños de ángulos, la definición de la *deformación unitaria cortante* asociada con las coordenadas xy es

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{5-9}$$

Para obtener esta expresión, se supone que las tangentes de ángulos pequeños son iguales a los mismos ángulos expresados en radianes. Un signo positivo para la deformación unitaria cortante se aplica cuando el elemento se deforma como se muestra en la figura 5-7(c). (Esta deformación corresponde a las direcciones positivas de los esfuerzos cortantes; véase la figura 1-4.)

Las definiciones para las deformaciones unitarias cortantes para los planos xz y yz son similares a la definición dada en la ecuación 5-9:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \tag{5-10}$$

En las ecuaciones 5-9 y 5-10, los subíndices en γ pueden permutarse. Esto es permitido ya que no puede hacerse una distinción entre las dos secuencias de cada subíndice alternativo.

Al examinar las ecuaciones 5-7, 5-9 y 5-10, note que esas seis ecuaciones de deformación unitaria-desplazamiento dependen sólo de tres componentes de desplazamiento u, v y w. Por lo tanto, esas ecuaciones no pueden ser independientes. Pueden desarrollarse tres ecuaciones independientes que muestren las interrelaciones entre ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, γ_{xy}, γ_{yz} y γ_{zx}. El número de tales ecuaciones se reduce a uno para el caso bidimensional. La deducción y aplicación de esas ecuaciones, conocidas como *ecuaciones de compatibilidad*, se dan en textos sobre teoría de la elasticidad.

5-5. Tensor deformación unitaria

Las deformaciones unitarias normal y cortante definidas en la sección precedente, expresan juntas el tensor deformación unitaria, que es análogo al tensor esfuerzo ya visto antes. Sin embargo, es necesario modificar las relaciones para las deformaciones unitarias cortantes para tener un tensor, una entidad que debe obedecer ciertas leyes de transformación.[5] Así entonces, la físicamente atractiva definición de la deformación unitaria cortante como el cambio en el ángulo γ, no es aceptable cuando la deformación unitaria cortante es una componente de un tensor. Heurísticamente, esto puede atribuirse a lo siguiente. En la figura 5-8(a), una γ_{xy} positiva se mide desde la dirección vertical. La misma γ_{xy} positiva se mide desde la dirección horizontal en la figura 5-8(b). En la figura 5-8(c), la misma cantidad de deformación cortante se muestra como consistiendo en dos $\gamma_{xy}/2$. Los elementos deformados en las figuras 5-8(a) y (b) pueden obtenerse girando el elemento en la figura 5-8(c) como cuerpo rígido un ángulo $\gamma_{xy}/2$. El esquema mostrado en la figura 5-8(c) es el correcto para definir la componente deformación unitaria cortante como elemento de un tensor. Como en esta definición el elemento no es girado como cuerpo rígido, se dice que la deformación unitaria es *pura* o *irrotacional*. Siguiendo este enfoque, se redefinen las deformaciones unitarias cortantes como

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{yx}}{2}$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\gamma_{yz}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \qquad (5\text{-}11)$$

$$\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{\gamma_{zx}}{2} = \frac{\gamma_{xz}}{2}$$

A partir de estas ecuaciones, el tensor deformación unitaria en representación matricial puede ensamblarse como

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}12)$$

El tensor deformación unitaria es simétrico. Matemáticamente, la notación usada en la última expresión es particularmente atractiva y tiene amplia aceptación en la mecánica del medio continuo (elasticidad, plasticidad, reología, etc.). Igual que para el tensor esfuerzo, usando una notación con índices, puede escribirse ε_{ij} para el tensor deformación unitaria.

[5]Un análisis riguroso de este asunto está más allá del alcance de este texto. Sin embargo, una mejor apreciación se tendrá después de estudiar el capítulo 11, donde se considera la transformación de la deformación unitaria para un caso bidimensional.

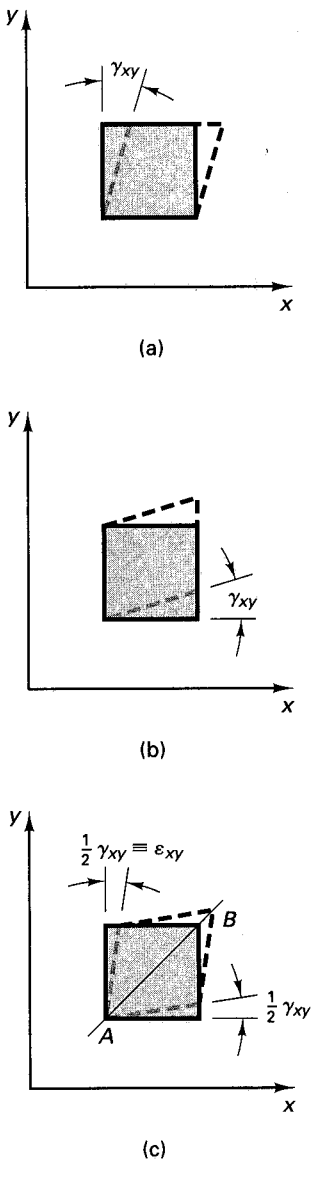


Fig. 5-8 Deformaciones cortantes.

Análogamente al tensor esfuerzo, el tensor deformación unitaria puede ser diagonalizado, apareciendo en él sólo ε_1, ε_2 y ε_3. Para un problema bidimensional, $\epsilon_3 = 0$ y se tiene en este caso la *deformación unitaria plana*. El tensor para esta situación es

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}13)$$

La transformación de deformación unitaria sugerida por la ecuación 5-13 será considerada en el capítulo 11.

Las similitudes y diferencias entre deformación unitaria en un plano y esfuerzo en un plano definido en la Sección 1-4, serán analizadas en la siguiente sección después de introducir la ley de Hooke generalizada.

El lector debe notar que al analizar el concepto de deformación unitaria, las propiedades mecánicas del material no fueron implicadas. Las ecuaciones son aplicables cualquiera que sea el comportamiento mecánico del material. Sin embargo, sólo deformaciones unitarias pequeñas son definidas por las presentes ecuaciones. Además, las deformaciones unitarias dan sólo el desplazamiento relativo de puntos; los desplazamientos de cuerpo rígido no afectan a las deformaciones unitarias.

5-6. Ley de Hooke generalizada para materiales isotrópicos

En esta sección, seis relaciones básicas entre un estado general de esfuerzos y deformaciones unitarias son sintetizadas usando el principio de superposición de las ecuaciones más simples de esfuerzo-deformación unitaria previamente establecidas. Este conjunto de ecuaciones se conoce como *ley de Hooke generalizada*. Estas ecuaciones son aplicables sólo a *materiales isotrópicos* homogéneos (es decir, materiales que tienen las mismas propiedades en toda dirección). La ley de Hooke se vuelve más compleja para materiales anisotrópicos. Por ejemplo, la madera tiene propiedades diferentes en las direcciones longitudinal, radial y transversal (es decir, en las tres direcciones ortogonales). Tales materiales, llamados *ortotrópicos*, tienen nueve constantes del material independientes, mientras que, como se verá en la sección siguiente, los materiales isotrópicos tienen sólo dos. Para materiales cristalinos totalmente *anisotrópicos,* el número de constantes de material independientes puede ser de 21.[6] En este libro, el análisis se limita básicamente a materiales isotrópicos, aunque seleccionando apropiadamente las direcciones de los ejes, los procedimientos desarrollados pueden aplicarse a problemas ortotrópicos. Ejemplos de éstos son la madera y los

[6]A. P. Boresi y O. M. Sidebottom, *Advanced Mechanics of Materials,* 4a. ed. Nueva York: Wiley, 1985; I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, Nueva York: McGraw-Hill, 1956; L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1969.

materiales sintéticos, como las láminas corrugadas o los plásticos reforzados con fibras.

De acuerdo con el concepto básico de la ley de Hooke, existe una relación lineal entre el esfuerzo aplicado y la deformación unitaria resultante, como se muestra en la figura 5-9. Durante este proceso tiene lugar una contracción o una expansión lateral de un cuerpo, dependiendo de si el cuerpo es estirado o comprimido. La magnitud de la deformación lateral es formulada analíticamente usando la razón de Poisson (véase la Sección 2-6). Ilustraciones cualitativas de las deformaciones causadas por los esfuerzos aplicados a lo largo de los ejes coordenados se muestran en la figura 5-10.

Considere primero que el elemento mostrado en la figura 5-10(a) está sometido sólo a un esfuerzo de tensión σ_x, como se muestra en la figura 5-10(b). Para este caso, de $\sigma = E\epsilon$, o sea la ecuación 2-8, se tiene $\varepsilon_x' = \sigma_x/E$, donde ε_x' es la deformación unitaria en la dirección x. Las correspondientes deformaciones unitarias laterales ε_y' y ε_z' a lo largo de los ejes y y z, respectivamente, se obtienen usando la razón de Poisson o ecuación 2-9 y son $\varepsilon_y' = \varepsilon_x' = -\nu\sigma_x/E$. Expresiones similares para las deformaciones unitarias ε_x'', ε_y'', y ε_z'' son aplicables cuando el elemento está sometido a esfuerzo como se muestra en la figura 5-10(c) y para las deformaciones unitarias ε_x''', ε_y''', y ε_z''', cuando el elemento está sometido a esfuerzos como se muestra en la figura 5-10(d). Al *superponer* esas deformaciones unitarias se obtienen expresiones completas para las deformaciones unitarias ε_x, ε_y y ε_z.

Como las deformaciones unitarias cortantes para los ejes cartesianos pueden tratarse como se ilustró en la figura 5-1, es necesaria, sólo para el problema general, la introducción de subíndices apropiados en la ecuación 5-1.

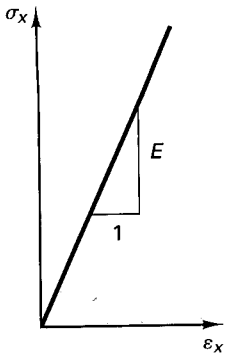


Fig. 5-9 Relación lineal entre esfuerzo uniaxial y deformación unitaria extensional.

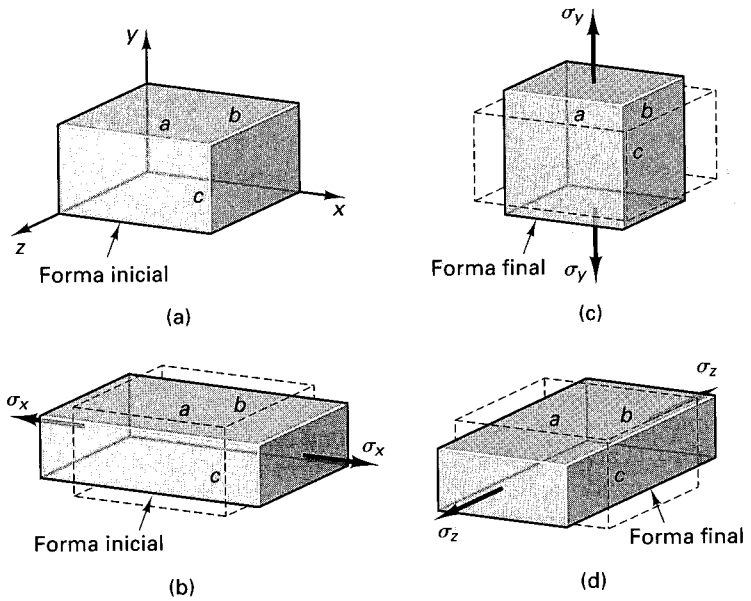


Fig. 5-10 Deformaciones de un elemento causadas por esfuerzos normales actuando en las direcciones de los ejes coordenados.

Con base en lo anterior, pueden escribirse seis ecuaciones para la ley de Hooke generalizada para *materiales isotrópicos linealmente elásticos* para usarse con coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{3} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \tag{5-14}$$

Resolviendo esas ecuaciones simultáneamente para el esfuerzo, se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu\varepsilon_y & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \mu\varepsilon_z & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \tag{5-15}$$

donde λ y μ son los parámetros de Lamé,[7] que están relacionados con el módulo de Young E y la razón de Poisson ν, como sigue:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{y} \quad \mu = \frac{E}{(1+\nu)}$$

Si los esfuerzos normales son de compresión, los signos de los términos correspondientes cambian en la ecuación 5-14 para las deformaciones unitarias normales. El sentido positivo de las deformaciones unitarias cortantes correspondientes a la dirección positiva de los esfuerzos cortantes (figura 1-3) se muestra en las figuras 5-1 y 5-2. En la siguiente sección se mostrará que en las ecuaciones 5-14 y 5-15, las tres constantes elásticas E, ν y G no son independientes entre sí y que para materiales *isotrópicos*, hay sólo dos constantes.

Si un cuerpo hecho de un material isotrópico linealmente elástico está sometido a un cambio de temperatura ΔT junto con los esfuerzos, las expresiones para las deformaciones unitarias normales en la ecuación 5-14 deben modificarse agregando a cada una la expresión de la deformación unitaria térmica dada por la ecuación 2-10. Entonces, la deformación unitaria total en tal cuerpo debido a los esfuerzos y al cambio de temperatura son

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_y &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} + \alpha\,\Delta T \\ \varepsilon_z &= -\nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} + \alpha\,\Delta T \end{aligned} \tag{5-16}$$

[7]Llamados así en honor del gran científico francés M. G. Lamé (1795-1870).

donde α es el coeficiente de expansión térmica lineal visto en la Sección 2-7. Ningún cambio tiene lugar en las deformaciones unitarias cortantes debido a un cambio de temperatura en materiales isotrópicos ya que tales materiales tienen las mismas propiedades en todas direcciones.

Debe entenderse claramente que la ecuación 5-14 da deformaciones unitarias (es decir, *deformaciones por unidad de longitud*). Si la deformación unitaria es constante a lo largo de la longitud de un miembro, para determinar la deformación de tal miembro, la deformación unitaria debe multiplicarse por la longitud del mismo. Por ejemplo, la deformación normal Δ_x en la dirección x está dada por

$$\Delta_x = \varepsilon_x L_x \tag{5-17}$$

donde L_x es la longitud del miembro en la dirección x. Relaciones similares se aplican para Δ_y y Δ_z. Se usa un proceso de integración cuando las deformaciones unitarias varían a lo largo de la longitud.

De las ecuaciones de la ley de Hooke generalizada pueden hacerse algunos comentarios útiles para aclarar la distinción entre problemas de *esfuerzo en un plano* y problemas de *deformación unitaria en un plano.* Un examen de la ecuación 1-3 para el problema de esfuerzo plano muestra que σ_x y σ_y pueden existir. Si cualquiera de esos dos o ambos esfuerzos están presentes, de acuerdo con la tercera ecuación 5-14, se desarrollará una deformación unitaria normal. Por el contrario, en el problema de deformación unitaria en un plano, definido por la ecuación 5-13, la deformación unitaria ϵ_z debe ser cero. Por lo tanto, si σ_x y/o σ_y están presentes, puede concluirse de la tercera ecuación 5-14 que σ_z no tiene que ser cero. La similitud y diferencia entre los dos tipos de problemas puede aclararse también usando la siguiente tabla, donde los esfuerzos y las deformaciones unitarias se muestran en forma matricial.

Esfuerzo en un plano	*Deformación unitaria en un plano*
$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma/2 & 0 \\ \gamma/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$

Ejemplo 5-2

Un cubo de acero de 50 mm de lado está sometido a una presión uniforme de 200 MPa actuando sobre todas las caras. Determine el cambio en dimensión entre dos caras paralelas del cubo. Sea E =200 GPa y $\nu = 0.25$.

SOLUCIÓN

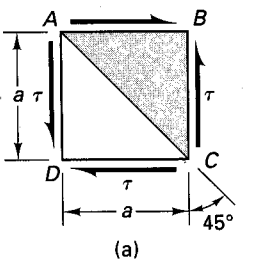
Usando la primera expresión en la ecuación 5-14 y la ecuación 5-17, y notando que la presión es un esfuerzo de compresión,

$$\varepsilon_x = \frac{(-200)}{200 \times 10^3} - \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(-200)}{200 \times 10^3} - \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(-200)}{200 \times 10^3}$$

$$= -5 \times 10^{-4}\ \text{mm/mm}$$

$$\Delta_x = \varepsilon_x L_x = -5 \times 10^{-4} \times 50 = -0.025\ \text{mm (contracción)}$$

En este caso $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$.

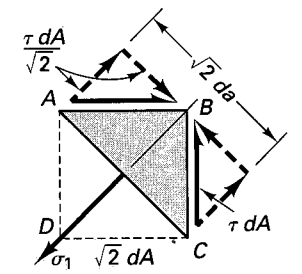


(a)

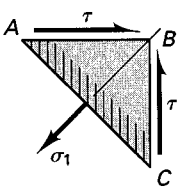
5-7. Relaciones entre E, G, y ν

Para demostrar la relación entre E, G y ν, debe mostrarse primero que un estado de cortante puro, como el mostrado en la figura 5-11(a), puede *transformarse* en un *sistema equivalente de esfuerzos normales*. Esto puede mostrarse de la siguiente manera.

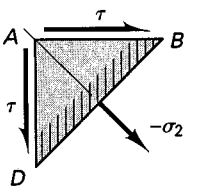
Dividimos el elemento cuadrado $ABCD$ por la diagonal AC y aislamos un elemento triangular, como se muestra en la figura 5-11(b). Si este elemento tiene un espesor dz, entonces cada área asociada con los lados AB o BC es dA y la asociada con la diagonal AC es $\sqrt{2}\,dA$. Como el esfuerzo cortante que actúa sobre las áreas dA es τ, las **fuerzas** que actúan sobre esas áreas son τdA. Las componentes de esas fuerzas que actúan *hacia* la diagonal BD están en equilibrio. Por otra parte, las *componentes* paralelas a la diagonal BD desarrollan una resultante $\tau\sqrt{2}\,dA$ actuando normalmente hacia AC. Esta **fuerza** es equilibrada por los esfuerzos normales σ_1 que actúan sobre el área $\sqrt{2}\,dA$.asociada con la diagonal AC. Esto da lugar a una **fuerza** $\sigma_1\sqrt{2}\,dA$ mostrada en la figura. Como el esfuerzo cortante resultante y esta fuerza deben ser iguales, se infiere que $\sigma_1 = \tau$. Esos *esfuerzos* se muestran en la figura 5-11(c) y **no pueden** ser tratados como fuerzas.



(b) Diagrama de fuerzas



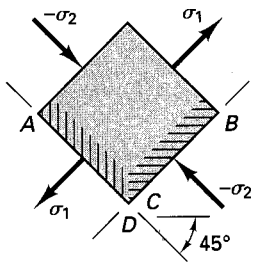
(c)



(d)

Aislando un elemento con lado BD, como se muestra en la figura 3-11(d) y procediendo igual que antes, concluimos que $\sigma_2 = -\tau$. Los resultados de los dos análisis se muestran en la figura 5-11(e). Esta representación del esfuerzo es completamente *equivalente* a la mostrada en la figura 5-11(a). Por lo tanto, *un esfuerzo cortante puro en un punto puede ser representado alternativamente por los esfuerzos normales a 45° con las direcciones de los esfuerzos cortantes*, como se muestra en la figura 5-11(e), y numéricamente son

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau \qquad (5\text{-}18)$$



(e)

Fig. 5-11 Transformación de un esfuerzo cortante puro en esfuerzos normales equivalentes.

Esta importante transformación del esfuerzo permite establecer la relación entre E, G y ν. Con este fin, consideremos el elemento deformado mostrado en la figura 5-12 y determinemos la deformación unitaria en la diagonal DB de dos maneras distintas. Primero determinamos la deformación unitaria a partir de los esfuerzos cortantes y luego a partir de los esfuerzos normales equivalentes.

Considerando sólo deformaciones infinitesimales y haciendo sen $\gamma \approx \tan\gamma \approx \gamma$ y $\cos\gamma \approx 1$, se infiere que el desplazamiento BB' debido al cortante es $a\gamma$. La proyección de este desplazamiento sobre la diagonal DB', que, con el orden de aproximación adoptado, es igual al alargamiento de DB, es $a\gamma/\sqrt{2}$.

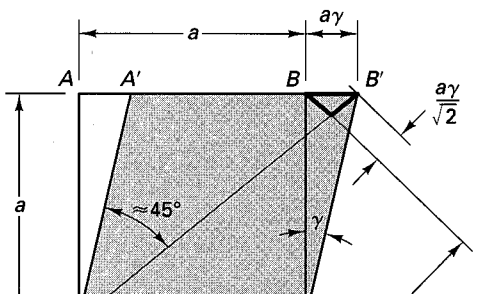


Fig. 5-12 Cinemática de la deformación de un elemento para establecer una relación entre deformaciones unitarias cortantes y extensionales.

Por lo tanto, como la longitud de DB es $\sqrt{2}a$, su deformación unitaria normal $\varepsilon_{45°}$ es $\gamma/2$. Por tanto, recordando que $\tau = G\gamma$ (Ec. 5-1), se tiene

$$\varepsilon_{45°} = \frac{\tau}{2G} \tag{5-19}$$

Sin embargo, los esfuerzos cortantes que causan la deformación mostrada en la figura 5-12 son equivalentes a los esfuerzos normales representados en la figura 5-11(e). Por lo tanto, si el eje x está dirigido a lo largo de la diagonal DB, la primera ecuación 5-14 puede aplicarse haciendo $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = -\sigma_2$ y $\sigma_z = 0$. De esta manera se encuentra una expresión alternativa para la deformación unitaria normal en la diagonal DB.

$$\varepsilon_{45°} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E}(1 + \nu) \tag{5-20}$$

Igualando las dos relaciones alternativas para la deformación unitaria a lo largo de la diagonal cortante y simplificando,

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1 + \nu)}} \tag{5-21}$$

Ésta es la relación básica entre E, G y ν; ella muestra que esas cantidades no son independientes una de otra. Si dos cualesquiera de ellas son determinadas experimentalmente, la tercera puede calcularse. Nótese que el módulo cortante G es siempre menor que el módulo elástico E ya que la

razón de Poisson ν es una cantidad positiva. Para la mayor parte de los materiales, ν tiene un valor cercano a 0.25.

5-8. Dilatación y módulo volumétrico

Ampliando algunos de los conceptos ya establecidos, podemos obtener una ecuación para los cambios volumétricos en materiales elásticos sometidos a esfuerzos. En el proceso de hacer esto se introducen y definen dos nuevos términos.

Los lados dx, dy y dz de un elemento infinitesimal después de deformarlo se convierten en $(1 + \varepsilon_x)dx$, $(1 + \varepsilon_y)dy$ y $(1 + \varepsilon_z)dz$, respectivamente. Después de restar el volumen inicial al volumen del elemento deformado, queda determinado el cambio en volumen. Es decir,

$$(1 + \varepsilon_x)\,dx\,(1 + \varepsilon_y)\,dy\,(1 + \varepsilon_z)\,dz - dx\,dy\,dz \approx (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\,dx\,dy\,dz$$

donde los productos de deformaciones unitarias $\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z$ son despreciados por pequeños. Por lo tanto, en la teoría de las deformaciones infinitesimales (pequeñas), el cambio en volumen por unidad de volumen e, llamado a veces *dilatación*, se define como

$$\boxed{e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z} \qquad (5\text{-}22)$$

Las deformaciones unitarias cortantes no ocasionan cambio en el volumen.

Con base en la ley de Hooke generalizada, la dilatación puede encontrarse en términos de esfuerzos y de las constantes del material. Con este fin, las tres primeras ecuaciones 5-14 deben sumarse. Esto da

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (5\text{-}23)$$

lo que significa que la dilatación es proporcional a la suma algebraica de todos los esfuerzos normales.

Si un cuerpo elástico está sometido a presión hidrostática de intensidad uniforme p, de modo que $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$, entonces de la ecuación 5-23,

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p \qquad \text{o} \qquad \boxed{\frac{-p}{e} = k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}} \qquad (5\text{-}24)$$

La cantidad k representa la razón del esfuerzo hidrostático de compresión al decremento en volumen y se llama *módulo de compresión* o *módulo volumétrico*.

Parte C RECIPIENTES A PRESIÓN DE PARED DELGADA

5-9. Recipientes a presión cilíndricos y esféricos

En esta sección estudiaremos dos tipos de recipientes a presión de pared delgada: cilíndricos y esféricos. Ambos tipos son ampliamente usados en la industria; por tanto, este tema es de gran importancia práctica. Para analizar las deformaciones elásticas en tales recipientes se requiere aplicar la ley de Hooke generalizada.

Las paredes de un recipiente a presión de pared delgada ideal actúan como una membrana (es decir, las paredes resisten flexión). Una esfera es una forma ideal para un recipiente a presión cerrado si el contenido es de peso insignificante; un recipiente cilíndrico es también bueno con la excepción de las uniones en los extremos, tema que se verá con más detalle en la siguiente sección.

El análisis de los recipientes a presión comenzará considerando un recipiente cilíndrico como el caso de la caldera mostrada en la figura 5-13(a). Un segmento se aísla de este recipiente pasando dos planos perpendiculares al eje del cilindro y un plano adicional longitudinal *por* el mismo eje,

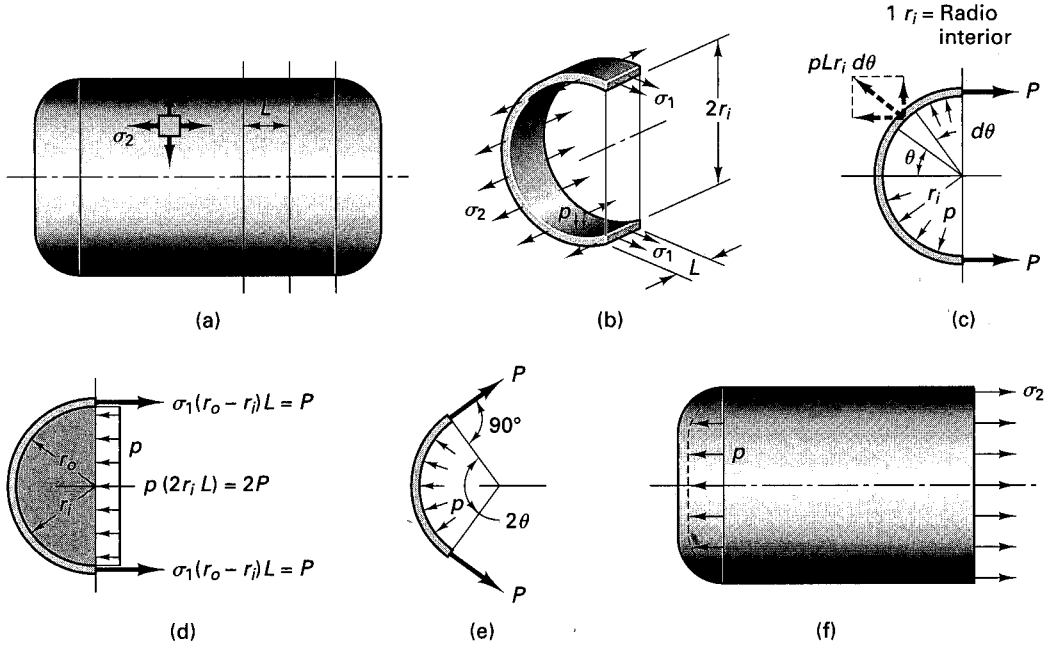


Fig. 5-13 Diagramas para el análisis de recipientes a presión cilíndricos de pared delgada.

como se muestra en la figura 5-13(b). Las condiciones de simetría excluyen la presencia de cualquier esfuerzo cortante en los planos de las secciones, ya que los esfuerzos cortantes causarían una distorsión incompatible del cilindro. A lo largo de las secciones del cuerpo libre cilíndrico sólo puede haber esfuerzos normales. Los dos que ocurren son los *esfuerzos circunferenciales* o *esfuerzos de aro* σ_h y los *esfuerzos longitudinales* σ_l, identificados en la figura 5-13(b) como $\sigma_1 = \sigma_h$ y $\sigma_2 = \sigma_l$. Estos esfuerzos multiplicados por sus respectivas áreas mantienen al elemento cilíndrico en equilibrio con la presión interna. Con base en esto, haciendo referencia a la figura 5-13(d), la presión interna p multiplicada por el área proyectada $2r_iL$, donde r_i es el radio interior, genera la fuerza que actúa sobre el elemento cilíndrico. Esta fuerza es equilibrada por las dos fuerzas P desarrolladas por los esfuerzos de aro $\sigma_h = \sigma_1$ multiplicados por sus respectivas áreas $L(r_o - r_i)$. En esta relación, r_o es el radio exterior del cilindro. Igualando las fuerzas opuestas, figura 5-13(d), para garantizar el equilibrio de las fuerzas horizontales, se tiene

$$p(2r_iL) = 2\sigma_l(r_o - r_i)L \tag{5-25}$$

y como $(r_o - r_i) = t$, (espesor del cilindro), la expresión básica para determinar el *esfuerzo circunferencial o de aro* en un cilindro es

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{pr_i}{t}} \tag{5-26}$$

Esta ecuación es válida sólo para cilindros de pared delgada, ya que da el esfuerzo *promedio* en el aro. Sin embargo, como se muestra en el ejemplo 5-6, el espesor de pared puede alcanzar un décimo del radio interno y el error al aplicar la ecuación 5-25 será aún pequeño. Como esta ecuación se usa principalmente para recipientes de *pared delgada*, donde $r_i \approx r_o$, el subíndice para el radio usualmente se omite.

La ecuación 5-25 puede también deducirse pasando dos secciones longitudinales, como se muestra en la figura 5-13(e). Debido a la supuesta acción de membrana, las fuerzas P en el aro deben considerarse actuando tangencialmente al cilindro. Las componentes horizontales de las fuerzas P mantienen la componente horizontal de la presión interna en un estado de equilibrio estático.

El otro esfuerzo normal σ_2 que actúa en un recipiente cilíndrico a presión actúa *longitudinalmente,* figura 5-13(b), y se determina resolviendo un simple problema de fuerza axial. Pasando una sección por el recipiente perpendicularmente a su eje, se obtiene un cuerpo libre como se muestra en la figura 5-13(f). La fuerza desarrollada por la presión interna es $p\pi r_i^2$, y la fuerza desarrollada por el esfuerzo longitudinal σ_2 en las paredes es $\sigma_2(\pi r_o^2 - \pi r_i^2)$. Igualando esas dos fuerzas y despejando σ_2, resulta

$$p\pi r_i^2 = \sigma_2(\pi r_P^2 - \pi r_i^2)$$

$$\sigma_2 = \frac{pr_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{pr_i^2}{(r_o + r_i)(r_o - r_i)}$$

Sin embargo, como se señaló antes, $r_o - r_i = t$, (espesor de la pared cilíndrica) y como este análisis está restringido a recipientes de *pared delgada*, $r_o \approx r_i \approx r$; por consiguiente,

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{5-27}$$

Note que para recipientes *cilíndricos de pared delgada*, $\sigma_2 \approx \sigma_1/2$.

Un método análogo de análisis puede usarse para deducir una expresión para recipientes a presión esféricos de *pared delgada*. Pasando una sección por el centro de la esfera de la figura 5-14(a), el hemisferio mostrado en la figura 5-14(b) queda aislado. Usando la misma notación que antes, puede obtenerse una ecuación idéntica a la ecuación 5-27. Sin embargo, para una esfera, *cualquier sección que pasa por el centro de la esfera da el mismo resultado* cualquiera que sea la inclinación del lado del elemento; véase la figura 5-14(c). Por consiguiente, los esfuerzos máximos de membrana para *recipientes esféricos a presión* de pared delgada son

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} \tag{5-28}$$

En la figura 5-14(a), (b) y (c) se indican elementos infinitesimales para los recipientes analizados que muestran los esfuerzos normales σ_1 y σ_2 vistos desde el exterior. De acuerdo con la ecuación 1-10, los esfuerzos cortantes máximos asociados con esos esfuerzos normales son iguales a la mitad de éstos. Los planos sobre los que actúan esos esfuerzos cortantes pueden ser identificados sobre elementos vistos hacia una sección por la pared del recipiente. Tal sección se muestra en la figura 5-15. El esfuerzo σ_2 actúa perpendicularmente al plano de la figura.

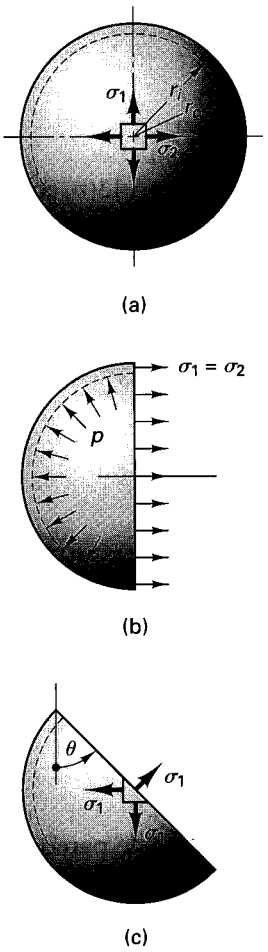


Fig. 5-14 Recipiente a presión esférico de pared delgada.

Ejemplo 5-3

Considere un recipiente a presión cerrado cilíndrico de acero, como el mostrado en la figura 5-13(a). El radio del cilindro es de 1000 mm y el espesor de sus paredes es de 10 mm. (a) Determine los esfuerzos de aro y longitudinal en la pared cilíndrica causados por una presión interna de 0.80 MPa. (b) Calcule el cambio en el diámetro del cilindro causado por la presión. Sea $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$. Suponga que $r_i \approx r_o \approx r$.

SOLUCIÓN

Los esfuerzos se obtienen por aplicación directa de las ecuaciones 5-26 y 5-27:

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{0.8 \times 1}{10 \times 10^{-3}} = 80 \text{ MPa}$$

y

$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{0.8 \times 1}{2 \times 10 \times 10^{-3}} = 40 \text{ MPa}$$

El esfuerzo perpendicular a la pared del cilindro, $\sigma_3 = p = 0.80$ MPa, sobre el interior, disminuye a cero sobre el exterior. Como es pequeño, puede no ser tomado en cuenta. Por consiguiente, al hacer $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ y $\sigma_z = 0$ en la primera expresión de la ecuación 5-14, se obtiene la deformación unitaria de aro ε_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{80}{200 \times 10^3} - \frac{40}{4 \times 200 \times 10^3}$$
$$= 0.35 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

Al someter a presión el cilindro, el radio r se incrementa una cantidad Δ. Para esta condición, la deformación unitaria de aro ε_1 puede encontrarse calculando la diferencia entre las circunferencias del aro deformada y no deformada y dividiendo esta cantidad entre la longitud inicial del aro. Por lo tanto,

$$\varepsilon_1 = \frac{2\pi(r + \Delta) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta}{r} \qquad (5\text{-}29)$$

Reescribiendo esta expresión y sustituyendo el valor numérico de ε_1 encontrado antes, se obtiene

$$\Delta = \varepsilon_1 r = 0.35 \times 10^{-3} \times 10^3 = 0.35 \text{ mm}$$

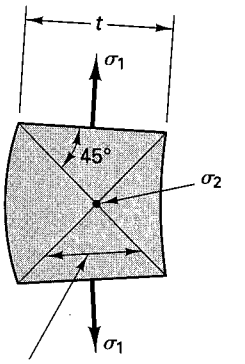


Fig. 5-15 En recipientes a presión de acero en fluencia pueden observarse planos de deslizamiento cortante a 45° sobre probetas grabadas.

Ejemplo 5-4

Considere un recipiente a presión esférico de acero de radio igual a 1000 mm con espesor de pared de 10 mm. (a) Determine los máximos esfuerzos de membrana causados por una presión interna de 0.80 MPa. (b) Calcule el cambio en el diámetro de la esfera causado por la presión. Sea $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$. Suponga que $r_i \approx r_o \approx r$.

SOLUCIÓN

Los esfuerzos máximos normales de membrana se obtienen directamente de la ecuación 5-28.

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{0.80 \times 1}{2 \times 10 \times 10^{-3}} = 40 \text{ MPa}$$

El mismo procedimiento del ejemplo previo puede usarse para encontrar la expansión de la esfera debida a la presión. Por consiguiente, si Δ es el incremento del radio r debido a esta causa, $\Delta = \varepsilon_1 r$, donde ϵ_1 es la deformación unitaria de membrana sobre el gran círculo. De la primera expresión en la ecuación 5-14, se tiene

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{40}{200 \times 10^3} - \frac{40}{4 \times 200 \times 10^3}$$
$$= 0.15 \times 10^{-3} \text{ mm/mm}$$

Por consiguiente,

$$\Delta = \varepsilon_1 r = 0.15 \times 10^{-3} \times 10^3 = 0.15 \text{ mm}$$

Ejemplo 5-5

En un laboratorio industrial, una unidad piloto va a usar un recipiente a presión de las dimensiones mostradas en la figura 5-16. El recipiente operará a una presión interna de 0.7 MPa. Si para esta unidad van a usarse 20 pernos sobre un círculo de pernos de 650 mm de diámetro, ¿cuál es el diámetro requerido para los pernos en la raíz de las roscas? El esfuerzo permisible en tensión para los pernos es de 125 MPa; sin embargo, suponga que en la raíz de las roscas de los pernos el factor de concentración de esfuerzos es de 2.

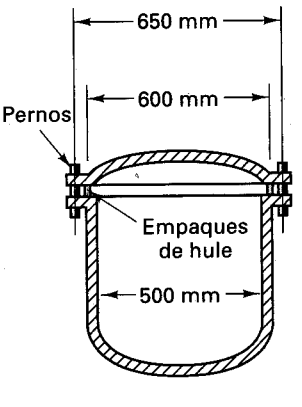


Fig. 5-16

SOLUCIÓN

La fuerza vertical F que actúa sobre la cubierta es causada por la presión interna p de 0.7 MPa actuando sobre el área proyectada horizontalmente dentro del empaque de hule autosellante; es decir

$$F = 0.7 \times 10^6 \times \pi(600/2)^2 = 198 \times 10^9 \text{ N}$$

Suponiendo que esta fuerza está igualmente distribuida entre los 20 pernos, la fuerza P por perno es de $198 \times 10^9/20 = 9.90 \times 10^9$ N. Usando el factor de concentración de esfuerzos dado $K = 2$ y aplicando la ecuación 3-11, el área A de perno requerida en la raíz de las roscas es

$$A = K\frac{P}{\sigma_{\text{perm}}} = \frac{2 \times 9.90 \times 10^9}{125 \times 10^6} = 158 \text{ mm}^2$$

Por lo tanto, el diámetro de perno requerido d en la raíz de las roscas es $d = 2\sqrt{A/\pi} = 14.2$ mm. Note del ejemplo 4-11 que el apriete inicial de los pernos conduce a un relativamente pequeño incremento en el esfuerzo total del perno cuando el recipiente está sometido a presión.

5-10. Observaciones sobre recipientes a presión, de pared delgada

Es instructivo notar que para tamaño y espesor de pared comparables, el esfuerzo normal máximo en un recipiente a presión esférico es sólo aproximadamente la mitad que en un recipiente cilíndrico. La razón de esto puede aclararse con referencia a las figuras 5-17 y 5-18. En un recipiente a presión cilíndrico, los esfuerzos longitudinales σ_2, paralelos al eje del recipiente, no

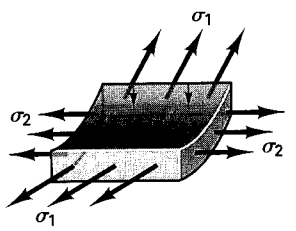


Fig. 5-17 Un elemento de un recipiente cilíndrico a presión de pared delgada.

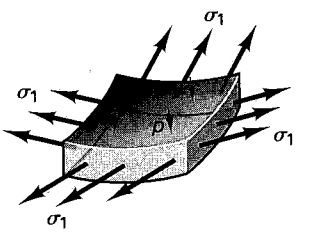


Fig. 5-18 Un elemento de un recipiente esférico a presión de pared delgada.

contribuyen a mantener el equilibrio de la presión interna p que actúa sobre la superficie curva; mientras que en un recipiente esférico, un sistema de esfuerzos iguales resiste la presión interna aplicada. Esos esfuerzos, dados por las ecuaciones 5-26 y 5-28, son tratados como biaxiales, aunque la presión interna p que actúa sobre la pared causa esfuerzos locales de compresión sobre el interior iguales a esta presión. Como ya se señaló en el ejemplo 5-3, tales esfuerzos son pequeños en comparación con los esfuerzos de membrana σ_1 y σ_2 y son por lo general ignorados en los recipientes a presión de pared delgada. Un análisis más completo de este problema se da en la Sección 5-13 y en el ejemplo 5-6. Un problema mucho más importante surge en los cambios geométricos de la forma de un recipiente debido a la acción de la presión. Éstos pueden causar una perturbación en la acción de membrana. Una ilustración de esta condición se da en la figura 5-19 usando los resultados numéricos encontrados en los ejemplos 5-3 y 5-4.

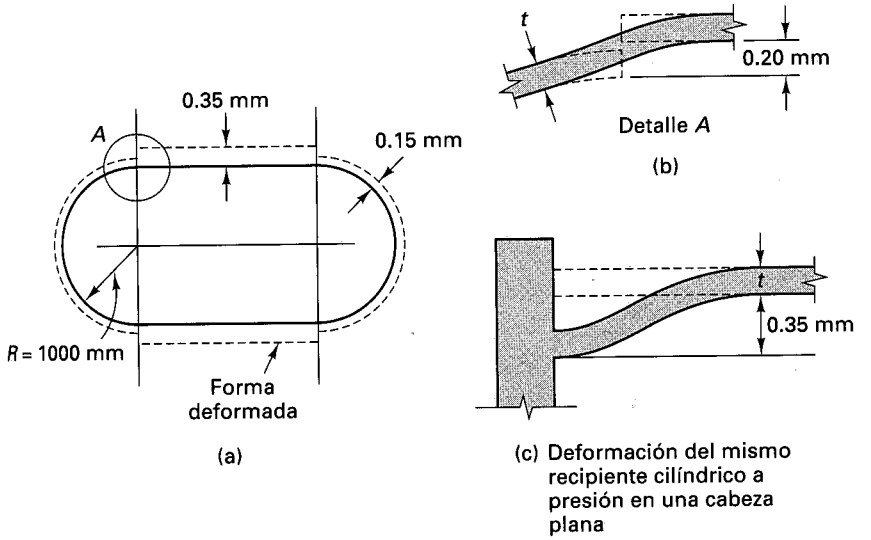


Fig. 5-19 Deformaciones exageradas de recipientes a presión en discontinuidades.

Si un recipiente cilíndrico a presión tiene extremos semiesféricos, como se muestra en la figura 5-19(a), y si inicialmente el cilindro y sus cabezas son independientes entre sí, bajo presión tenderán a dilatarse, como se muestra por las líneas de rayas. En general, el cilindro y los extremos se dilatarán diferentes cantidades y tenderán a crear una discontinuidad en la pared, como se muestra en *A*. Sin embargo, la continuidad física de la pared debe mantenerse por flexión local y esfuerzos cortantes en la vecindad de la junta, como se muestra en la figura 5-19(b). Si en vez de semiesferas de extremo relativamente flexibles se usan placas gruesas, la flexión local y los esfuerzos cortantes se incrementan considerablemente; véase la figura 5-19(c). Por esta razón, los extremos (cabezas) de recipientes a presión deben diseñarse muy cuidadosamente.[8] Los extremos planos no son convenientes.

La mayoría de los recipientes a presión se fabrican a base de láminas curvas unidas entre sí por medio de soldadura. Ejemplos de soldaduras usadas en recipientes a presión se muestran en la figura 5-20, con preferencia dada a los distintos tipos de soldaduras a tope.

En conclusión, debe enfatizarse que las fórmulas obtenidas para recipientes de pared delgada en la sección precedente deben usarse sólo para casos de *presión interna*. Si un recipiente va a diseñarse por presión externa como en el caso de un tanque al vacío o un submarino, pueden ocurrir efectos de *inestabilidad* (pandeo) en las paredes y los cálculos de los esfuerzos basados en las fórmulas previas pueden no tener sentido.

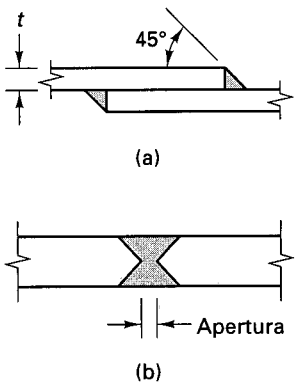


Fig. 5-20 Ejemplos de soldaduras usadas en recipientes a presión. (a) Junta traslapada de doble filete y (b) junta a tope con soldadura de ranura en doble V.

Parte D CILINDROS DE PARED GRUESA

5-11. Introducción

En esta parte se analizan los cilindros de pared gruesa bajo presión interna y externa. Este problema está relacionado con el problema de los recipientes a presión de pared delgada cilíndricos tratado antes. Para resolver el problema propuesto, se usa un método característico de la *teoría matemática de la elasticidad*. Este consiste en garantizar el equilibrio de cada elemento infinitesimal y por medio del uso de relaciones geométricas, permitir sólo sus deformaciones compatibles (posibles). Las condiciones de equilibrio están relacionadas con esas deformaciones por medio de la ley de Hooke generalizada. Luego, la ecuación diferencial gobernante establecida con base en lo anterior, se resuelve *sujeta a las*

[8]El Unfired Pressure Vessel Code (Código de recipientes a presión no expuestos al fuego), de la American Society of Mechanical Engineers (ASME-Sociedad Estadounidense de Ingenieros Mecánicos), da información práctica sobre el diseño de los extremos; la teoría necesaria está más allá del alcance de este texto. A pesar de esta limitación, las fórmulas elementales para cilindros de pared delgada desarrolladas aquí son apropiadas en la mayoría de los casos.

condiciones de frontera prescritas. Este enfoque difiere del usado en la mecánica de sólidos donde la indeterminación estática interna se resuelve por medio de una suposición cinemática plausible en cada caso particular. Ocasionalmente, en la mecánica de sólidos resulta necesario recurrir a las soluciones obtenidas usando los métodos de la teoría matemática de la elasticidad. Esto ya se hizo, por ejemplo, al tratar las concentraciones de esfuerzos en discontinuidades de barras cargadas axialmente. Las soluciones de problemas bi y tridimensionales usando el enfoque del elemento finito son en muchos aspectos similares a los métodos de la teoría matemática de la elasticidad. En ambos casos se buscan soluciones a *problemas de valor en la frontera*.

Matemáticamente, el problema de los cilindros de pared gruesa es bastante simple, pero exhibe claramente el método característico usado en la teoría de la elasticidad. Aquí, la solución se amplía al incluir el comportamiento inelástico de los cilindros de pared gruesa. Se examinan tanto el estado elastoplástico como el plástico.

La solución del problema de los cilindros de pared gruesa bajo presión interna proporciona límites a la aplicabilidad de las ecuaciones desarrolladas antes para los cilindros de pared delgada. Esta solución es también útil para el diseño de moldes de extrusión y de otros equipos mecánicos.

5-12. Solución del problema general

Considere un cilindro largo con extremos axialmente restringidos cuya sección transversal tiene las dimensiones mostradas en la figura 5-21(a).[9] El radio interno de este cilindro es r_i; el radio externo es r_o. Sean p_i la presión interna en el cilindro y p_o la presión externa. Se buscan los esfuerzos en la pared del cilindro causados por esas presiones.

Este problema puede resolverse convenientemente usando coordenadas cilíndricas. Como el cilindro es largo, todo anillo de espesor unitario perpendicular al plano del papel está sometido al mismo estado de esfuerzo. Un elemento infinitesimal típico de espesor unitario está definido por dos radios, r y $r + dr$ y un ángulo $d\phi$, como se muestra en la figura 5-21(b).

Si el esfuerzo normal radial que actúa sobre el elemento infinitesimal a una distancia r del centro del cilindro es σ_r, este esfuerzo variable a una distancia $r + dr$ será $\sigma_r + (d\sigma_r/dr)\, dr$. Ambos esfuerzos normales *tangenciales* que actúan sobre las otras dos caras del elemento son σ_r. Esos esfuerzos, análogos a los esfuerzos de aro en un cilindro delgado, son iguales. Además, ya que por la condición de simetría todo elemento a la misma distancia radial desde el centro debe estar sometido al mismo estado de esfuerzo, *ningún esfuerzo cortante actúa sobre el elemento mostrado.* Además, los esfuerzos axiales σ_x sobre las dos caras del elemento son iguales, opuestos y normales al plano del papel.

[9]Este problema fue resuelto originalmente por Lamé, ingeniero francés, en 1833, y a veces se le llama el problema de Lamé.

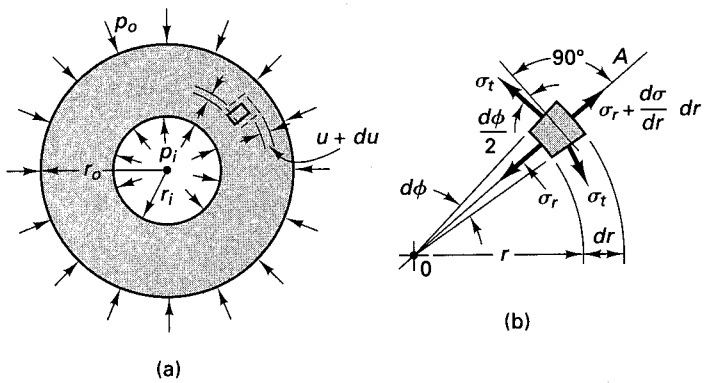


Fig. 5-21 Cilindro de pared gruesa.

Ya formulada la naturaleza de los esfuerzos que actúan sobre un elemento infinitesimal, una solución característica de la teoría de la elasticidad procede a lo largo del siguiente patrón de razonamientos.

Equilibrio estático El elemento escogido debe estar en equilibrio estático. Para expresar esto matemáticamente se requiere de una evaluación de las *fuerzas* que actúan sobre el elemento. Esas fuerzas se obtienen multiplicando esfuerzos por sus áreas respectivas. El área sobre la cual actúa σ_r es $1 \times r\,d\phi$; sobre la que actúa $\sigma_r + d\sigma_r$ es $1 \times (r + dr)\,d\phi$ y cada área sobre la cual actúa σ_t es $1 \times dr$. El peso del elemento mismo no se toma en cuenta. Como el ángulo incluido entre los lados del elemento es $d\phi$, ambos esfuerzos tangenciales están inclinados $\frac{1}{2}\,d\phi$ respecto a la línea perpendicular a OA. Entonces, sumando las fuerzas a lo largo de una línea radial, $\sum F_r = 0$,

$$\sigma_r r\,d\phi + 2\sigma_t\,dr\left(\frac{d\phi}{2}\right) - \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr}\,dr\right)(r + dr)\,d\phi = 0$$

Simplificando y sin tomar en cuenta los infinitesimales de orden superior,

$$\sigma_t - \sigma_r - r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \qquad (5\text{-}30)$$

Esta ecuación tiene dos esfuerzos desconocidos, σ_t y σ_r. Se requieren pasos intermedios para expresar esta ecuación en términos de una incógnita de modo que pueda ser resuelta. Esto se hace introduciendo la geometría de las deformaciones y las propiedades de los materiales en el problema.

Compatibilidad geométrica La deformación de un elemento es descrita por sus deformaciones unitarias en las direcciones radial y tangencial. Si u representa el *desplazamiento radial* o *movimiento* de una superficie cilíndrica de radio r, figura 5-21(a), $u + (du/dr)\,dr$ es el desplazamiento ra-

dial o movimiento de la superficie adyacente de radio $r + dr$. Por consiguiente, la deformación unitaria ε_r de un elemento en la dirección radial es

$$\varepsilon_r = \frac{\left(u + \frac{du}{dr}dr\right) - u}{dr} = \frac{du}{dr} \tag{5-31}$$

La deformación unitaria ϵ_t en la dirección tangencial se obtiene restando de la longitud de la circunferencia de la superficie cilíndrica deformada de radio $r + u$ la circunferencia del cilindro no deformado de radio r y dividiendo la diferencia entre esta última longitud. Por lo tanto,

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \tag{5-32}$$

Note que las ecuaciones 5-31 y 5-32 dan deformaciones unitarias expresadas en términos de *una* variable desconocida u.

Propiedades de los materiales La ley de Hooke generalizada que relaciona las deformaciones unitarias con los esfuerzos, está dada por la ecuación 5-14 y puede reescribirse aquí en la forma[10]

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t - \nu\sigma_x) \tag{5-33}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r + \sigma_t - \nu\sigma_x) \tag{5-34}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r - \nu\sigma_t + \sigma_x) \tag{5-35}$$

Sin embargo, en el caso del cilindro de pared gruesa con deformación axialmente restringida, el problema es uno de *deformación unitaria en un plano* (es decir, $\epsilon_x = 0$). La última ecuación conduce entonces a una relación para el esfuerzo axial dada por

$$\sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_t) \tag{5-36}$$

Introduciendo este resultado en las ecuaciones 5-33 y 5-34 y resolviéndolas simultáneamente se obtienen expresiones para los esfuerzos σ_r y σ_t en términos de deformaciones unitarias:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}[(1 - \nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t] \tag{5-37}$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}[\nu\varepsilon_r + (1 - \nu)\varepsilon_t] \tag{5-38}$$

Esas ecuaciones traen la condición de deformación unitaria en un plano en el problema para material elástico.

[10]Como un elemento cilíndrico infinitesimal incluye un ángulo *infinitesimal* entre dos de sus lados, puede ser tratado como si fuera un elemento en un sistema coordenado cartesiano.

Formulación de la ecuación diferencial Ahora, la ecuación de equilibrio 5-30 puede expresarse en términos de una variable u. Se eliminan entonces las deformaciones unitarias ϵ_r y ϵ_t de las ecuaciones 5-37 y 5-38 expresándolas en términos del desplazamiento u, tal como están dadas por las ecuaciones 5-31 y 5-32; los esfuerzos radial y tangencial son entonces

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right]$$

y (5-39)

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{du}{dr} + (1-\nu)\frac{u}{r}\right]$$

y sustituyendo esos valores en la ecuación 5-30 y simplificando, se obtiene la ecuación diferencial gobernante deseada:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0} \tag{5-40}$$

Solución de la ecuación diferencial Como puede verificarse por sustitución, la solución general de la ecuación 5-30 que da el desplazamiento radial u de cualquier punto sobre el cilindro, es

$$\boxed{u = A_1 r + A_2/r} \tag{5-41}$$

donde las constantes A_1 y A_2 deben determinarse a partir de las condiciones en las *fronteras* del cuerpo.

Desafortunadamente, para la determinación de las constantes A_1 y A_2, no se conoce el desplazamiento u ni en la frontera interna ni en la frontera externa de la pared del cilindro. Sin embargo, las presiones conocidas son iguales a los esfuerzos radiales que actúan sobre los elementos en los radios respectivos. Por consiguiente,

$$\sigma_r(r_i) = -p_i \quad \text{y} \quad \sigma_r(r_o) = -p_o \tag{5-42}$$

donde los signos menos se usan para indicar esfuerzos de compresión. Además, como u tal como está dada por la ecuación 5-41 y $du/dr = A_1 - A_2/r^2$ pueden sustituirse en la expresión para σ_r dada por la ecuación 5-39, las condiciones de frontera dadas por las ecuaciones 5-39 toman la forma

$$\sigma_r(r_i) = -p_i = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[A_1 - (1-2\nu)\frac{A_2}{r_i^2}\right]$$
$$\sigma_r(r_o) = -p_o = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[A_1 - (1-2\nu)\frac{A_2}{r_o^2}\right] \tag{5-43}$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones, se obtienen para A_1 y A_2 las expresiones

$$A_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$
$$A_2 = \frac{1+\nu}{E}\frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \qquad (5\text{-}44)$$

Estas constantes, cuando se usan en la ecuación 5-41, permiten la determinación del desplazamiento radial de cualquier punto sobre el cilindro elástico sometido a presiones específicas. Así entonces, los desplazamientos de las fronteras interior y exterior del cilindro pueden calcularse.

Si la ecuación 5-41 y su derivada, junto con las constantes dadas por las ecuaciones 5-44, se sustituyen en las ecuaciones 5-39, y los resultados se simplifican, se obtienen ecuaciones generales para los esfuerzos radial y tangencial en cualquier punto de un cilindro elástico. Estas son

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad \text{y} \quad \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \qquad (5\text{-}45)$$

donde

$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad \text{y} \quad C_2 = \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Note que $\sigma_r + \sigma_t$ es constante sobre toda el área transversal del cilindro. Esto significa que el esfuerzo axial σ_x dado por la ecuación 5-36 es también constante sobre toda el área transversal del cilindro de pared gruesa.

Observaciones sobre el problema del disco delgado Las relaciones esfuerzo-deformación unitaria usadas para un cilindro de pared gruesa corresponden a una condición de *deformación unitaria en un plano*. Si, por otra parte, se considera un disco anular delgado, la condición de *esfuerzo en un plano* [es decir, $\sigma_x = 0$ y $\varepsilon_x = -\nu(\sigma_x + \sigma_y)/E$] es la que gobierna. (Véase el análisis al final de la sección 5-6.) Para este caso, las ecuaciones 5-33 y 5-34 para el esfuerzo-deformación unitaria se reducen a

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t) \quad \text{y} \quad \varepsilon_t = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r + \sigma_t) \qquad (5\text{-}46)$$

y, resolviendo estas ecuaciones simultáneamente, se obtiene

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) \quad \text{y} \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) \qquad (5\text{-}47)$$

Estas son las relaciones esfuerzo-deformación unitaria que deben usarse en la solución. Sin embargo, la ecuación diferencial resultante sigue siendo la misma que la ecuación 5-40 y los esfuerzos radial y tangencial son también idénticos a los del cilindro de pared gruesa y están dados por ecuación 5-45. La única diferencia es que debe usarse una constante A_1 diferente en

la ecuación 5-41 para determinar el desplazamiento radial u. La constante A_2 es la misma que la de la ecuación 5-44, mientras que A_1 es

$$A_1 = \frac{1-\nu}{E}\,\frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \tag{5-48}$$

5-13. Casos especiales

Sólo presión interna (es decir, $p_i \neq 0$ y $p_o = 0$), figura 5-22. Para este caso, las ecuaciones 5-45 se simplifican a

$$\sigma_r = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$
$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_o^2}{r^2}\right) \tag{5-49}$$

Como $r_o^2/r^2 \geq 1$, σ_r es siempre un esfuerzo de compresión y es máximo en $r = r_i$. Similarmente, σ_t es siempre un esfuerzo de tensión y su máximo ocurre también en $r = r_i$.

Para materiales frágiles, la segunda ecuación 5-49 generalmente gobierna el diseño. Sin embargo, para materiales dúctiles, como el acero dulce, es más apropiado adoptar el criterio de la iniciación de la fluencia debido al cortante que la capacidad del material para resistir esfuerzos normales. Esta consideración no aparece en los cilindros de pared delgada. En estos problemas, el esfuerzo radial máximo, igual a p_i, es despreciable en comparación con σ_1. Por tanto, de acuerdo con la ecuación 1-10, la relación entre los esfuerzos máximos normal y cortante es simple y directa, esto es, $\tau_{máx} = \sigma_2$, y tanto la fluencia normal como la cortante pueden usarse como criterio. Sin embargo, en cilindros de pared gruesa, el esfuerzo radial σ_r puede ser del mismo orden de magnitud que σ_t. Para este caso, el esfuerzo cortante máximo debe encontrarse superponiendo los efectos de ambos esfuerzos normales[11] grandes en la manera mostrada en la figura 5-23. Esos dos esfuerzos alcanzan sus valores máximos en la superficie interna del cilindro. El esfuerzo cortante máximo encontrado de esta manera debe compararse con el esfuerzo cortante máximo que un material puede resistir. Este valor puede tomarse igual a $\sigma_{yp}/2$, donde σ_{yp} es el esfuerzo de fluencia normal en tensión uniaxial. Con base en esto,

$$\tau_{máx} = \frac{(\sigma_t)_{máx} - (\sigma_r)_{máx}}{2} = \frac{p_i r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{\sigma_{yp}}{2} \tag{5-50}$$

y

$$p_i = p_{yp} = \frac{\sigma_{yp}(r_o^2 - r_i^2)}{2r_o^2} \tag{5-51}$$

[11]El esfuerzo axial σ_z dado por la ecuación 5-36 no entra en el problema ya que para $0 < \nu \leq 0.5$, este esfuerzo tiene un valor intermedio entre σ_t y σ_r.

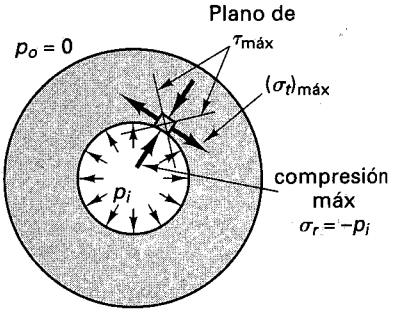


Fig. 5-22 Un elemento en el que ocurre $\tau_{máx}$.

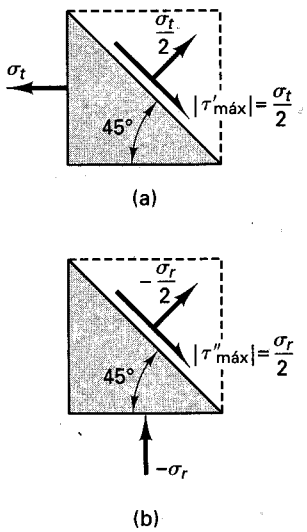


Fig. 5-23 Transformaciones de esfuerzos para obtener esfuerzos cortantes máximos.

Sólo presión externa (es decir, $p_i = 0$ y $p_o \neq 0$). Para este caso, las ecuaciones 5-45 se simplifican a

$$\sigma_r = -\frac{p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 - \frac{r_i^2}{r^2}\right)$$
$$\sigma_t = -\frac{p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}\left(1 + \frac{r_i^2}{r^2}\right) \qquad (5\text{-}52)$$

Como $r_i^2/r^2 \leq 1$, ambos esfuerzos son siempre de compresión. El esfuerzo máximo de compresión es σ_t y ocurre en $r = r_i$.

Las ecuaciones 5-52 no deben usarse para cilindros de pared muy delgada. El pandeo de las paredes puede presentarse y las fórmulas de resistencia dan entonces resultados engañosos.

Ejemplo 5-6

Compare la distribución del esfuerzo tangencial causado por la presión interna p_i tal como es dada por la fórmula de Lamé, en la Sección 5-12, con la distribución dada por la fórmula apropiada para cilindros de pared delgada de la Sección 5-9 si (a) $r_o = 1.1r_i$ y (b) $r_o = 4r_i$; véase la figura 5-24.

SOLUCIÓN

(a) Usando la ecuación 5-49b para σ_t,

$$(\sigma_t)_{r=r_i} = (\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{p_i r_i^2}{(1.1r_i)^2 - r_i^2}\left[1 + \frac{(1.1r_i)^2}{r_i^2}\right] = 10.5p_i$$

$$(\sigma_t)_{r=r_o} = (\sigma_t)_{\text{mín}} = \frac{p_i r_i^2}{(1.1r_i)^2 - r_i^2}\left[1 + \left(\frac{1.1r_i}{1.1r_i}\right)^2\right] = 9.5p_i$$

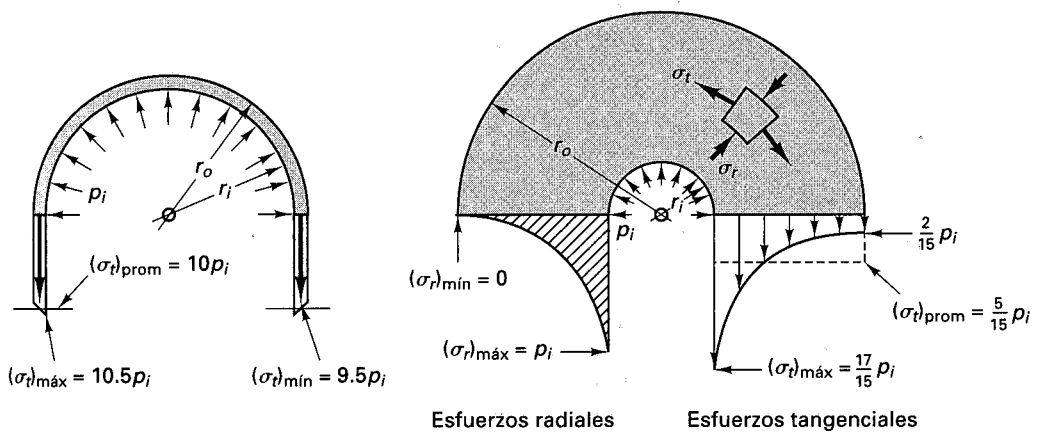


Fig. 5-24

mientras que, como el espesor de la pared es $t = 0.1r_i$, el esfuerzo *promedio* de aro dado por la ecuación 5-26 es

$$(\sigma_t)_{\text{prom}} = \frac{p_i r_i}{t} = \frac{p_i r_i}{0.1 r_i} = 10 p_i$$

Esos resultados se muestran en la figura 5-24(a). Note particularmente que al usar la ecuación 5-26, no se incurre en un error apreciable.

(b) Usando la ecuación 5-49b para σ_t se obtienen como antes los esfuerzos tangenciales; éstos son

$$(\sigma_t)_{r=r_i} = (\sigma_t)_{\text{máx}} = \frac{p_i r_i^2}{(4r_i)^2 - r_i^2}\left[1 + \frac{(4r_i)^2}{r_i^2}\right] = \frac{17}{15} p_i$$

$$(\sigma_t)_{r=ro} = (\sigma_t)_{\text{mín}} = \frac{p_i r_i^2}{(4r_i)^2 - r_i^2}\left[1 + \left(\frac{4r_i}{4r_i}\right)^2\right] = \frac{2}{15} p_i$$

El esfuerzo tangencial está graficado en la figura 5-24(b). Una sorprendente variación del esfuerzo tangencial puede observarse en esta figura. El esfuerzo tangencial promedio dado por la ecuación 5-26, usando $t = 3r_i$, es

$$(\sigma_t)_{\text{prom}} = \frac{p_i r_i}{t} = \frac{5}{15} p_i = \frac{1}{3} p_i$$

El esfuerzo está lejos del esfuerzo máximo verdadero.

Los esfuerzos radiales se calcularon también usando la ecuación 5-49a para σ_r y los resultados se muestran por el área sombreada en la figura 5-24(b).

Es interesante notar que sin importar qué tan grande se haga el espesor de un cilindro para resistir la presión interna, el esfuerzo tangencial máximo no será menor que p_i. En la práctica se requieren técnicas especiales para reducir el esfuerzo máximo. Por ejemplo, en la fabricación de cañones, en vez de usar un solo cilindro, se inserta otro cilindro en el más pequeño que genera *esfuerzos de compresión* iniciales en el cilindro interno y esfuerzos de tensión en el externo. En operación, el esfuerzo de compresión en el cilindro interno es liberado primero y sólo entonces comienza este cilindro a actuar en tensión. Con ello se obtiene un mayor rango de presiones de operación.

5-14. Comportamiento de cilindros de pared gruesa idealmente plásticos

El caso de un cilindro de pared gruesa sometido sólo a presión interna fue considerado en la sección previa y se obtuvo la ecuación 5-50 para el comienzo de la fluencia en la superficie interna del cilindro debido al cortante máximo. Con el incremento subsecuente de la presión interna, la fluencia avanza hacia la superficie exterior y prevalece en el cilindro un estado elasto-plástico con un radio límite c más allá del cual la sección transversal permanece elástica. Al aumentar la presión, el radio c también crece

hasta que, eventualmente, la sección transversal entera se vuelve totalmente plástica bajo la última carga.

En el siguiente análisis, igual que antes, se supondrá que el criterio de cortante máximo para un material idealmente plástico es

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_{\text{yp}}}{2} \tag{5-53}$$

Como se observó anteriormente, esto implica que σ_x tiene un valor intermedio entre σ_t y σ_r. Una reexaminación de las ecuaciones 5-36 y 5-49 muestra que esto es cierto en el rango elástico siempre que $0 < \nu < 0.5$, pero en el rango plástico esto se aplica sólo si la razón del radio exterior al interior, r_o/r_i, es menor que un cierto valor.[12] Para $\nu = 0.3$, puede establecerse que esta razón es de 5.75; por consiguiente, las soluciones que se obtengan en esta sección serán sólo válidas cuando $r_o < 5.75r_i$ (con $\nu = 0.3$). La tarea de encontrar la distribución del esfuerzo es más complicada cuando esta condición no se satisface y está más allá del alcance de este libro.

Comportamiento plástico de cilindros de pared gruesa Las ecuaciones de equilibrio estático son aplicables independientemente de que se considere el estado elástico o el plástico. Por consiguiente, la ecuación 5-30 es aplicable pero debe ser suplementada por una condición de fluencia.

Equilibrio estático, ecuación 5-30:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0$$

Condición de fluencia, ecuación 5-53:

$$\frac{\sigma_r - \sigma_r}{2} = \frac{\sigma_{\text{yp}}}{2}$$

Combinando estas dos ecuaciones, la ecuación diferencial básica toma la forma

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_{\text{yp}}}{r} = 0 \quad \text{o} \quad d\sigma_r = \frac{\sigma_{\text{yp}}}{r}\,dr \tag{5-54}$$

La solución de esta ecuación puede escribirse como

$$\sigma_r = \sigma_{\text{yp}} \ln r + C \tag{5-55}$$

Para un cilindro de radio interno a y radio externo b, la condición de frontera (presión externa nula) puede expresarse como

$$\sigma_r(b) = 0 = \sigma_{\text{yp}} \ln b + C \tag{5-56}$$

Por consiguiente, la constante C de integración está dada por

$$C = -\sigma_{\text{yp}} \ln b$$

[12]Véase W. T. Koiter, "On Partially Plastic Thick-Walled Tubes", *Biezeno Anniversary Volumen on Applied Mechanics,* Haarlem, Holland: H. Stam, 1953, págs. 233-251.

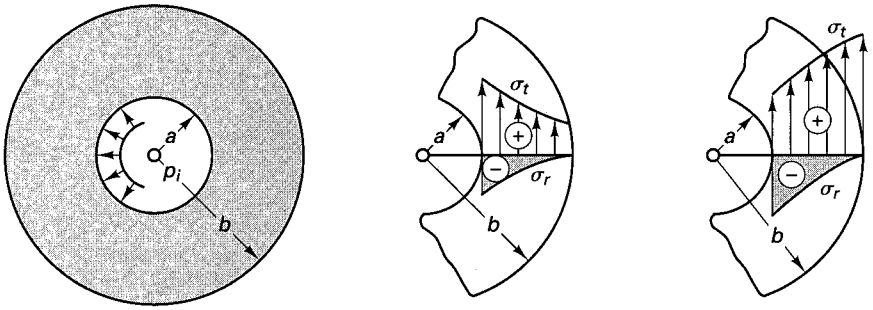


Fig. 5-25

Los esfuerzos radial y tangencial se obtienen usando las ecuaciones 5-55 y 5-53, respectivamente. Se tiene entonces

$$\sigma_r = \sigma_{yp}(\ln r - \ln b) = \sigma_{yp} \ln r/b \tag{5-57}$$

$$\sigma_t = \sigma_{yp} + \sigma_r = \sigma_{yp}(1 + \ln r/b) \tag{5-58}$$

Las distribuciones de esfuerzos dadas por las ecuaciones 5-57 y 5-58 se muestran en la figura 5-25(c), mientras que la figura 5-25(b) muestra las distribuciones del esfuerzo elástico. Como el estado completamente plástico representa el colapso último del cilindro de pared gruesa, la presión interna última, usando la ecuación 5-57, está dada por

$$p_{\text{últ}} = \sigma_r(a) = \sigma_{yp} \ln a/b \tag{5-59}$$

Comportamiento elasto-plástico de cilindros de pared gruesa

Para cualquier valor de p_i intermedio entre los valores de fluencia y último dados por las ecuaciones 5-51 y 5-59, respectivamente (es decir, $p_{yp} < p_i < p_{\text{últ}}$), la sección transversal del cilindro entre el radio interno a y un radio intermedio c es totalmente plástica, mientras que entre c y el radio exterior b, está en la región elástica, figura 5-26. En la interfaz elasto-plástica, la condición de fluencia se satisface justamente y el esfuerzo radial correspondiente X puede calcularse usando la ecuación 5-51 con $r_i = c$ y $r_o = b$; por consiguiente,

$$X = \frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} \tag{5-60}$$

Este esfuerzo es la condición de frontera por usarse junto con la ecuación 5-55 para un segmento totalmente plástico con radio interior a y radio exterior c. Por consiguiente,

$$\sigma_r(c) = -X = -\frac{\sigma_{yp}}{2} \frac{b^2 - c^2}{b^2} = \sigma_{yp} \ln c + C \tag{5-61}$$

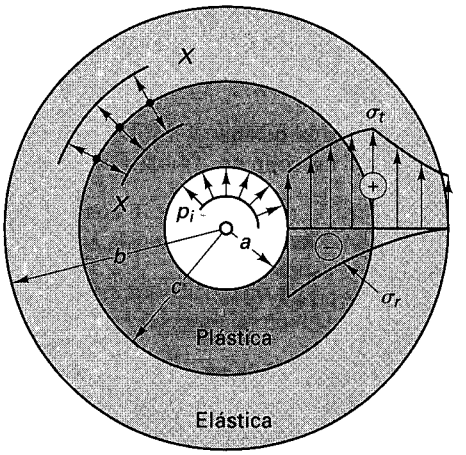


Fig. 5-26

y

$$C = -\frac{\sigma_{yp}}{2}\frac{b^2 - c^2}{b^2} - \sigma_{yp} \ln c \tag{5-62}$$

Sustituyendo este valor de C en la ecuación 5-57, se obtiene el esfuerzo radial en la región plástica:

$$\sigma_r = \sigma_{yp} \ln \frac{r}{c} - \frac{\sigma_{yp}}{2}\frac{b^2 - c^2}{b^2} \tag{5-63}$$

y, usando la ecuación 5-53, el esfuerzo tangencial en la zona plástica es

$$\sigma_t = \sigma_{yp} + \sigma_r = \sigma_{yp}\left(1 + \ln \frac{r}{c}\right) - \frac{\sigma_{yp}}{2}\frac{b^2 - c^2}{b^2} \tag{5-64}$$

La presión interna p_i bajo la cual la zona plástica se extiende de a a c puede obtenerse, usando la ecuación 5-63, simplemente como $p_i = \sigma_r(a)$. Las ecuaciones 5-49, con $r_i = c$ y $r_o = b$, proporcionan las relaciones necesarias para calcular las distribuciones del esfuerzo en la zona elástica.

PROBLEMAS

Sección 5-2

5-1. Rediseñe la montura de cortante en el ejemplo 5-1 para retener la misma constante de resorte cortante k_s, pero cambiando sus dimensiones a un cojinete cuadrado con hule de 10 mm de espesor.

5-2. Determine la constante de resorte k_s para un cojinete de cortante hecho de un elastómero de poliuretano cuadrado de 20 mm de lado y 6 mm de espesor. El cojinete es similar al mostrado en la figura 5-5. Las constantes del material son G = 10 kPa y $\gamma = 0.50$.

Sección 5-3

5-3. Calcule la energía cortante elástica en la resistencia de fluencia por cortante y la resiliencia hiperelástica justo antes de la resistencia última por cortante para el aluminio 2024-T4 y el acero al 0.2% de carbono. Consulte las propiedades físicas de los materiales en la Tabla 1A o 1B del apéndice.

Sección 5-6

5-4. Considere una barra cuadrada de 4 in. por lado de acero sometida a esfuerzos de tensión transversales biaxiales de 20 ksi en la dirección x y de 10 ksi en la dirección y. (a) Suponiendo que la barra está en un estado de esfuerzo en un plano, determine la deformación unitaria en la dirección z y los alargamientos de la barra en las direcciones x y y. (b) Suponiendo que la barra está en un estado de deformación en un plano, determine el esfuerzo en la dirección z y los alargamientos de la barra en las direcciones x y y. Considere $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\nu = 0.25$.

5-5. Un bloque rectangular de cobre como el mostrado en la figura 5-10(a) tiene las siguientes dimensiones: $a = 200$ mm, $b = 120$ mm y $c = 100$ mm. Este bloque está sometido a una carga triaxial en equilibrio con las siguientes magnitudes: $P_x = -4.80$ MPa, $P_y = +2.40$ MPa y $P_z = +2.00$ MPa. Suponiendo que las fuerzas aplicadas están uniformemente distribuidas sobre las caras respectivas, determine los cambios de tamaño que tienen lugar a lo largo de a, b y c. Sea $E = 140$ GPa y $\nu = 0.35$.

5-6. Resuelva el problema precedente cambiando las fuerzas aplicadas a $P_x = +2.40$ MPa, $P_y = -1.20$ MPa y $P_z = -2.00$ MPa. ¿Cuál debe ser la magnitud de P_x actuando sola para causar la misma deformación a lo largo de a que las otras tres fuerzas?

5-7. Una placa de acero de $50 \times 250 \times 10$ mm está sometida a esfuerzos uniformemente distribuidos a lo largo de sus bordes (véase la figura). (a) Si $P_x = 100$ kN y $P_y = 200$ kN, ¿qué cambio en espesor ocurre debido a la aplicación de esas fuerzas? (b) Para causar el mismo cambio en espesor que en la parte (a) por sólo P_x, ¿cuál debe ser la magnitud de esta fuerza? Sean $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$.

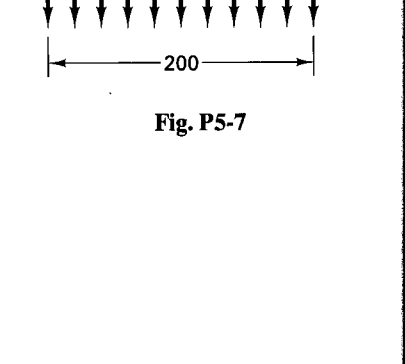


Fig. P5-7

5-8. Una placa rectangular de titanio similar a la mostrada en la figura 5-10(a) tiene las siguientes dimensiones: $a = 20$ mm, $b = 15$ mm y $c = 5$ mm. En la dirección z actúan fuerzas de tensión uniformemente distribuidas de 7.50 kN. Determine las deformaciones unitarias en las direcciones x, y y z. Sea $E = 120$ GPa y $\nu = 0.35$.

5-9. Suponiendo para el acero un $E = 200$ GPa y una $\nu = 0.25$, calcule los parámetros de Lamé.

Secciones 5-7 y 5-8

5-10. Si una aleación de níquel tiene un $E = 180$ MPa y se estima que $\nu = 0.25$, ¿cuál es su módulo cortante?

5-11. Si para el plomo $E = 16$ MPa y se estima que $\nu = 0.45$, ¿cuál es su módulo cortante G y su módulo volumétrico k?

5-12. Usando los valores para E y G dados en la Tabla 1A del apéndice, calcule las razones de Poisson para la aleación de aluminio 2024-T4 y para el acero.

5-13. Usando la Tabla 1A del apéndice, calcule los módulos volumétricos para la aleación de aluminio 6061-T6 y el acero en las unidades comunes en el sistema inglés.

5-14. ¿Cuáles son los valores de G y del módulo volumétrico k para el vidrio si $E = 65$ MPa y $\nu = 0.22$, para el acero si $E = 200$ MPa y $\nu = 0.25$ y para el plomo si $E = 16$ MPa y $\nu = 0.45$?

Sección 5-9

5-15. Un cascarón cilíndrico de acero inoxidable tiene 30 in. de diámetro interior y 0.5 in. de espesor. Si la resistencia a tensión del material es de 80 ksi y el factor de seguridad es de 5, ¿cuál es la presión permisible de trabajo? Suponga que se proporcionan extremos hemisféricos apropiados. Estime también la presión de ruptura.

5-16. Una tubería a presión que lleva agua a una turbina hidroeléctrica opera con una carga de 80 m. Si el diámetro de la tubería es de 0.75 m y el esfuerzo permisible es de 60 MPa, ¿qué espesor de pared se requiere?

5-17. Un tanque soldado a tope para el almacenamiento de gasolina debe tener 12 m de diámetro y 5 m de altura. (a) Seleccione el espesor de la placa del fondo. Considere 160 MPa para el acero en tensión y una eficiencia de las soldaduras del 80%. Agregue aproximadamente 3 mm al espesor calculado para la pared para compensar el efecto de la corrosión. No tome en cuenta los esfuerzos locales en la unión de las paredes verticales con el fondo. (Densidad relativa de la gasolina por almacenar = 0.721.) (b) Suponiendo que el fondo del tanque no restringe el desplazamiento de las paredes del tanque, ¿qué incremento del diámetro tendrá lugar en el fondo? $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$.

5-18. Un recipiente cilíndrico se usa para almacenar amoníaco (NH_3) a una temperatura máxima de 50°C. La presión del vapor de NH_3 a 50°C es de 20 atm. El espesor del material del recipiente está limitado a 20 mm con una resistencia a tensión de 400 MPa. (a) Si el factor de seguridad es de 5, suponiendo que todas las soldaduras serán inspeccionadas con rayos X, ¿cuál puede ser el diámetro máximo del recipiente? (b) Para el espesor de pared seleccionada, calcule el cambio en el diámetro que ocurrirá con el amoníaco a 50°C.

5-19. Una cámara de aire para una bomba, cuya vista seccional lateral se muestra en milímetros en la figura, consiste en dos piezas. Calcule el número de tornillos de 19 mm (área *neta* = 195 mm^2) requeridos para unir la cámara al cilindro en el plano *A-A*. El esfuerzo permisible de tensión en los tornillos es de 50 MPa y la presión del agua y del aire es de 1.5 MPa.

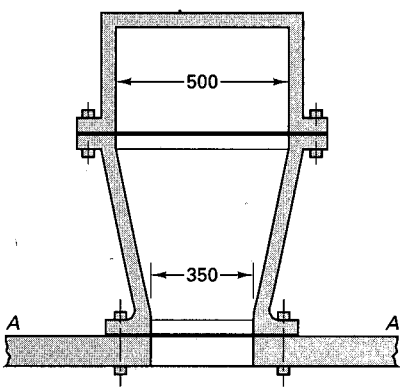


Fig. P5-19

5-20. Un tanque de agua hecho con duelas de madera tiene 6 m de diámetro y 4 m de altura. Especifique el espaciamiento de los zunchos de acero de 30 × 6 mm si el esfuerzo permisible en tensión para el acero se fija en 90 MPa. Use un espaciamiento uniforme para los zunchos en cada metro de la altura del tanque.

5-21. Un recipiente a presión cilíndrico con 120 in. de diámetro *exterior*, usado para procesar hule, tiene 36 ft de longitud. Si la porción cilíndrica del recipiente está hecha con una placa de acero de 1 in. de espesor y el recipiente opera a 120 psi de presión interna, determine el alargamiento total de la circunferencia y el incremento en el diámetro causado por la presión de operación. $E = 29 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.25$.

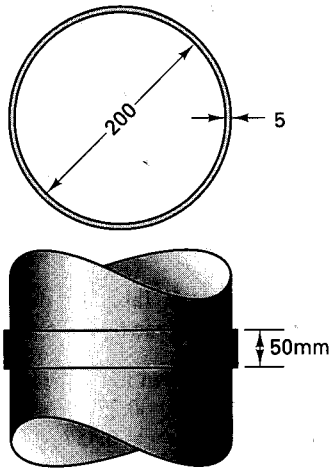


Fig. P5-22

5-22. Un anillo delgado se calienta en aceite 150°C por arriba de la temperatura ambiente. En esta condición, el anillo se desliza apenas sobre un cilindro sólido, como se muestra en la figura. Suponiendo que el cilindro es completamente rígido, (a) determine el esfuerzo de aro que se desarrolla en el anillo al enfriarse éste y (b) determine qué aplastamiento se desarrolla entre el anillo y el cilindro. Sea $\alpha = 20 \times 10^{-6}/°C$ y $E = 70$ GPa.

5-23. Un alambre de cobre está tenso a través del diámetro de un recipiente cilíndrico a presión, como se muestra en la figura. Para el alambre: $A = 0.060$ mm^2, $E = 140$ GPa y $\alpha = 18 \times 10^{-6}/°C$. El diámetro del recipiente a presión de acero es de 2000 mm y el espesor de su pared es de 10 mm. (En los cálculos no diferencie entre los diámetros interior y medio del cilindro.) Para el acero: $E = 200$ GPa, $\alpha_{ac} = 12 \times 10^{-6}/°C$ y la razón de Poisson $\nu = 0.30$. Si este recipiente tiene una presión interna de 1 MPa y al mismo tiempo la temperatura desciende 50°C, ¿qué esfuerzo se desarrolla en el alambre? Suponga que la temperatura del alambre así como la del cilindro descienden simultáneamente y que la deformación del cilindro causada por el tirón del alambre puede no tomarse en cuenta.

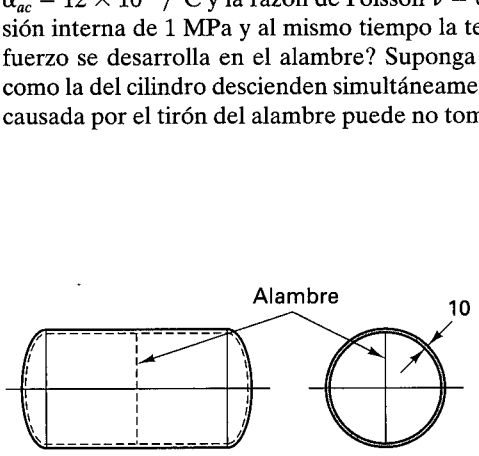


Fig. P5-23

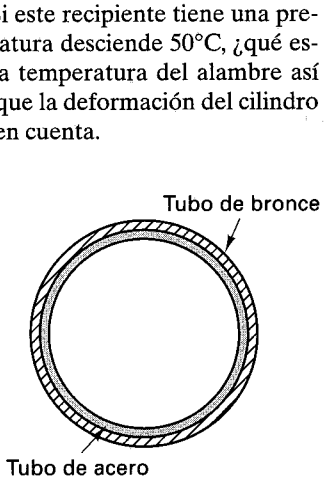


Fig. P5-24

5-24. Un recipiente cilíndrico a presión mostrado en la figura se construye ajustando en caliente un tubo de bronce sobre un tubo de acero dulce. Ambos cilindros tienen espesor de pared de 0.25 in. El diámetro nominal del recipiente es de 20 in. y debe usarse este valor en todos los cálculos que impliquen al diámetro. Cuando el cilindro de bronce se calienta 100°F por arriba de la temperatura ambiente queda exactamente ajustado sobre el cilindro de acero que está a temperatura ambiente. ¿Cuál es el esfuerzo en el cilindro de bronce cuando los recipientes compuestos se enfrían a temperatura ambiente? Para el bronce: $E_{Br} = 16 \times 16^6$ psi y $\alpha_{Br} = 10.7 \times 10^{-6}/°F$. Para el acero: $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi y $\alpha_{ac} = 6.7 \times 10^{-6}/°F$.

5-25. Un tubo de aluminio se ajusta térmicamente sobre un tubo de acero para formar el recipiente a presión ilustrado en la figura. El espesor de la pared de cada tubo es de 4 mm. El diámetro promedio del conjunto por usarse en los cálculos es de 400 mm. Si el tubo compuesto se somete a una presión de 2 MPa, ¿qué esfuerzo adicional de aro se desarrolla en el tubo de aluminio? Suponga que los extremos del tubo pueden expandirse libremente, impidiendo el desarrollo de esfuerzos longitudinales (es decir, $\sigma_x = 0$). Sea $E_{Al} = 70 \times 10^3$ MPa y $E_{ac} = 200 \times 10^3$ MPa. (*Su-*

gerencia: La presión en la interfaz, digamos $\bar{p}$, entre los dos materiales actúa para causar tensión de aro en el tubo exterior y compresión de aro en el tubo interior.)

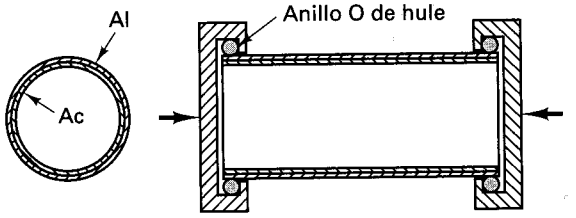


Fig. P5-25

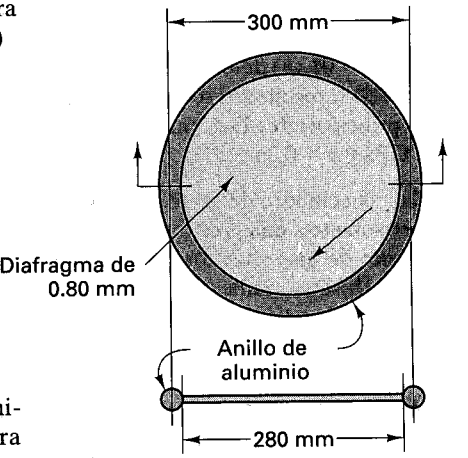


Fig. P5-26

5-26. Un diafragma de acero de 0.80 mm de espesor se estira dentro de un anillo de aluminio, como se muestra en la figura. El anillo está hecho de una barra redonda de 20 mm de diámetro. Si la temperatura se eleva 40°C, ¿qué esfuerzos se inducen en el diafragma? Para el aluminio, $E_a = 70$ GPa, $G_a = 26$ GPa y $\alpha_a = 23 \times 10^{-6}/°C$. Para el diafragma de acero, $E_s = 200$ GPa, $G_s = 83$ GPa y $\alpha_s = 1.2 \times 10^{-6}/°C$.

5.27. Recipientes a presión de peso excepcionalmente ligero han sido desarrollados empleando filamentos de vidrio para resistir las fuerzas de tensión y usando resina epóxica como pegamento. En la figura se muestra un diagrama de un cilindro enrollado en filamentos. Si el enrollamiento es necesario para resistir sólo esfuerzos de aro, el ángulo de la hélice $\alpha = 90°$. Sin embargo, si el cilindro está cerrado, se desarrollan fuerzas de aro y longitudinales y el ángulo requerido en la hélice de los filamentos es $\alpha \approx 55°$ ($\tan^2 \alpha = 2$). Verifique este resultado. (*Sugerencia:* Aísle un elemento de ancho unitario y una longitud desarrollada de tan α como en la figura. Para este elemento, el mismo número de filamentos es cortado por cada sección. Por lo tanto, si F es una fuerza en un filamento y n es el número de filamentos en una sección, $P_y = Fn$ sen α. La fuerza P_x puede encontrarse en forma similar. Una ecuación basada en la razón conocida del esfuerzo longitudinal al esfuerzo de aro conduce al resultado buscado.)

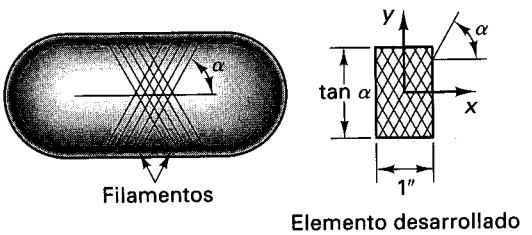


Fig. P5-27

Secciones 5-12 y 5-13

5-28. Verifique la solución de la ecuación 5-30.

5-29. Demuestre que la razón del esfuerzo tangencial máximo al esfuerzo tangencial promedio para un cilindro de pared gruesa sometido sólo a presión interna es $(1 + \beta^2)/(1 + \beta)$, donde $\beta = r_o/r_i$.

5-30. Demuestre que independientemente de qué tan grande sea el diámetro exterior de un cilindro sometido sólo a presión interna, el esfuerzo tangencial máximo no es menor que p_i. (*Sugerencia:* Haga $r_o \rightarrow \infty$.)

5-31. Un cilindro de acero tiene 150 mm de diámetro interior (DI) y 450 mm de diámetro exterior (DE). Si el cilindro se somete a una presión interna $p_i = 150$ MPa ($p_o = 0$), (a) determine las distribuciones de los esfuerzos radial y tangencial y muestre los resultados sobre una gráfica. (b) Determine el esfuerzo cortante máximo (principal). (c) Determine el cambio en los diámetros externo e interno. $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$.

5-32. Un cilindro de acero tiene un DI de 200 mm y un DE de 400 mm. Si el cilindro se somete a una presión interna $p_i = 120$ MPa ($p_o = 0$), (a) determine las distribuciones de los esfuerzos radial y tangencial y muestre los resultados sobre una gráfica. (b) Determine el esfuerzo cortante máximo (principal). (c) Determine los cambios en los diámetros externo e interno. $E = 200$ GPa y $\nu = 0.25$.

5-33. Resuelva el problema 5-32 con $p_i = 0$ y $p_o = 80$ MPa.

5-34. Resuelva el problema 5-32 con $p_i = 160$ MPa y $p_o = 80$ MPa.

5-35. Aísle una mitad del cilindro del problema 5-34 pasando un plano por el eje del cilindro. Luego, integrando los esfuerzos tangenciales sobre las respectivas áreas, muestre que el cuerpo libre aislado está en equilibrio.

5-36. Diseñe un cilindro de pared gruesa de 4 in. de diámetro interno para una presión interna de 8000 psi tal que se tenga (a) un factor de seguridad de 2 contra cualquier fluencia en el cilindro y (b) un factor de seguridad de 3 contra colapso último. El esfuerzo de fluencia del acero en tensión es de 40 ksi.

5-37. Un cilindro de acero con 16 in. de diámetro exterior (DE) y aproximadamente 10 in. de diámetro interior (DI) es ajustado en caliente sobre otro cilindro de acero de 10 in. de DE y 6 in. de DI. Inicialmente, el diámetro interno del cilindro exterior era 0.01 in. más pequeño que el diámetro exterior del cilindro interno. El ensamble se logró calentando el cilindro mayor en aceite. Para ambos cilindros, $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.25$. (a) Determine la presión en las fronteras entre los dos cilindros. (*Sugerencia:* El incremento elástico en el diámetro del cilindro externo junto con el decremento elástico en el diámetro del interno permite el ajuste de la interferencia inicial entre los dos cilindros.) (b) Determine los esfuerzos tangencial y radial causados por la presión encontrada en el inciso (a). Muestre los resultados sobre una gráfica. (c) Determine la presión interna a la que el cilindro compuesto puede someterse sin exceder un esfuerzo tangencial de 20,000 psi en el cilindro interno. (*Sugerencia:* Después del ensamble los cilindros actúan como una unidad. El esfuerzo de compresión inicial en el cilindro interno es liberado primero.) (d) Superponga los esfuerzos tangenciales encontrados en el inciso (b) con los esfuerzos tangenciales resultantes de la presión interna encontrada en el inciso (c). Muestre los resultados sobre una gráfica.

5-38. Obtenga la ecuación diferencial para un disco delgado que gira con velocidad angular de ω rad/s. El peso unitario del material es γ. [(*Sugerencia:* Considere un elemento como el de la figura 5-21(b) y agregue un término de inercia.)]

Sección 5-14

5-39. Para un cilindro de pared gruesa de radio interior a y radio exterior $b = 2a$, (a) calcule la presión interna para la cual la frontera elasto-plástica está en $r = 1.5a$; (b) determine las distribuciones del esfuerzo radial y tangencial debido a la presión interior encontrada en el inciso (a) y muéstrelas en un diagrama; (c) calcule la carga última de colapso. Suponga que el material es elástico perfectamente plástico, con un esfuerzo de fluencia de 350 MPa.

6

Torsión

6-1. Introducción

En los primeros cuatro capítulos se presentaron métodos detallados de análisis para determinar los esfuerzos y las deformaciones en barras cargadas axialmente. Relaciones análogas para miembros sometidos a pares de torsión respecto a sus ejes longitudinales serán desarrolladas en este capítulo. Las relaciones constitutivas por cortante vistas en el capítulo precedente serán usadas para este fin. *Las investigaciones se confinan al efecto de un solo tipo de acción (es decir, al de un par de torsión que genera una torsión en un miembro).* Los miembros sometidos simultáneamente a torsión y flexión, que ocurren con frecuencia en la práctica, serán tratados en el capítulo 13.

Por mucho, la gran parte de este capítulo se dedica a miembros de secciones transversales circulares, ya sean macizas o bien tubulares. La solución de tales problemas elásticos e inelásticos puede obtenerse usando los procedimientos de la mecánica de sólidos. Para la solución de problemas de torsión con secciones transversales no circulares deben emplearse los métodos de la teoría matemática de la elasticidad (o elementos finitos). Este tema se estudia brevemente para hacer consciente al lector de las diferencias en tales soluciones respecto a las de los miembros circulares. Además, para enfatizar la diferencia en las soluciones analizadas, este capí-

tulo está subdividido en cuatro partes distintas. Sin embargo, debe notarse que en la práctica, los miembros para transmitir pares de torsión, como flechas para motores, pares de torsión para equipo de potencia, etc. son predominantemente circulares macizos o tubulares en sus secciones transversales. Por lo tanto, numerosas aplicaciones caen dentro del alcance de las fórmulas deducidas en este capítulo.

6-2. Aplicación del método de las secciones

En la mecáncia de sólidos, al analizar los miembros respecto a pares de torsión, independientemente del tipo de sección transversal que se tenga, se emplea el método básico de las secciones (Sección 1-2). Para los problemas de torsión analizados aquí, hay *sólo una* ecuación importante de estática. Entonces, si el eje x está dirigido a lo largo de un miembro, tal ecuación es $\Sigma M_x = 0$. Por consiguiente, en sistemas estáticamente determinados, sólo puede haber un par de torsión reactivo. Después de determinar este par, el análisis empieza separando un miembro por una *sección perpendicular al eje del miembro*. Entonces cualquier lado de un miembro puede ser aislado y encontrar así el par de torsión *interno*. Este par de torsión interno debe *equilibrar* los pares aplicados externamente (es decir, *los pares de torsión externo e interno son iguales*) pero ellos tienen sentido opuesto. En problemas estáticamente determinados, el cálculo formal de una reacción puede pasarse por alto aislando un segmento de barra que contenga el extremo no soportado. Sin embargo, el equilibrio de todo el sistema debe estar siempre garantizado. En los problemas estáticamente indeterminados, las reacciones deben siempre encontrarse antes de poder calcular los pares de torsión internos. En la Sección 6-9 de este capítulo se proporciona alguna guía para el cálculo de las reacciones en problemas estáticamente indeterminados.

Por simplicidad, los miembros tratados en este capítulo serán supuestos "sin peso" o soportados a intervalos frecuentes tales que pueda no tomarse en cuenta el efecto de la flexión. De momento, las fuerzas axiales que pueden también actuar simultáneamente sobre las barras no serán consideradas.

Ejemplo 6.1

Encuentre el par de torsión interno en la sección K-K para la flecha mostrada en la figura 6-1(a) sobre la que actúan los tres pares de torsión indicados.

SOLUCIÓN

El par de torsión de 30 N·m en C está equilibrado por los dos pares de 20 y 10 N·m en A y B, respectivamente. Por tanto, el cuerpo en su conjunto está en equilibrio. Luego, pasando una sección K-K perpendicular al eje de la barra *en cualquier parte* entre A y B, se obtiene un diagrama de cuerpo libre de una parte de la flecha mostrado en la figura 6-1(b). Entonces, de $\Sigma M_x = 0$, o

par de torsión aplicado externamente = par de torsión interno

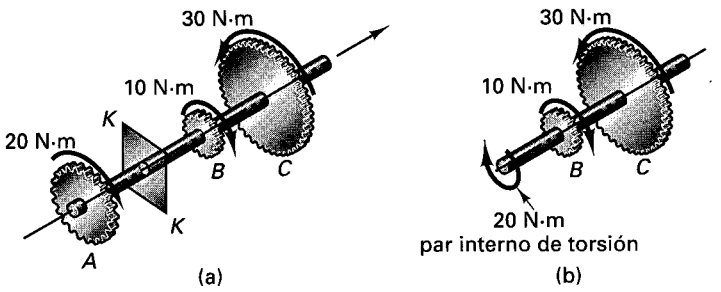


Fig. 6-1

se concluye que el par de torsión interno o resistente desarrollado en la flecha entre A y B es de 20 N·m. Consideraciones similares conducen a la conclusión de que el par de torsión interno resistido por la flecha entre B y C es de 30 N·m.

Puede verse intuitivamente que para un miembro de sección transversal constante, el par de torsión interno máximo causa el esfuerzo máximo e impone la condición más severa sobre el material. Por lo tanto, al investigar un miembro a torsión, varias secciones deben examinarse para determinar el par de torsión interno máximo. Una sección donde se desarrolla el máximo par de torsión interno es la *sección crítica*. En el ejemplo 6-1, la sección crítica es cualquier sección entre los puntos B y C. Si el miembro varía en tamaño, es más difícil decidir dónde el material está más sometido a un esfuerzo crítico. Varias secciones tendrán que ser investigadas y sus *esfuerzos calculados* para determinar la sección crítica. Esas situaciones son análogas al caso de una barra axialmente cargada y deben desarrollarse medios para determinar los esfuerzos como función del par de torsión interno y del tamaño del miembro. En las siguientes secciones se obtendrán las fórmulas necesarias.

En vez de flechas curvas como en la figura 6-1, se usarán también en este texto vectores de cabeza doble que obedezcan la convención de signos asociada a la regla de la mano derecha; véase la figura 6-2. El par de torsión **T** es un vector, similar al vector fuerza **P** encontrado en la Sección 1-4. Como la dirección de **T** se conoce *a priori*, por simplicidad se usa su representación escalar T.

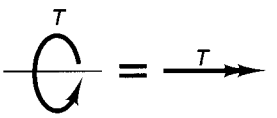


Fig. 6-2 Representaciones alternativas de un par de torsión.

Parte A TORSIÓN DE BARRAS CIRCULARES ELÁSTICAS

6-3. Hipótesis básicas para miembros circulares

Para establecer una relación entre el par de torsión interno y los esfuerzos que éste genera en miembros con *secciones transversales circulares macizas y tubulares*, es necesario plantear dos hipótesis, cuya validez se justificará después. Éstas, junto con la homogeneidad del material, son:

1. Una sección plana de material perpendicular al eje de un miembro circular permanece *plana* después de aplicados los pares de torsión (es decir, no tiene lugar ningún *alabeo* o distorsión de planos paralelos normales al eje de un miembro).[1]
2. En un miembro circular sometido a un par de torsión, las *deformaciones unitarias cortantes* γ *varían linealmente desde el eje central*, alcanzando $\gamma_{máx}$ en la periferia. Esta hipótesis está ilustrada en la figura 6-3 y significa que un plano imaginario como el DO_1O_3C se traslada al $D'O_1O_3C$ cuando se aplica el par de torsión. Alternativamente, si un radio imaginario O_3C se considera fijo en dirección, radios similares inicialmente en O_2B y O_1D girarán a las respectivas nuevas posiciones O_2B' y O_1D'. Esos radios permanecen rectos.

   Debe recalcarse que estas hipótesis *son válidas sólo para miembros circulares macizos y tubulares*. Para este tipo de miembros, estas hipótesis funcionan tan bien que *son aplicables más allá del límite de comportamiento elástico de un material*. Estas hipótesis se usarán de nuevo en la sección 6-13, donde se analiza la distribución del esfuerzo más allá del límite proporcional.
3. Si la atención se confina a un material linealmente *elástico*, la ley de Hooke es aplicable y se infiere que el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación unitaria cortante. Para este caso se encuentra una concordancia completa entre las cantidades determinadas experimentalmente y las calculadas con las fórmulas derivadas de esfuerzo y deformación basadas en esas hipótesis. Además, su validez puede demostrarse rigurosamente con los métodos de la teoría matemática de la elasticidad.

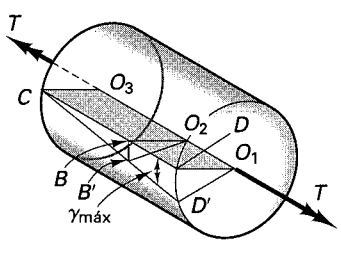


Fig. 6-3 Variación de la deformación unitaria en un miembro circular sometido a un par de torsión.

[1]Para pequeñas deformaciones se supone que planos paralelos perpendiculares al eje *permanecen* separados una cierta distancia *constante.* Esto no es cierto si las deformaciones son grandes. Sin embargo, como las deformaciones usuales son muy pequeñas, los esfuerzos no considerados aquí son despreciables. Para los detalles, véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 3a. ed., parte II, *Advanced Theory and Problems,* Nueva York: Van Nostrand, 1956, capítulo VI.

6-4. La fórmula de la torsión

En el caso *elástico*, con base en las hipótesis previas, como el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria y ésta varía linealmente desde el centro, los *esfuerzos varían linealmente desde el eje central de un miembro circular*. Los esfuerzos inducidos por las deformaciones supuestas son esfuerzos *cortantes* y se encuentran en el plano paralelo a la sección normal al eje de una barra. La variación del esfuerzo cortante se infiere directamente de la hipótesis de la deformación unitaria cortante y del uso de la ley de Hooke por cortante dada por la ecuación 5-1. Esto se ilustra en la figura 6-4. A diferencia del caso de una barra cargada axialmente, este esfuerzo *no* es de intensidad uniforme. El esfuerzo cortante máximo ocurre en los puntos más remotos del centro O y se designa por $\tau_{máx}$. Esos puntos, como los C y D en las figuras 6-3 y 6-4, se encuentran en la periferia de una sección a una distancia c del centro. Para una variación lineal del esfuerzo cortante, en *cualquier* punto arbitrario a una distancia ρ desde O, el esfuerzo cortante es $(\rho/c)\tau_{máx}$.

El par de torsión resistente puede expresarse en términos del esfuerzo una vez que la distribución de éste en una sección se ha establecido. Por equilibrio, este par de torsión resistente debe ser igual al par de torsión T aplicado externamente. Por consiguiente,

$$\int_A \underbrace{\underbrace{\frac{\rho}{c}\tau_{máx}}_{\text{esfuerzo}}\ \underbrace{dA}_{\text{área}}}_{\text{fuerza}}\ \underbrace{\rho}_{\text{brazo}} = T$$

par de torsión

donde la integral suma todos los pares de torsión desarrollados sobre el corte por las fuerzas infinitesimales actuando a una distancia ρ desde el eje del miembro, O en la figura 6-4, sobre toda el área A de la sección transversal y donde T es el par de torsión resistente.

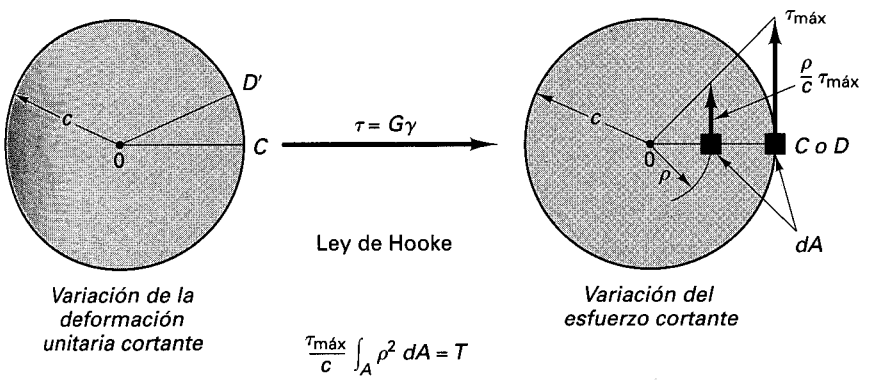


Fig. 6-4 Hipótesis de la deformación unitaria cortante que conduce a una distribución del esfuerzo cortante elástico en un miembro circular.

En una sección dada cualquiera, $\tau_{máx}$ y c son constantes; por consiguiente, la relación previa puede escribirse como

$$\frac{\tau_{máx}}{c}\int_A \rho^2\, dA = T \tag{6-1}$$

Sin embargo, $\int_A \rho^2\, dA$ que es el *momento polar de inercia* del área de una sección transversal, es también una constante para un área transversal particular. Será designado por I_p en este texto. Para una sección circular, $dA = 2\pi\rho\, d\rho$, donde $2\pi\rho$ es la circunferencia de un anillo[2] de radio ρ de ancho $d\rho$. Por consiguiente,

$$I_P = \int_A \rho^2\, dA = \int_0^c 2\pi\rho^3\, d\rho = 2\pi \left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^c = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \tag{6-2}$$

O bien

$$\boxed{I_p = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}} \tag{6-2}$$

donde d es el diámetro de un eje macizo circular. Si c o d se mide en milímetros, I_p tiene unidades de mm^4; si se mide en pulgadas, las unidades son entonces in^4.

Usando el símbolo I_p para el momento polar de inercia de un área circular, la ecuación 6-1 puede escribirse en forma más compacta como

$$\boxed{\tau_{máx} = \frac{Tc}{I_p}} \tag{6-3}$$

Esta ecuación es la bien conocida *fórmula de la torsión*[3] para flechas circulares que expresa el esfuerzo cortante máximo en términos del par de torsión resistente y las dimensiones del miembro. Al aplicar esta fórmula, el par de torsión interno T puede expresarse en newton-metros, N·m o en libras-pulgada, c en metros o pulgadas e I_p en m^4 o en in^4. Las unidades del esfuerzo cortante torsionante son entonces

$$\frac{[N \cdot m][m]}{[m^4]} = \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

o *pascales* (Pa) en unidades SI, o

$$\frac{[\text{in-lb}][\text{in}]}{[\text{in}^4]} = \left[\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}\right]$$

o *psi* en unidades del sistema inglés.

[2]Un anillo es un área contenida entre dos círculos concéntricos.

[3]Fue desarrollada por Coulomb, un ingeniero francés, alrededor de 1775, en conexión con su trabajo sobre instrumentos eléctricos. Su nombre ha sido inmortalizado por su uso en una unidad práctica de carga en electricidad.

Una relación más general que la ecuación 6-3 para un esfuerzo cortante τ, en *cualquier* punto a una distancia ρ desde el centro de una sección, es

$$\tau = \frac{\rho}{c}\tau_{máx} = \frac{T\rho}{I_p} \tag{6-4}$$

Las ecuaciones 6-3 y 6-4 *son aplicables* con igual rigor a *tubos circulares* ya que se usan aquí las mismas hipótesis de la deducción previa. Sin embargo, es necesario modificar I_p. Para un tubo, como puede verse en la figura 6-5, los límites de integración en la ecuación 6-2 se extienden de b a c. Por consiguiente, para un *tubo circular*,

$$I_p = \int_A \rho^2\, dA = \int_b^c 2\pi\rho^3\, d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} \tag{6-5}$$

o, de otra manera, I_p para un tubo circular es igual a $+ I_p$ para una flecha maciza usando el diámetro exterior más $-I_p$ para una flecha maciza usando el diámetro interior.

Para tubos muy *delgados*, si b es casi igual a c y $c - b = t$, el espesor del tubo, I_p se reduce a una expresión aproximada simple:

$$I_p \approx 2\pi R_{prom}^3 t \tag{6-6}$$

donde $R_{prom} = (b + c)/2$, que es suficientemente exacta en algunas aplicaciones.

En una barra circular hecha de dos materiales diferentes unidos entre sí, como se muestra en la figura 6-6(a), se aplica la misma hipótesis de *deformación unitaria* que para un miembro macizo. Para tal caso, por medio de la ley de Hooke, la distribución del *esfuerzo* cortante está dada por la mostrada en la figura 6-6(b). Si el módulo de cortante para el tubo exterior más rígido es G_1 y el del núcleo interior más blando es G_2, la razón de los esfuerzos cortantes respectivos sobre un anillo de radio OB es G_1/G_2.

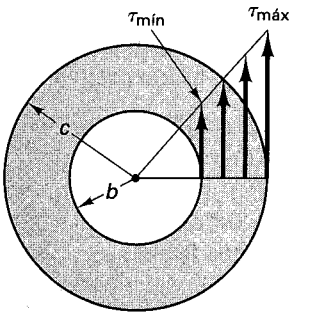


Fig. 6-5 Variación del esfuerzo en un tubo circular elástico.

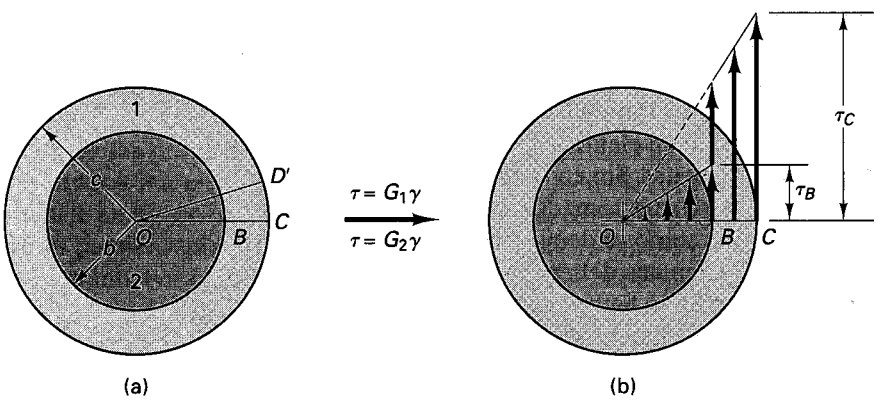


Fig. 6-6 Comportamiento elástico de un miembro circular en torsión con núcleo interior de material blando.

Resumen del procedimiento Para el problema de la torsión de flechas circulares, los *tres conceptos básicos* de la mecánica de sólidos tal como se han usado previamente, pueden resumirse de la siguiente manera:

1. *Las condiciones de equilibrio* se usan para determinar los pares de torsión resistentes internos en una sección.
2. *La geometría de la deformación* (cinemática) se postula de manera que las deformaciones unitarias cortantes varíen linealmente desde el eje de una flecha.
3. *Las propiedades del material* (relaciones constitutivas) se usan para relacionar las deformaciones unitarias cortantes con los esfuerzos cortantes y permiten el cálculo de los esfuerzos cortantes en una sección.

Sólo un caso elástico lineal –usando la ley de Hooke– se consideró en el análisis precedente. Éste se extenderá en la sección 6-13 al comportamiento no lineal del material.

Estos conceptos básicos se usan para determinar esfuerzos y ángulos de torsión de flechas circulares. Sin embargo, similar al caso de barras cargadas axialmente, grandes esfuerzos *locales* aparecen en los puntos de aplicación de pares de torsión concentrados o de cambios en sección transversal. De acuerdo con el *principio de Saint-Venant*, los esfuerzos y deformaciones unitarias son exactamente descritos por la teoría desarrollada sólo más allá de una distancia aproximadamente igual al diámetro de una flecha medida desde esas posiciones. Típicamente, los esfuerzos locales se determinan usando factores de concentración de esfuerzos.

6-5. Observaciones sobre la fórmula de la torsión

Hasta ahora, los esfuerzos cortantes dados por las ecuaciones 6-3 y 6-4 han sido considerados actuando en el plano de un corte perpendicular al eje de la flecha. Ellos actúan ahí formando un par de torsión resistente a los pares aplicados externamente. Sin embargo, para entender mejor el problema, aislamos un elemento cilíndrico infinitesimal[4] mostrado en la figura 6-7(b).

Los esfuerzos cortantes que actúan en los planos perpendiculares al eje de la barra se conocen de la ecuación 6-4. *Sus direcciones coinciden con la dirección del par de torsión interno.* (Esto debe ser claramente visualizado por el lector.) Sobre planos paralelos adyacentes de un elemento en forma de disco, esos esfuerzos actúan en direcciones opuestas. Sin embargo, esos esfuerzos cortantes que actúan en el plano de los cortes tomados normalmente al eje de una barra *no pueden existir solos*, como se demostró en la sección 1-4. Numéricamente, esfuerzos cortantes iguales deben actuar sobre los planos axiales [como los planos *aef* y *bcg* en la figura 6-7(b)] para satisfacer los requisitos de equilibrio estático de un elemento.[5]

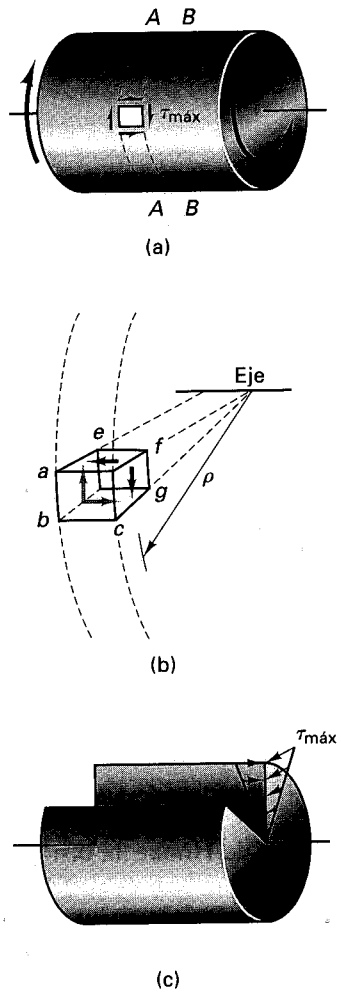


Fig. 6-7 Existencia de esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares en una flecha circular sometida a torsión.

[4]Dos planos perpendiculares al eje de la barra, dos planos por el eje y dos superficies en radios diferentes se usan para aislar este elemento. Las propiedades de este elemento son expresables matemáticamente en coordenadas cilíndricas.

[5]Nótese que los esfuerzos cortantes máximos, como se muestran en la figura 6-7(a), actúan en realidad sobre planos perpendiculares al eje de la barra y sobre planos que pasan por el eje de la misma. La representación que se muestra es puramente esquemática. La *superficie* libre de una flecha o eje está *libre* de todo esfuerzo.

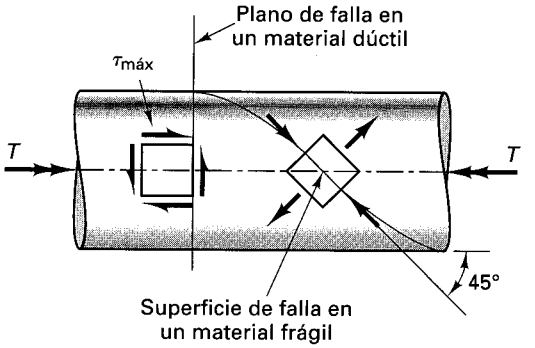


Fig. 6-8 Superficies potenciales de falla torsional en materiales dúctiles y frágiles.

Los esfuerzos cortantes que actúan en los planos axiales siguen la misma variación de intensidad que los esfuerzos cortantes en los planos perpendiculares al eje de la barra. Esta variación de los esfuerzos cortantes sobre los planos mutuamente perpendiculares se muestra en la figura 6-7(c), donde una porción de la flecha se ha suprimido para fines de ilustración.

De acuerdo con la sección 5-7, tales esfuerzos *cortantes* pueden *transformarse* en un sistema *equivalente* de esfuerzos *normales* actuando a 45° con los esfuerzos cortantes (véase la figura 5-11). Numéricamente, esos esfuerzos están relacionados entre sí de la siguiente manera: $\tau = \sigma_1 = -\sigma_2$. Por lo tanto, si la resistencia cortante de un material es menor que su resistencia en tensión, tiene lugar una falla cortante sobre un plano perpendicular al eje de la barra;[6] véase la figura 6-8. Este tipo de falla ocurre gradualmente y exhibe un comportamiento *dúctil*. Alternativamente, si la proposición inversa es cierta (es decir, $\sigma_1 < \tau$), una fractura frágil es causada por los esfuerzos de tensión a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 45° con el eje de la barra;[6] véase la figura 6-8. En la figura 6-9 se muestra una fotografía de una fractura dúctil en una probeta de acero y en la figura 6-10 la de una fractura frágil en una de hierro fundido. Otro ejemplo de una fractura frágil, en arenisca, se muestra en la figura 6-11.

La transformación del esfuerzo visto en el análisis previo, como no depende de las propiedades del material, es también aplicable a materiales anisótropos. Por ejemplo, la madera muestra propiedades diferentes de resistencia en direcciones diferentes. La resistencia cortante de la madera en planos paralelos al grano es mucho menor que sobre planos perpendiculares al grano. Por consiguiente, aunque existen iguales intensidades del esfuerzo cortante sobre planos mutuamente perpendiculares, las flechas de madera de tamaño inadecuado fallan longitudinalmente a lo largo de planos axiales. Tales flechas son ocasionalmente usadas en las industrias de procesos.

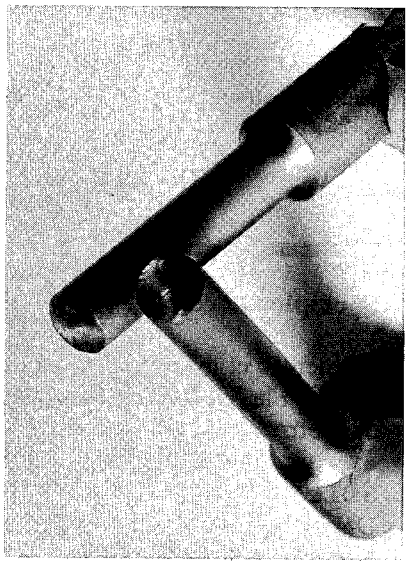


Fig. 6-9 Probeta de acero A322 fracturada por torsión.

[6]El gis ordinario se comporta en forma similar. Esto puede demostrarse en el salón de clase torciendo un pedazo de gis hasta que falle.

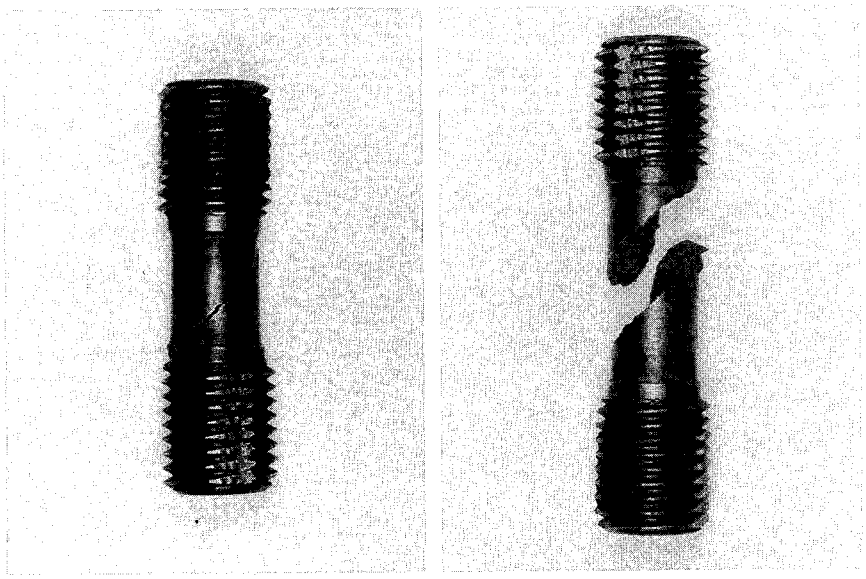


Fig. 6-10 Probeta de hierro fundido fracturada por torsión. La fotografía a la derecha muestra la probeta más ampliamente separada.

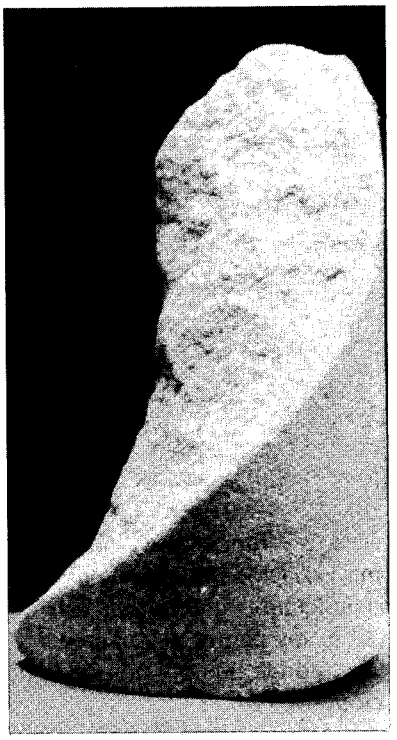


Fig. 6-11 Parte de un núcleo de una probeta de arenisca fracturada por torsión. (Experimento hecho por D. Pirtz.)

Ejemplo 6-2

Encuentre el máximo esfuerzo cortante por torsión en la flecha AC mostrada en la figura 6-1(a). Suponga que la flecha de A a C tiene 10 mm de diámetro.

SOLUCIÓN

Del ejemplo 6-1, sabemos que el par de torsión interno máximo resistido por esta flecha es de 30 N·m. Por consiguiente, $T = 30$ N·m y $c = d/2 = 5$ mm. De la ecuación 6-2,

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 10^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

y de la ecuación 6-3,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{30 \times 10^3 \times 5}{982} = 153 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo cortante máximo a 5 mm del eje de la barra actúa en el plano de un corte perpendicular al eje de la barra y a lo largo de planos longitudinales que pasan por el eje de la barra [Fig. 6-7(c)]. Igual que para un elemento cartesiano, los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares de un elemento cilíndrico son iguales. Es conveniente no-

tar que los resultados de esta solución pueden representarse en forma matricial por dos elementos en un tensor esfuerzo como

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{máx} & 0 \\ \tau_{máx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 153 & 0 \\ 153 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa} \qquad (6\text{-}7)$$

Éste debe contrastarse con el tensor esfuerzo totalmente poblado dado por la ecuación 1-1b.

Ejemplo 6-3

Considere un tubo largo con diámetro exterior d_o de 20 mm y con diámetro interior d_i de 16 mm que está torcido alrededor de su eje longitudinal por un par de torsión T de 40 N·m. Determine los esfuerzos cortantes en el exterior y en el interior del tubo; véase la figura 6-12.

SOLUCIÓN

De la ecuación 6-5,

$$I_p = \frac{\pi(c^4 - b^4)}{2} = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi(20^4 - 16^4)}{32} = 9270 \text{ mm}^4$$

y de la ecuación 6-3,

$$\tau_{máx} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{40 \times 10^3 \times 10}{9270} = 43.1 \text{ MPa}$$

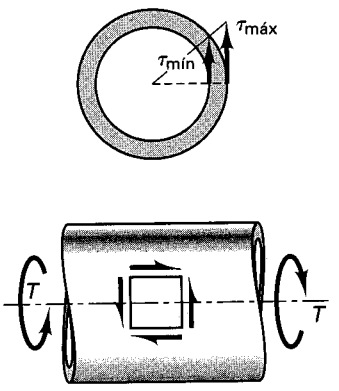


Fig. 6-12

Similarmente, de la ecuación 6-4,

$$\tau_{\text{mín}} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{40 \times 10^3 \times 8}{9270} = 34.5 \text{ MPa}$$

En un tubo de pared delgada, todo el material trabaja aproximadamente al mismo nivel de esfuerzo. Por tanto, los tubos de pared delgada son más eficientes en la transmisión de pares de torsión que los ejes sólidos. Estos tubos son también útiles para crear un "campo" esencialmente uniforme de esfuerzo cortante puro necesario para establecer relaciones τ–γ (Sección 5-2). Sin embargo, para evitar el pandeo local, el espesor de la pared no debe ser excesivamente delgado.

6-6. Diseño de miembros circulares en torsión por resistencia

En el diseño de miembros por resistencia deben seleccionarse esfuerzos cortantes permisibles. Estos dependen de la información disponible de los experimentos y de la aplicación pretendida. La información exacta sobre la capacidad de los materiales para resistir esfuerzos cortantes proviene de pruebas en tubos de pared delgada. Sistemas de ejes sólidos se emplean en pruebas de rutina. Además, como los miembros a torsión son a menudo usados en equipo de transmisión de potencia, se llevan también a cabo muchos experimentos de fatiga. La resistencia por cortante de los materiales dúctiles es, usualmente, sólo cerca de la mitad de su resistencia por tensión. El código de la ASME (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos) sobre prácticas recomendadas para la transmisión de potencia por flechas, da un valor permisible de 8000 psi para el esfuerzo cortante en aceros no especificados y 0.3 de fluencia o de 0.18 para la resistencia última en cortante, rigiendo la más pequeña.[7] En los diseños prácticos, las cargas aplicadas repentinamente o las cargas de impacto requieren de una consideración especial. (Véase la Sección 6-11.)

Después de que el par de torsión que será transmitido mediante una flecha se ha determinado, y que el esfuerzo cortante máximo permisible se ha seleccionado, de acuerdo con la ecuación 6-3, las proporciones de un miembro están dadas por

$$\boxed{\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}}} \tag{6-8}$$

donde I_p/c es el *parámetro* del que depende la resistencia elástica de una flecha. Para una barra axialmente cargada, tal parámetro es el área transversal de un miembro. Para una *flecha maciza*, $I_p/c = \pi c^3/2$, donde c es el radio externo. Usando esta expresión y la ecuación 6-8, el radio requerido de una flecha puede determinarse. Cualquier número de flechas *tubulares*

[7]Recomendaciones para otros materiales pueden encontrarse en libros sobre diseño de máquinas. Por ejemplo, véase J. E. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1977, o R. C. Juvinal, *Stress, Strain, and Strength*, Nueva York: McGraw-Hill, 1967.

puede escogerse para satisfacer la ecuación 6-8 variando la razón del radio externo al radio interno, c/b, para proporcionar el valor requerido de I_p/c.

El lector debe notar cuidadosamente que grandes esfuerzos locales se desarrollan por lo general en cambios de sección transversal y en ranuras para cuñas y chaveteros, donde el par es transmitido realmente. Estos temas, de importancia crítica en el diseño de flechas rotatorias, serán analizados brevemente en la siguiente sección.

Los miembros sometidos a pares de torsión son ampliamente usados como flechas giratorias para la transmisión de potencia. Para referencia futura, se obtendrá una fórmula para la conversión de caballos de potencia, que es la unidad convencional usada en la industria, en par de torsión actuando en la flecha. Por definición, 1 hp efectúa el trabajo de 745.7 N · m/s. Un N · m/s se denomina watt (W) en el sistema de unidades SI. Así entonces, 1 hp puede convertirse en 745.7 W. Se recordará de la dinámica que la potencia es igual al par de torsión multiplicado por el ángulo, medido en radianes, que la flecha gira por unidad de tiempo. Para una flecha que gira con frecuencia de f Hz,[8] el ángulo es $2\pi f$ rad/s. Por consiguiente, si una flecha transmite un par de torsión constante T medido en N·m, efectúa un trabajo por segundo de $2\pi fT$ N·m. Igualando esto a los caballos de potencia suministrados,

$$\text{hp} \times 745.7 = 2\pi fT \ [\text{N} \cdot \text{m/s}]$$

o

$$T = \frac{119 \times \text{hp}}{f} \ [\text{N} \cdot \text{m}] \tag{6-9}$$

o

$$\boxed{T = \frac{159 \times \text{kW}}{f} \ [\text{N} \cdot \text{m}]} \tag{6-10}$$

donde f es la frecuencia en hertz de la flecha al transmitir el caballaje hp o los kilowatts kW. Esas ecuaciones convierten la potencia aplicada en par de torsión aplicado.

En el sistema inglés, 1 hp efectúa un trabajo de 550 ft-lb/s o 550 × 12 × 60 in-lb/min. Si la flecha gira a N rpm (revoluciones por minuto), puede obtenerse una ecuación similar a las antes dadas:

$$\boxed{T = \frac{63{,}000 \times \text{hp}}{N} \ [\text{in-lb}]} \tag{6-11}$$

Ejemplo 6-4

Seleccione una flecha maciza para un motor de 10 hp que opera a 30 Hz. El esfuerzo cortante máximo está limitado a 55 MPa.

[8] 1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo (cps.)

SOLUCIÓN
De la ecuación 6-9,

$$T = \frac{119 \times \text{hp}}{f} = \frac{119 \times 10}{30} = 39.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y de la ecuación 6-8,

$$\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{39.7 \times 10^3}{55} = 722 \text{ mm}^3$$

$$\frac{I_p}{c} = \frac{\pi c^3}{2} \quad \text{o} \quad c^3 = \frac{2}{\pi}\frac{I_p}{c} = \frac{2 \times 722}{\pi} = 460 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente, $c = 7.72$ mm o $d = 2c = 15.4$ mm.

Por razones prácticas, probablemente se seleccionaría una flecha de 16 mm de diámetro.

Ejemplo 6-5

Seleccione flechas macizas para transmitir cada una 150 kW sin exceder un esfuerzo cortante de 70 MPa. Una de esas flechas opera a una frecuencia de 0.30 Hz y la otra a una frecuencia de 300 Hz.

SOLUCIÓN
El subíndice 1 se aplica a la flecha de baja velocidad y el 2 a la flecha de alta velocidad. De la ecuación 6-10,

$$T_1 = \frac{159 \times \text{kW}}{f_1} = \frac{159 \times 150}{0.30} = 79{,}500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Similarmente,

$$T_2 = 79.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación 6-8,

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{T_1}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{79{,}500}{70} = 1.14 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{\pi d_1^3}{16} \quad \text{o} \quad d_1^3 = \frac{16}{\pi}(1.14 \times 10^6) = 5.81 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente,

$$d_1 = 180 \text{ mm} \quad \text{y} \quad d_2 = 18 \text{ mm}$$

Este ejemplo ilustra la tendencia moderna a usar máquinas de alta velocidad en el equipo mecánico. La diferencia en tamaño de las dos flechas es

sorprendente. Ahorros adicionales en el peso de material pueden lograrse usando tubos huecos.

6-7. Concentraciones de esfuerzo

Las ecuaciones 6-3, 6-4 y 6-8 se aplican sólo a flechas circulares macizas y tubulares mientras el material se comporta elásticamente. Además, las áreas transversales a lo largo de la flecha deben permanecer razonablemente constantes. Si el diámetro varía *gradualmente*, las ecuaciones previas dan soluciones satisfactorias. Por otra parte, para flechas escalonadas, donde los diámetros de las porciones adyacentes cambian abruptamente, tienen lugar grandes perturbaciones de los esfuerzos cortantes. Altos esfuerzos cortantes *locales* ocurren en puntos alejados del centro de la flecha. Los métodos para determinar esas concentraciones locales de esfuerzos están más allá del alcance de este texto. Sin embargo, formando una razón del esfuerzo cortante máximo verdadero al esfuerzo máximo dado por la ecuación 6-3, puede obtenerse un factor de concentración de esfuerzos torsionantes. Un método análogo se usó para obtener los factores de concentración de esfuerzos en miembros axialmente cargados (Sección 3-3). Esos factores dependen sólo de la geometría de un miembro. Los factores de concentración de esfuerzos para varias proporciones de flechas redondas escalonadas se muestran en la figura 6-13.[9]

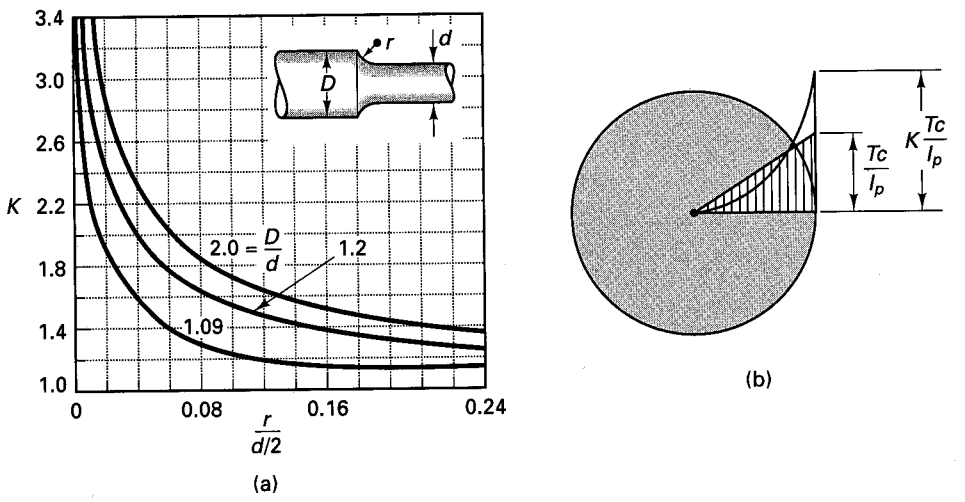


Fig. 6-13 (a) Factores de concentración de esfuerzos torsionales en flechas circulares de dos diámetros. (b) Incremento del esfuerzo en un filete.

[9]Esta figura está adaptada de un artículo por L. S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular and Variable Diameter", *Trans. ASME*, **47**, 1925, pág. 632.

Para obtener el esfuerzo real en una discontinuidad geométrica de una flecha escalonada, se selecciona una curva para una D/d particular en la figura 6-13. Luego, correspondiente a la razón $r/(d/2)$, se lee en la curva el factor K de concentración de esfuerzos. Finalmente, de la definición de K, se obtiene el esfuerzo cortante máximo real a partir del esfuerzo modificado dado por la ecuación 6-3:

$$\tau_{máx} = K\frac{Tc}{I_p} \tag{6-12}$$

donde el esfuerzo cortante Tc/I_p se determina para la flecha más pequeña.

Un estudio de los factores de concentraciones de esfuerzos mostrados en la figura 6-13 evidencia la necesidad de usar un filete de buen tamaño de radio r en todas las secciones donde se tiene una transición en el diámetro de la flecha.

Incrementos considerables de esfuerzos se tienen también en agujeros para aceite y en chaveteros para unir poleas y engranes a la flecha. Una flecha preparada para una chaveta, figura 6-14, deja de ser un miembro circular. Sin embargo, de acuerdo con los procedimientos sugeridos por la ASME, en el diseño ordinario, los cálculos de flechas con chaveteros pueden llevarse a cabo usando la ecuación 6-3 o la 6-8, pero el esfuerzo cortante permisible debe *reducirse* 25%. Esto compensa, presumiblemente, la concentración de esfuerzos, la reducción del área transversal y la carga cíclica.

Debido a la respuesta inelástica o no lineal en los materiales reales, por razones análogas a las señaladas en la Sección 3-3, las concentraciones teóricas de esfuerzos basadas en el comportamiento del material elástico lineal tienden a ser algo grandes.

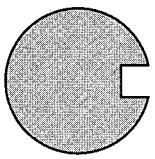


Fig. 6-14 Flecha circular con un chavetero.

6-8. Ángulo de torsión de miembros circulares

En esta sección veremos un método para determinar el ángulo de torsión en flechas *elásticas* circulares macizas y tubulares sometidas a carga torsionante. El interés en este problema es por lo menos triple. Primero, es importante predecir el giro de una flecha ya que a veces no es suficiente diseñar sólo por resistencia: las deformaciones no deben ser excesivas. Luego, las magnitudes de las rotaciones de las flechas se necesitan en el análisis de vibraciones torsionantes de maquinaria. Finalmente, la rotación torsionante de los miembros es necesaria al tratar con problemas estáticamente indeterminados de torsión.

De acuerdo con la hipótesis 1 establecida en la sección 6-3, los planos perpendiculares al eje de una barra circular no se alabean. Los elementos de una flecha experimentan deformaciones del tipo mostrado en la figura 6-15(b). El elemento sombreado se muestra en su forma no deformada en la figura 6-15(a). Para tal flecha, se muestra aislado un elemento típico de longitud dx en la figura 6-16 similar a la figura 6-3.

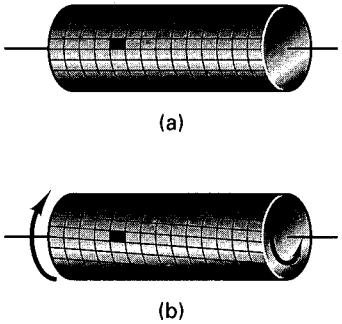


Fig. 6-15 Flecha circular (a) antes y (b) después de la aplicación del par de torsión.

En el elemento mostrado, una línea sobre su superficie como la CD es inicialmente paralela al eje de la flecha. Después de aplicado el par, ella toma una nueva posición CD'. Al mismo tiempo, en virtud de la hipótesis 2 de la sección 6-3, el radio OD permanece recto y gira un pequeño ángulo $d\phi$ hasta la nueva posición OD'.

Denotando el pequeño ángulo DCD' por $\gamma_{máx}$, se tienen por geometría dos expresiones alternativas para el arco DD':

$$\text{arco } DD' = \gamma_{máx}\, dx \qquad \text{o} \qquad \text{arco } DD' = d\phi\, c$$

donde ambos ángulos son pequeños y se miden en radianes. Por consiguiente,

$$\gamma_{máx}\, dx = d\phi\, c \tag{6-13}$$

El $\gamma_{máx}$ se aplica sólo en la zona de un "tubo" infinitesimal de esfuerzo cortante máximo constante $\tau_{máx}$. Considerando una respuesta elástica lineal, la ley de Hooke resulta aplicable. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 5-1, el ángulo $\gamma_{máx}$ es proporcional a $\tau_{máx}$ (es decir, $\gamma_{máx} = \tau_{máx}/G$). Además, por la ecuación 6-3, $\tau_{máx} = Tc/I_p$. Por consiguiente, $\gamma_{máx} = Tc/(I_pG)$.[10] Sustituyendo la última expresión en la ecuación 6-13 y simplificando, se obtiene la ecuación diferencial gobernante para el ángulo de torsión:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_pG} \qquad \text{o} \qquad d\phi = \frac{T\,dx}{I_pG} \tag{6-14}$$

Esto da el ángulo relativo de torsión de dos secciones adyacentes separadas una distancia infinitesimal dx. Para encontrar el ángulo total de giro ϕ entre dos secciones cualesquiera A y B sobre una flecha separadas una distancia finita, deben sumarse las rotaciones de todos los elementos. Por consiguiente, una expresión general para el ángulo de torsión entre dos secciones cualesquiera de una flecha de material elástico lineal es

$$\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T_x\, dx}{I_{px}G} \tag{6-15}$$

donde ϕ_B y ϕ_A son, respectivamente, las rotaciones globales de la flecha en los extremos B y A. La rotación en A no tiene que ser necesariamente igual a cero. En esta ecuación, el par de torsión interno T_x, el momento polar de inercia I_{px}, así como G, pueden variar a lo largo de la longitud de la flecha. En tales casos, $T_x = T(x)$, $I_{px} = I_p(x)$ y $G = G(x)$. El sentido del ángulo de giro ϕ coincide con el sentido del par de torsión aplicado T.

La ecuación 6-15 es válida para flechas macizas y huecas, lo que se infiere de las hipótesis usadas en su deducción. El ángulo ϕ se mide en radianes. Note la gran similitud de esta relación con la ecuación 3-3 para la deformación de barras axialmente. Los siguientes tres ejemplos ilustran aplicaciones de estos conceptos.

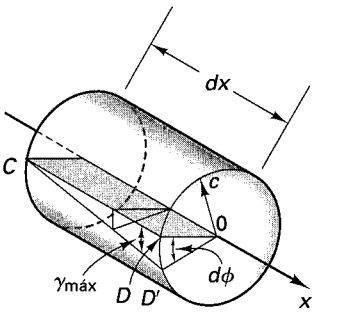


Fig. 6-16 Deformación de un elemento de barra circular debido a un par de torsión.

[10] El razonamiento anterior puede llevarse a cabo en términos de cualquier γ, que progresivamente se vuelve más pequeña cuando se acerca al eje de la barra. La única diferencia en la deducción consiste en tomar un arco correspondiente a DD' a una distancia ρ desde el centro de la flecha y usar $T\rho/I_p$ en vez de Tc/I_p para τ.

Ejemplo 6-6

Encuentre la rotación relativa de la sección *B-B* con respecto a la sección *A-A* de la flecha elástica maciza mostrada en la figura 6-17 cuando se transmite por ella un par de torsión constante T. El momento polar de inercia de su sección transversal I_p es constante.

SOLUCIÓN

En este caso, $T_x = T$ e I_p es constante; por tanto, de la ecuación 6-15,

$$\phi = \int_A^B \frac{T_x\, dx}{I_p G} = \int_O^L \frac{T\, dx}{I_p G} = \frac{T}{I_p G}\int_O^L dx = \frac{TL}{I_p G}$$

Es decir,

$$\boxed{\phi = \frac{TL}{I_p G}} \qquad (6\text{-}16)$$

Al aplicar la ecuación 6-16 nótese particularmente que el ángulo ϕ se expresa en *radianes*. Obsérvese también la gran similitud de esta relación con la ecuación 3-4, $\Delta = PL/AE$, para barras cargadas axialmente. Aquí, $\phi \Leftrightarrow \Delta$, $T \Leftrightarrow P$, $I_p \Leftrightarrow A$ y $G \Leftrightarrow E$. Análogamente a la ecuación 3-4, la ecuación 6-16 puede reescribirse para expresar la *constante torsionante del resorte* o *rigidez torsionante* k_t como

$$\boxed{k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{I_p G}{L}} \left[\frac{\text{in-lb}}{\text{rad}}\right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}}\right] \qquad (6\text{-}17)$$

Esta constante representa el par de torsión requerido para generar una rotación de 1 radián (es decir, $\phi = 1$). Depende sólo de las propiedades del material y del tamaño del miembro. Igual que para barras cargadas axialmente, los miembros sometidos a torsión pueden visualizarse como resortes; véase la figura 6-18.

El recíproco de k_t define la *flexibilidad torsionante* f_t. Por tanto, para una flecha circular maciza o hueca,

$$f_t = \frac{1}{k_t} = \frac{L}{I_P G}\left[\frac{\text{rad}}{\text{in-lb}}\right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{N}\cdot\text{m}}\right] \qquad (6\text{-}18)$$

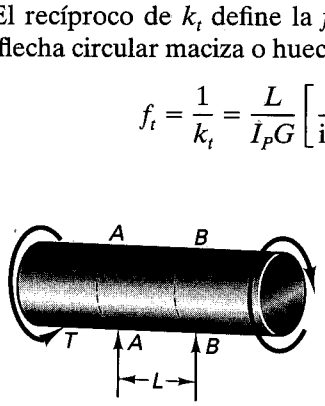


Fig. 6-17

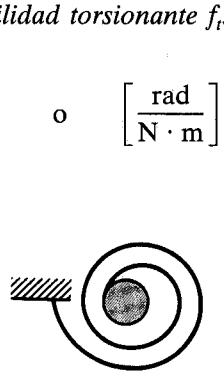


Fig. 6-18 Representación esquemática de un resorte de torsión.

Esta constante define la rotación resultante de la aplicación de un par de torsión unitario (es decir, $T = 1$). Al multiplicarla por el par de torsión T, se obtiene la ecuación 6-16.

Si en el análisis una flecha debe subdividirse en varias regiones, deben adscribirse subíndices apropiados identificadores a las definiciones dadas por las ecuaciones 6-17 y 6-18. Por ejemplo, para el i-ésimo segmento de una barra, puede escribirse $(k_t)_i = I_p G_i / L_i$ y $(f_t)_i = L_i / I_p G_i$.

Las ecuaciones previas son ampliamente usadas en el análisis de vibraciones mecánicas de flechas de transmisión, incluidos los cigüeñales.[11] Esas ecuaciones son útiles también para resolver problemas estáticamente indeterminados, que serán considerados en la próxima sección. Esas ecuaciones se requieren en el diseño de miembros por rigidez torsionante cuando es esencial limitar la cantidad de rotación torsionante. Para tales aplicaciones, note que I_p en vez de I_p/c, usado en el cálculo de resistencia, es el parámetro gobernante. En problemas de barras cargadas axialmente, el área A de la sección transversal sirve para ambos propósitos.

Finalmente, debe notarse que como en una prueba de torsión ϕ, T, L e I_p pueden medirse o calcularse a partir de las dimensiones de la probeta, el módulo de elasticidad por cortante para aquélla puede determinarse con la ecuación 6-16 ya que $G = TL/I_p \phi$.

Ejemplo 6-7

Considere la flecha escalonada mostrada en la figura 6-19(a) unida rígidamente a un muro en E y determine el ángulo de torsión en el extremo A cuando se aplican los dos pares de torsión en B y D. Suponga un módulo de cortante $G = 80$ GPa, que es un valor típico para los aceros.

SOLUCIÓN

Excepto por la diferencia en parámetros, la solución de este problema es muy similar a la del ejemplo 3-2 para una barra cargada axialmente. Primero, el par de torsión en E se determina para asegurar el equilibrio. Luego se examinan pares de torsión en secciones arbitrarias, aislando el segmento *izquierdo* de una flecha, como el mostrado en la figura 6-19(b). Si el sentido del vector par de torsión T coincide con el del eje x positivo, se toma como positivo o viceversa. Esto conduce a la conclusión de que entre A y B no hay par de torsión, mientras que entre B y D el par es + 150 N·m. El par entre D y E es +1150 N·m. El diagrama de par torsionante está dibujado en la figura 6-19(c). Los pares de torsión internos, identificados por subíndices para los varios segmentos de flecha, son

$$T_{AB} = 0, T_{BD} = T_{BC} = T_{CD} = 150 \text{ N} \cdot \text{m}, \text{y } T_{DE} = 1150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

[11] Según S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 2a. ed., Nueva York: Van Nostrand, 1937, en 1902, H. Frahm –un ingeniero alemán– fue el primero en reconocer y estudiar este importante problema.

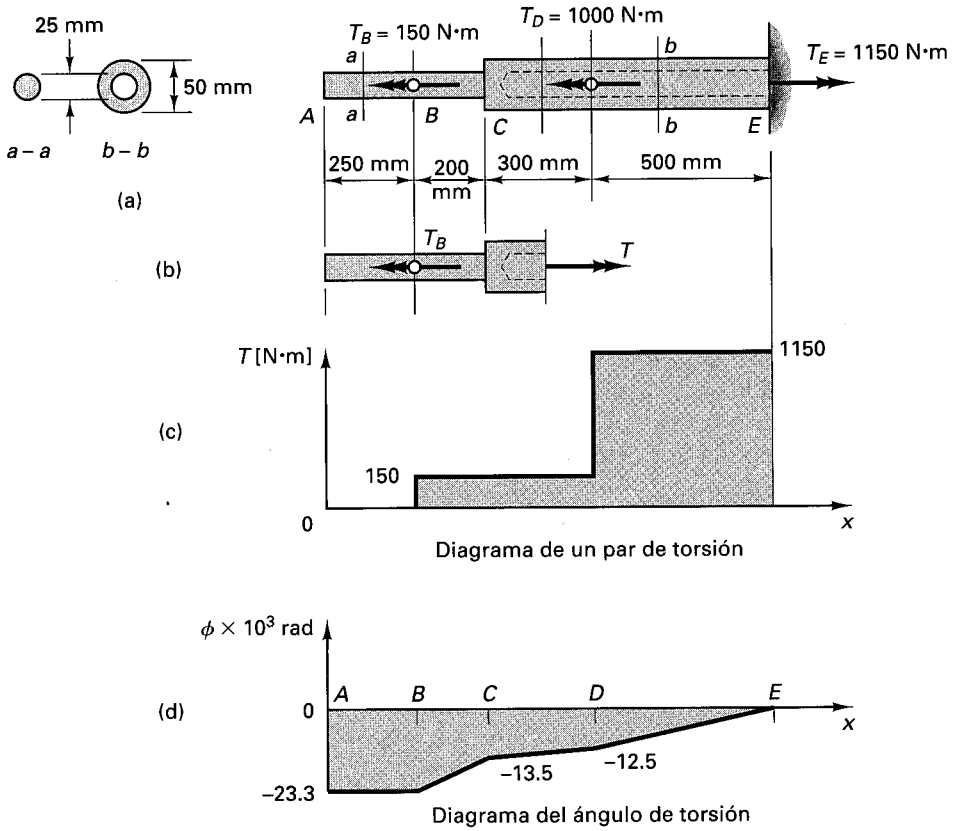


Fig. 6-19

Los momentos polares de inercia para los dos tipos de secciones transversales que ocurren en este problema se encuentran usando las ecuaciones 6-2 y 6-5; se obtiene

$$(I_p)_{AB} = (I_p)_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 25^4}{32} = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_p)_{CD} = (I_p)_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_0^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Para encontrar el ángulo de torsión del extremo A, se aplica la ecuación 6-15 a cada segmento y los resultados se suman. Los límites de integración para los segmentos ocurren en puntos donde los valores de T o I_p cambian abruptamente.

$$\phi = \int_A^E \frac{T_x\, dx}{I_{px} G} = \int_A^B \frac{T_{AB}\, dx}{(I_p)_{AB} G} + \int_B^C \frac{T_{BC}\, dx}{(I_p)_{BC} G} + \int_C^D \frac{T_{CD}\, dx}{(I_p)_{CD} G} + \int_D^E \frac{T_{DE}\, dx}{(I_p)_{DE} G}$$

En el último grupo de integrales las T e I_p son constantes entre los límites considerados, de modo que cada integral conduce a una solución conocida, dada por la ecuación 6-16. Por lo tanto,

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G_i} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{(I_p)_{AB}G} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{(I_p)_{BC}G} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{(I_p)_{CD}G} + \frac{T_{DE}L_{DE}}{(I_p)_{DE}G}$$

$$= 0 + \frac{150 \times 10^3 \times 200}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{150 \times 10^3 \times 300}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{1150 \times 10^3 \times 500}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3}$$

$$= 0 + 9.8 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} + 12.5 \times 10^{-3} = 23.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Como puede verse en las ecuaciones precedentes, los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha comenzando por la izquierda son, 0 rad, 9.8×10^{-3} rad, 1.0×10^{-3} rad, y 12.5×10^{-3}. Sumando estas cantidades, comenzando en A, para obtener la función para el ángulo de torsión a lo largo de la flecha, nos da la línea quebrada de A a E, mostrada en la figura 6-19(d). Como no puede ocurrir torsión en el extremo empotrado E, esta función debe ser cero en E, como lo requiere la condición de frontera. Por lo tanto, de acuerdo con la convención de signos adoptada, el ángulo de torsión en A es de -23.3×10^{-3} rad en el sentido de los pares de torsión aplicados.

Sin duda ocurren perturbaciones locales en los esfuerzos y deformaciones unitarias en las posiciones de los pares de torsión concentrados y en los cambios de tamaño de la flecha, así como en el extremo empotrado. Sin embargo, esos son efectos locales que tienen influencia limitada sobre el comportamiento global de la flecha.

Ejemplo 6-8

Determine la rigidez torsionante k_τ del buje de hule mostrado en la figura 6-20. Suponga que el hule está adherido a la flecha de acero y al tubo exterior también de acero que está unido al bastidor de una máquina. El módulo cortante del hule es G. No tome en cuenta las deformaciones en las partes metálicas del conjunto.

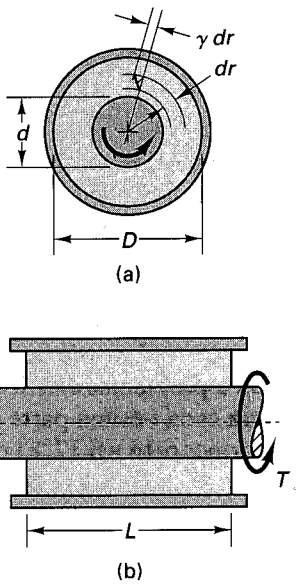


Fig. 6-20

SOLUCIÓN

Debido a la simetría axial del problema, sobre cada superficie cilíndrica imaginaria de hule de radio r, el par de torsión aplicado T es resistido por esfuerzos cortantes constantes τ. El área de la superficie imaginaria es $2\pi rL$. Con base en esto, la ecuación de equilibrio para el par de torsión aplicado T y el par de torsión resistente desarrollado por los esfuerzos cortantes τ actuando en un radio r es

$$T = (2\pi rL)\tau r \qquad [\text{área} \times \text{esfuerzo} \times \text{brazo}]$$

De esta relación, $\tau = T/2\pi r^2 L$. Por consiguiente, usando la ley de Hooke, dada por la ecuación 5-1, la deformación unitaria cortante γ puede determinarse para un tubo infinitesimal de radio r y espesor dr, figura 6-20(a), de las relaciones siguientes:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{2\pi LGr^2}$$

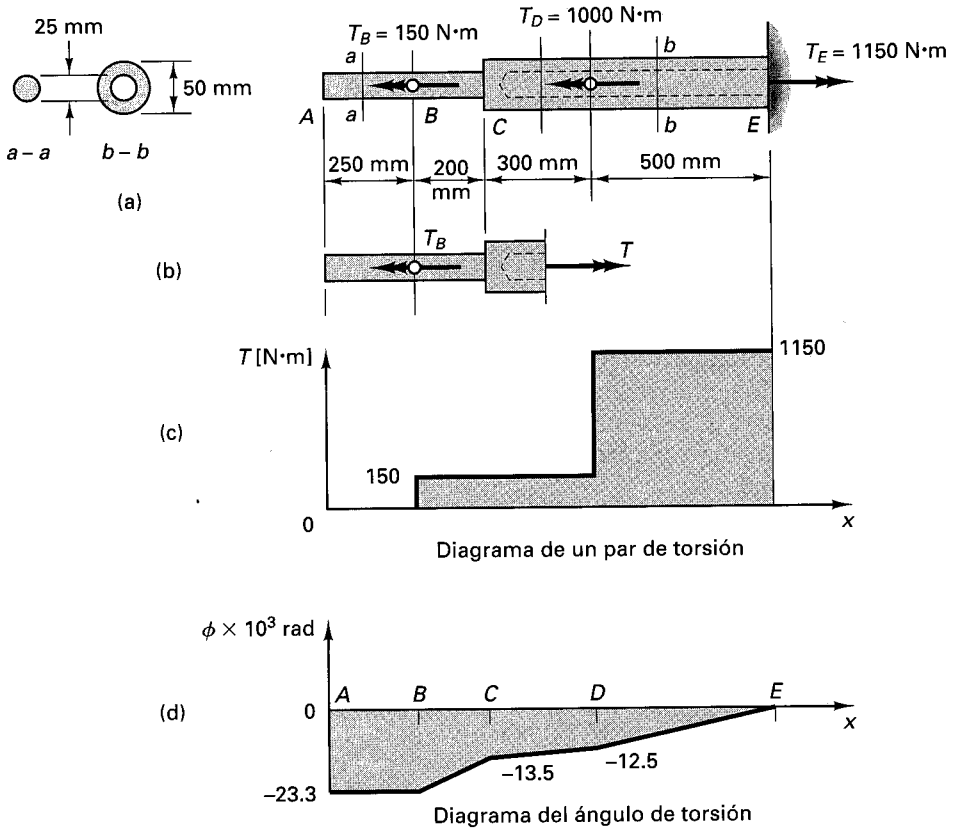


Fig. 6-19

Los momentos polares de inercia para los dos tipos de secciones transversales que ocurren en este problema se encuentran usando las ecuaciones 6-2 y 6-5; se obtiene

$$(I_p)_{AB} = (I_p)_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 25^4}{32} = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_p)_{CD} = (I_p)_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_0^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Para encontrar el ángulo de torsión del extremo A, se aplica la ecuación 6-15 a cada segmento y los resultados se suman. Los límites de integración para los segmentos ocurren en puntos donde los valores de T o I_p cambian abruptamente.

$$\phi = \int_A^E \frac{T_x\,dx}{I_{px}G} = \int_A^B \frac{T_{AB}\,dx}{(I_p)_{AB}G} + \int_B^C \frac{T_{BC}\,dx}{(I_p)_{BC}G} + \int_C^D \frac{T_{CD}\,dx}{(I_p)_{CD}G} + \int_D^E \frac{T_{DE}\,dx}{(I_p)_{DE}G}$$

En el último grupo de integrales las T e I_p son constantes entre los límites considerados, de modo que cada integral conduce a una solución conocida, dada por la ecuación 6-16. Por lo tanto,

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G_i} = \frac{T_{AB}L_{AB}}{(I_p)_{AB}G} + \frac{T_{BC}L_{BC}}{(I_p)_{BC}G} + \frac{T_{CD}L_{CD}}{(I_p)_{CD}G} + \frac{T_{DE}L_{DE}}{(I_p)_{DE}G}$$

$$= 0 + \frac{150 \times 10^3 \times 200}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{150 \times 10^3 \times 300}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3}$$

$$+ \frac{1150 \times 10^3 \times 500}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3}$$

$$= 0 + 9.8 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} + 12.5 \times 10^{-3} = 23.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Como puede verse en las ecuaciones precedentes, los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha comenzando por la izquierda son, 0 rad, 9.8×10^{-3} rad, 1.0×10^{-3} rad, y 12.5×10^{-3}. Sumando estas cantidades, comenzando en A, para obtener la función para el ángulo de torsión a lo largo de la flecha, nos da la línea quebrada de A a E, mostrada en la figura 6-19(d). Como no puede ocurrir torsión en el extremo empotrado E, esta función debe ser cero en E, como lo requiere la condición de frontera. Por lo tanto, de acuerdo con la convención de signos adoptada, el ángulo de torsión en A es de -23.3×10^{-3} rad en el sentido de los pares de torsión aplicados.

Sin duda ocurren perturbaciones locales en los esfuerzos y deformaciones unitarias en las posiciones de los pares de torsión concentrados y en los cambios de tamaño de la flecha, así como en el extremo empotrado. Sin embargo, esos son efectos locales que tienen influencia limitada sobre el comportamiento global de la flecha.

Ejemplo 6-8

Determine la rigidez torsionante k_τ del buje de hule mostrado en la figura 6-20. Suponga que el hule está adherido a la flecha de acero y al tubo exterior también de acero que está unido al bastidor de una máquina. El módulo cortante del hule es G. No tome en cuenta las deformaciones en las partes metálicas del conjunto.

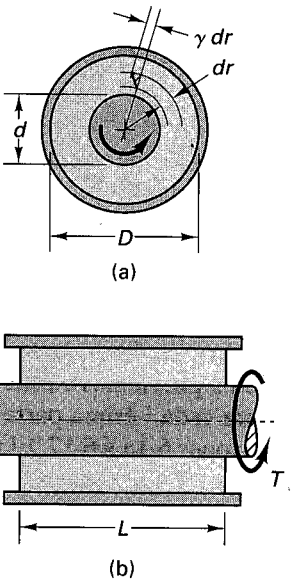


Fig. 6-20

SOLUCIÓN

Debido a la simetría axial del problema, sobre cada superficie cilíndrica imaginaria de hule de radio r, el par de torsión aplicado T es resistido por esfuerzos cortantes constantes τ. El área de la superficie imaginaria es $2\pi rL$. Con base en esto, la ecuación de equilibrio para el par de torsión aplicado T y el par de torsión resistente desarrollado por los esfuerzos cortantes τ actuando en un radio r es

$$T = (2\pi rL)\tau r \qquad [\text{área} \times \text{esfuerzo} \times \text{brazo}]$$

De esta relación, $\tau = T/2\pi r^2 L$. Por consiguiente, usando la ley de Hooke, dada por la ecuación 5-1, la deformación unitaria cortante γ puede determinarse para un tubo infinitesimal de radio r y espesor dr, figura 6-20(a), de las relaciones siguientes:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{2\pi LGr^2}$$

Esta deformación unitaria cortante en un tubo infinitesimal permite que la flecha gire un ángulo infinitesimal $d\phi$. Como en el límite $r + dr$ es igual a r, la magnitud de este ángulo es

$$d\phi = \frac{\gamma\, dr}{r}$$

La rotación total ϕ de la flecha es una integral, sobre el buje de hule, de esas rotaciones infinitesimales; es decir,

$$\phi = \int d\phi = \frac{T}{2\pi LG}\int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{T}{\pi LG}\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2}\right)$$

de donde

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{\pi LG}{1/d^2 - 1/D^2} \tag{6-19}$$

6-9. Problemas estáticamente indeterminados

El análisis de miembros estáticamente indeterminados sometidos a torsión es análogo al procedimiento analizado antes en el capítulo 3 en conexión con barras cargadas axialmente. Al considerar problemas *linealmente elásticos* con *un* grado de indeterminación *externa* (es decir, casos donde se tienen dos reacciones), el método de las *fuerzas* (flexibilidades) es particularmente apropiado. Tales problemas se reducen a estáticamente determinados retirando una de las reacciones redundantes y calculando la rotación ϕ_0 en el soporte liberado. Las condiciones requeridas de frontera son entonces restauradas torciendo el miembro en el extremo liberado un ángulo ϕ_1 tal que

$$\phi_0 + \phi_1 = 0 \tag{6-20}$$

Tales problemas son sencillos de analizar sin importar el número y tipo de pares de torsión aplicados o variaciones en el tamaño del eje o material.

Los problemas de torsión también ocurren con indeterminación estática *interna* en flechas compuestas formadas de dos o más tubos o materiales, como se muestra en la figura 6-6. En tales casos, el ángulo de torsión ϕ es el mismo para cada parte constituyente del miembro. Por tanto, el método de los *desplazamientos* (rigideces) es particularmente simple en su aplicación a problemas elásticos lineales. En tales problemas, el par de torsión T_i para cada i-ésima parte de las flechas es $T_i = (k_t)\phi_i$, de acuerdo con las ecuaciones 6-16 y 6-17. El par de torsión total aplicado T es entonces la suma de n partes; es decir,

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} (k_t)_i \phi_i \tag{6-21}$$

Para problemas elásticos complejos *externamente* estáticamente indeterminados con varios grados de libertad cinemáticos, puede usarse el método general de los desplazamientos, similar al dado en la sección 4-6. Sin embargo, aquí el análisis se limitará al caso de *un sólo grado de libertad.* Estos casos pueden analizarse usando el procedimiento descrito en la sección 4-6. Aplicando este enfoque a la flecha en la figura 6-21, pueden escribirse las dos siguientes ecuaciones básicas:

Por equilibrio global:

$$T_1 + T_2 + T = 0 \tag{6-22}$$

Por compatibilidad geométrica:

$$\phi_{AB} = \phi_{BC} \tag{6-23}$$

donde ϕ_{AB} y ϕ_{BC} son, respectivamente, las torsiones en B de los segmentos de barra AB y BC, suponiendo que los extremos A y C están fijos.

De acuerdo con la ecuación 6-16, para comportamiento linealmente *elástico*, la ecuación 6-23 toma la forma

$$\frac{T_1 L_1}{(I_p)_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{(I_p)_2 G_2} \tag{6-24}$$

donde los módulos de rigidez están dados como G_1 y G_2 para tomar en cuenta la posibilidad de tener materiales diferentes en las dos partes de la flecha.

Las soluciones para problemas *inelásticos* estáticamente indeterminados de un grado de libertad, se obtienen siguiendo el procedimiento dado en el ejemplo 4-7 para barras cargadas axialmente.

Los procedimientos previos pueden aplicarse al análisis de barras estáticamente indeterminadas con secciones diferentes a las circulares, como las vistas en las secciones 6-14 y 6-16.

Se da a continuación un ejemplo del método de las fuerzas para un problema elástico estáticamente indeterminado.

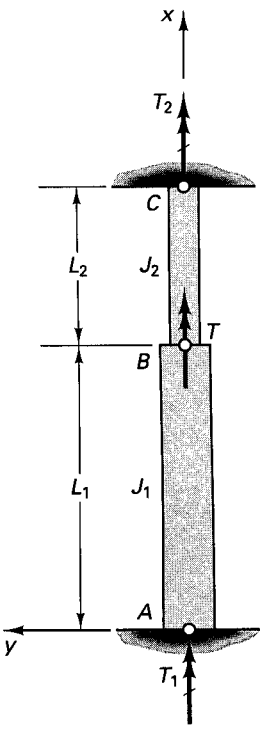


Fig. 6-21 Barra en torsión externamente estáticamente indeterminada.

Ejemplo 6-9

Suponga que la flecha escalonada del ejemplo 6-7 está cargada de la misma manera que antes pero que ahora está empotrada en ambos extremos, como se muestra en la figura 6-22. Determine las reacciones en los extremos y dibuje el diagrama de par de torsión de la flecha. Aplique el método de las fuerzas.

SOLUCIÓN

Hay dos reacciones desconocidas, T_A y T_E. Una de ellas puede considerarse como redundante y, arbitrariamente, retiramos la reacción T_A. Esto conduce al diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6-22(b). La solución del ejemplo 6-7 da la rotación del extremo $\phi_0 = 23.3 \times 10^{-3}$ radianes.

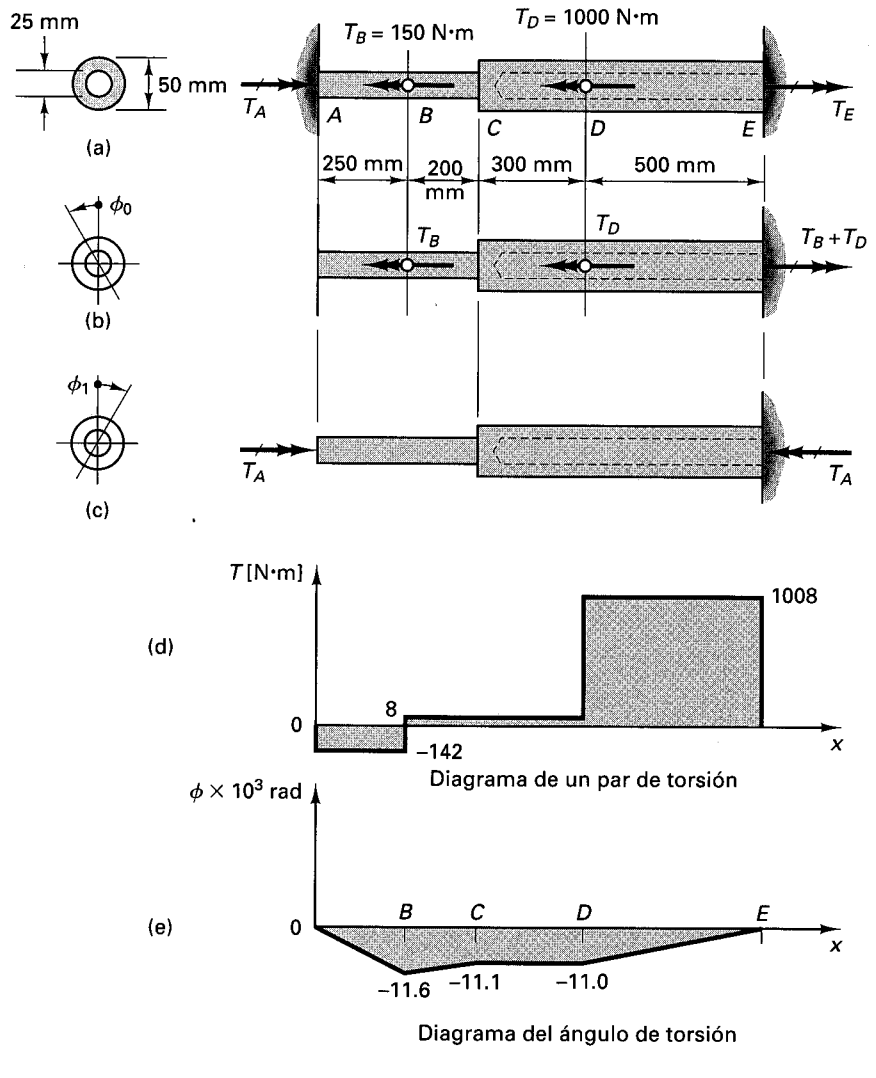


Fig. 6-22

Del ejemplo 6-7, $(I_p)_{AC} = 38.3 \times 10^3$ mm^2 e $(I_p)_{CE} = 575 \times 10^3$ mm^2. Aplicando T_A a la barra *descargada*. como se muestra en la figura 6-22(c), la rotación ϕ_1 en el extremo A se encuentra usando la ecuación 6-16.

$$\phi_1 = \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G_i}$$

$$= T_A \times 10^3 \left(\frac{450}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{800}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \right)$$

$$= (147 \times 10^{-6} + 17 \times 10^{-6}) T_A = 164 \times 10^{-6} T_A \text{ rad}$$

donde T_A tiene las unidades de N·m.

Usando la ecuación 6-20 y definiendo la rotación en el sentido de T_A como positiva, se tiene

$$-23.3 \times 10^{-3} + 164 \times 10^{-6} T_A = 0$$

Por consiguiente,

$$T_A = 142 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad \text{y} \qquad T_B = 1150 - 142 = 1008 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El diagrama de par torsionante para la flecha se muestra en la figura 6-22(d). Igual que en la figura 6-19(c) del ejemplo 6-7, si el sentido del vector par de torsión interno T sobre la parte *izquierda* de un segmento aislado de flecha coincide con el del eje x positivo, el vector se considera como positivo. Nótese que la mayor parte del par aplicado es resistido en el extremo E. Como la flecha de A a C es más flexible que de C a E, sólo un pequeño par se desarrolla en A.

Calculando los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha, como en el ejemplo 6-7, puede obtenerse el diagrama de ángulo de torsión a lo largo de la flecha, dado en la figura 6-22(e). (La verificación de este diagrama se deja como ejercicio al lector.) El ángulo de torsión en A y E *debe ser cero por las condiciones de frontera prescritas*. Como es de esperarse, la flecha gira en el sentido de los pares aplicados.

Aunque el problema es indeterminado sólo de primer grado, tiene tres grados de libertad cinemáticos. Dos de ellos están asociados con los pares aplicados y uno con el cambio en el tamaño de la flecha. Por lo tanto, la aplicación del método de los desplazamientos sería más complicado, requiriendo la resolución de tres ecuaciones simultáneas.

6-10. Enfoque alternativo de la ecuación diferencial para problemas de torsión

Para una $I_p G$ constante, la ecuación 6-14 puede reescribirse en forma de una ecuación diferencial de segundo orden. Antes de hacer esto, consideremos el elemento mostrado en la figura 6-23 sometido a los pares de torsión extremos T y $T + dT$ y a un par de torsión t_x distribuido con las unidades de lb-in/in o N·m/m. Usando la regla de la mano derecha para los pares, todas esas cantidades se muestran en la figura con sentido positivo. Por equilibrio de este elemento infinitesimal,

$$t_x\, dx + dT = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dT}{dx} = -t_x \tag{6-25}$$

Al diferenciar la ecuación 6-14 con respecto a x, tenemos

$$\boxed{I_p G \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -t_x} \tag{6-26}$$

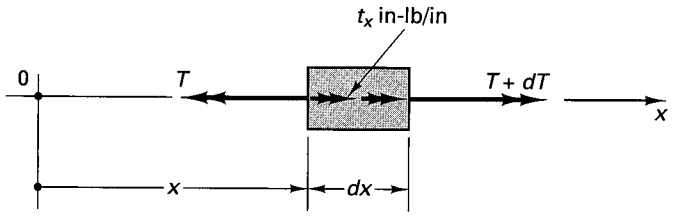


Fig. 6-23 Elemento infinitesimal de una barra circular sometida a un par de torsión.

Las constantes que aparecen en la solución de esta ecuación diferencial se determinan a partir de las condiciones de frontera en los extremos de una flecha y la rotación ϕ o bien el par de torsión T debe ser especificado. Las condiciones de rotación en la frontera para ϕ deben ser evidentes del enunciado del problema, mientras que aquellas para el par de torsión T se obtienen de la ecuación 4-14 ya que $T = I_p G d\phi/dx$.

La ecuación 6-26 puede usarse para la solución de problemas estáticamente determinados e indeterminados. Usando las funciones de singularidad vistas en la Sección 6-16, esta ecuación puede usarse para problemas con momentos concentrados.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la ecuación 6-26 cuando el par de torsión aplicado es una función continua.

Ejemplo 6-10

Considere una barra circular elástica con $I_p G$ constante sometida a un par de torsión t_x uniformemente variable, como se muestra en la figura 6-24. Determine la rotación de la barra a lo largo de su longitud y las reacciones en los extremos A y B para dos casos: (a) Suponga que el extremo A es libre y que el extremo B está empotrado, y (b) suponga que ambos extremos de la barra están empotrados.

SOLUCIÓN

(a) Integrando la ecuación 6-26 dos veces y determinando las constantes de integración C_1 y C_2 a partir de las condiciones de frontera, la solución requerida queda determinada.

$$I_p G \frac{d^2\phi}{dx^2} = -t_x = \frac{x}{L} t_o$$

$$I_p G \frac{d\phi}{dx} = T = \frac{-t_o x^2}{2L} + C_1$$

$$T_A = T(0) = 0 \qquad \text{por tanto, } C_1 = 0$$

$$T_B = T(L) = -\frac{t_o L}{2}$$

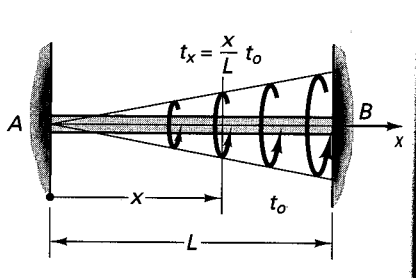


Fig. 6-24

$$I_p G\phi = -\frac{t_o x^3}{6L} + C_2$$

$$\phi_B = \phi(L) = 0 \qquad \text{por tanto, } C_2 = \frac{t_o L^2}{6}$$

$$I_p G\phi = \frac{t_o L^2}{6} - \frac{t_o x^3}{6L}$$

El signo negativo de T_B significa que el vector par de torsión actúa con sentido opuesto al del eje x positivo.

(b) Excepto por el cambio en las condiciones de frontera, el procedimiento de solución es el mismo que en la parte (a).

$$I_p G \frac{d^2\phi}{dx^2} = -t_x = -\frac{x}{L} t_o$$

$$I_p G \frac{d\phi}{dx} = T = -\frac{t_o x^2}{2L} + C_1$$

$$I_p G\phi = -\frac{t_o x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$\phi_A = \phi(0) = 0 \qquad \text{por tanto, } C_2 = 0$$

$$\phi_B = \phi(L) = 0 \qquad \text{por tanto, } C_1 = \frac{t_o L}{6}$$

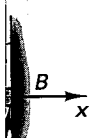
$$I_p G\phi = \frac{t_o L x}{6} - \frac{t_o x^3}{6L}$$

$$T_A = T(0) = \frac{t_o L}{6}$$

$$T_B = T(L) = -\frac{t_o L}{2} + \frac{t_o L}{6} = -\frac{t_o L}{3}$$

6-11. Energía y cargas de impacto

Los conceptos de energía de deformación elástica y cargas de impacto estudiados en las Secciones 3-5 y 3-6 para miembros cargados axialmente, así como aquellos de la Sección 5-3 para cortante puro, se transfieren directamente al problema de la torsión. Por ejemplo, la deflexión de un miembro puede determinarse igualando la energía interna de deformación cortante U_{sh} de un miembro con el trabajo externo W_e debido a la fuerza aplicada (Ec. 3-16). Este concepto puede aplicarse a problemas estáticos (Ejemplo 3-9) así como a las soluciones elementales de problemas de dinámica.



Ejemplo 6-11

(a) Encuentre la energía absorbida por una flecha circular elástica sometida a un par de torsión constante en términos del esfuerzo cortante máximo y del volumen del material; véase la figura 6-25. (b) Encuentre la rotación del extremo de una flecha circular elástica con respecto al extremo empotrado cuando se aplica un par de torsión T en el extremo libre.

SOLUCIÓN

(a) El esfuerzo cortante en una flecha circular elástica sometida a un par de torsión varía linealmente desde el eje longitudinal. Por consiguiente, el esfuerzo cortante que actúa sobre un elemento a una distancia ρ desde el centro de la sección transversal es $\tau_{máx}\rho/c$. Entonces, usando la ecuación 5-5 e integrando sobre el volumen de la barra de longitud L, se obtiene

$$U_{sh} = \int_V \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_V \frac{\tau_{máx}^2\rho^2}{2Gc^2}\,2\pi\rho\,d\rho\,L$$

$$= \frac{\tau_{máx}^2}{2G}\frac{2\pi L}{c^2}\int_0^c \rho^3\,d\rho = \frac{\tau_{máx}^2}{2G}\frac{2\pi L}{c^2}\frac{c^4}{4}$$

$$= \frac{\tau_{máx}^2}{2G}\left(\frac{1}{2}\,\text{vol}\right)$$

Si los esfuerzos cortantes fuesen uniformes en todo el miembro, se obtendría un arreglo más eficiente para absorber energía. Los bujes de hule (Ejemplo 6-8) con sus pequeños valores de G proporcionan un dispositivo excelente para absorber en una flecha los pares de impacto.

(b) Si el par de torsión T es gradualmente aplicado a la flecha, el trabajo externo $W_e = \frac{1}{2}T\phi$, donde ϕ es la rotación del extremo libre en radianes. La expresión para la energía interna de deformación U_{sh} que se encontró en el

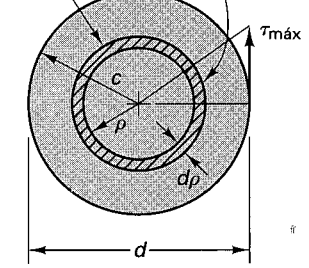


Fig. 6-25

inciso (a), puede escribirse en forma más conveniente notando que $\tau_{máx} = Tc/I_p$, el volumen de la barra $= \pi c^2 L$ e $I_p = \pi c^4/2$. Entonces,

$$U_{sh} = \frac{\tau_{máx}^2}{2G}\left(\frac{1}{2}\text{vol}\right) = \frac{T^2c^2}{2I_p^2G}\frac{1}{2}\pi c^2 L = \frac{T^2L}{2I_pG}$$

De $W_e = U_{sh}$,

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{T^2L}{2I_pG} \qquad \text{y} \qquad \phi = \frac{TL}{I_pG}$$

que es la misma que la ecuación 6-16.

6-12. Coples de ejes o flechas

Suelen tenerse situaciones en que las longitudes disponibles de las flechas no son suficientemente largas. Igualmente, por razones de mantenimiento o ensamble, es a menudo deseable formar una flecha a base de varias piezas menores. Para unir entre sí las piezas de una flecha, se usan los coples con bridas del tipo mostrado en la figura 6-26. Cuando se atornillan entre sí, dichos coples se denominan *rígidos*, para diferenciarlos de otro tipo denominado *flexible* que toma en cuenta los desalineamientos de flechas adyacentes. Este último tipo es casi universalmente usado para unir la flecha de un motor con el equipo impulsado. Aquí consideraremos sólo los coples tipo rígido. Para el otro tipo, se refiere al lector a textos sobre diseño de máquinas y a los catálogos de los fabricantes.

En los coples rígidos es usual suponer que las deformaciones unitarias cortantes en los tornillos varían directamente (linealmente) con sus distancias desde el eje de la flecha. La fricción entre las bridas se desprecia. Por tanto, de forma análoga al problema de la torsión en flechas circulares, si los tornillos están hechos del mismo material, los *esfuerzos* cortantes elásticos en los tornillos también varían linealmente con sus respectivas distancias desde el centro de un cople. Se supone que el esfuerzo cortante en

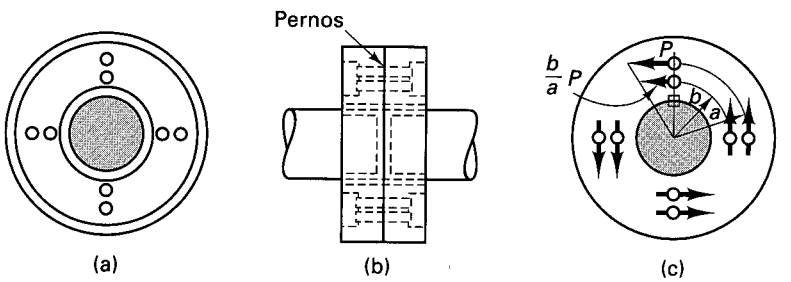


Fig. 6-26 Coples con bridas para flechas.

cualquier tornillo es *uniforme* y que está gobernado por la distancia de su centro al centro del cople. Entonces, si el esfuerzo cortante en un tornillo se multiplica por su área transversal, se encuentra la fuerza en el tornillo. Por ejemplo, para tornillos de *igual tamaño* en dos "círculos de tornillos", las fuerzas sobre los tornillos localizados por los radios respectivos a y b, son como se muestran en la figura 6-26(c). El momento de las fuerzas desarrollado por los tornillos respecto al eje de una flecha da la capacidad por par de torsión de un cople.

El razonamiento previo es el mismo que el aplicado al deducir la fórmula de la torsión para flechas circulares, excepto que, en vez de una sección transversal continua, se considera un número discreto de puntos. Este es un análisis crudo ya que indudablemente se tienen presentes concentraciones de esfuerzos en los puntos de contacto de los tornillos con las bridas de un cople.

El método delineado de análisis es válido sólo en el caso de un cople en el que los tornillos trabajan principalmente en cortante. Sin embargo, en algunos coples, los tornillos son apretados tan fuertemente que el cople trabaja de diferente manera. La tensión inicial en los tornillos es suficientemente grande para causar que todo el cople trabaje en fricción. Bajo esas circunstancias, el análisis sugerido no es válido o es válido sólo como una medida de la resistencia última del cople en caso de que los esfuerzos en los tornillos se reduzcan. Sin embargo, si se usan tornillos de alta resistencia, habrá poco peligro de que esto suceda y la resistencia del cople puede ser mayor que si los tornillos tuviesen que trabajar en cortante.[12]

Ejemplo 6-12

Estime la capacidad por par de torsión de un cople de acero forjado integralmente con la flecha, mostrado en la figura 6-27, si el criterio gobernante es el esfuerzo cortante permisible de 40 MPa en los ocho pernos. El círculo de pernos tiene un diámetro de 240 mm.

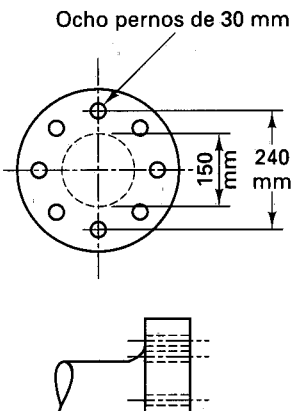


Fig. 6-27

SOLUCIÓN

Área de un perno:

$$A = (1/4)\pi(30)^2 = 706 \text{ mm}^2$$

Fuerza permisible en un perno:

$$P_{\text{perm}} = A\tau_{\text{perm}} = 706 \times 40 = 28.2 \times 10^3 \text{ N}$$

Como se tienen ocho pernos a una distancia de 120 mm desde el eje,

$$T_{\text{perm}} = 28.2 \times 10^3 \times 120 \times 8 = 27.1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 27.1 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

[12]Véase "Symposium on High-Strength Bolts", Parte I, por L. T. Wyly y Parte II por E. J. Ruble, *Proc. AISC*, 1950. Véase también la Sección 1-8.

Parte B TORSIÓN DE BARRAS CIRCULARES INELÁSTICAS

6-13. Esfuerzos y deformaciones cortantes en flechas circulares en el rango inelástico

La fórmula de la torsión para secciones circulares deducida antes, se basa en la ley de Hooke. Por tanto, se aplica sólo hasta el punto en que el límite proporcional de un material en cortante es alcanzado en el anillo exterior de una flecha. La solución se ampliará ahora para incluir el comportamiento inelástico del material. Igual que antes, deben satisfacerse los requisitos de equilibrio en una sección. La hipótesis de una variación lineal de la deformación unitaria desde el eje sigue siendo aplicable. Sólo la diferencia en las propiedades del material afectan la solución.

En la figura 6-28(a) se muestra una sección transversal de una flecha. La variación lineal de la deformación unitaria se muestra esquemáticamente en la misma figura. Algunas posibles propiedades mecánicas de los materiales en cortante, obtenidas, por ejemplo, en experimentos con tubos delgados en torsión, se muestran en las figuras 6-28(b), (c) y (d). La distribución correspondiente del esfuerzo cortante se muestra a la derecha en cada caso. Los esfuerzos se determinan a partir de las deformaciones unitarias. Por ejemplo, si la deformación unitaria cortante es a en un anillo interior, figura 6-28(a), el esfuerzo correspondiente se encuentra del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Este procedimiento es aplicable a flechas macizas así como a flechas integrales hechas de tubos concéntricos de diferentes materiales, siempre que los correspondientes diagramas esfuerzo-deformación unitaria sean usados. La deducción para un material elástico lineal es simplemente un caso especial de este enfoque.

Una vez conocida la distribución del esfuerzo, el par de torsión T generado por esos esfuerzos se encuentra igual que antes; es decir,

$$T = \int_A (\tau \, dA)\rho \qquad (6\text{-}27)$$

Esta integral debe evaluarse sobre toda el área de la sección transversal de la flecha.

Aunque la distribución del esfuerzo cortante después que se excede el límite elástico no es lineal y la ecuación 6-3 para la torsión elástica no es aplicable, ella se usa a veces para calcular un esfuerzo ficticio para el par de torsión último. El esfuerzo calculado se llama *módulo de ruptura*; véanse las ordenadas máximas de la línea de rayas en las figuras 6-28(f) y (g). Él sirve como un índice burdo de la resistencia última de un material en torsión. Para un tubo de pared delgada, la distribución del esfuerzo es casi la misma, independientemente de las propiedades del material; véase la figura 6-29. Por esta razón son ampliamente usados los experimentos con tubos de pared delgada para establecer los diagramas esfuerzo-deformación unitaria τ-γ en cortante.

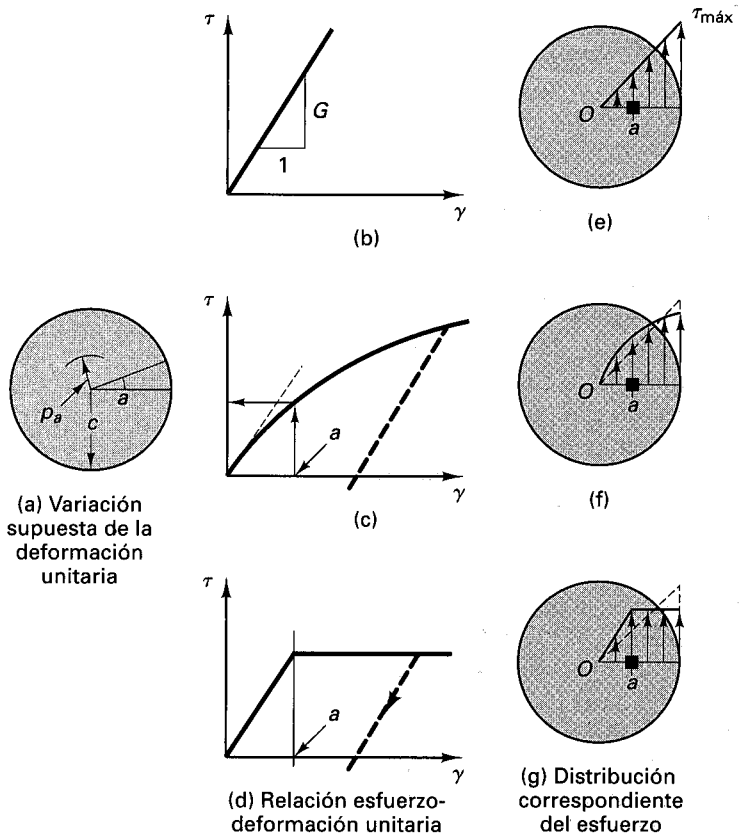


Fig. 6-28 Esfuerzos en miembros circulares debido a un par de torsión.

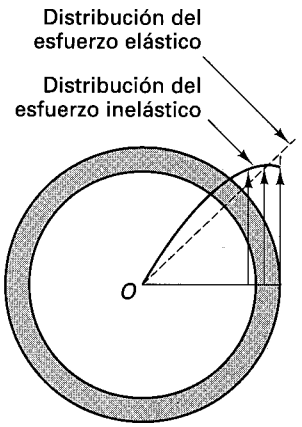


Fig. 6-29 Para tubos de pared delgada, la diferencia entre los esfuerzos elásticos e inelásticos es pequeña.

Si una flecha es deformada dentro del rango inelástico y luego se retira el par de torsión aplicado, todo anillo "imaginario" se recupera elásticamente. Debido a las diferencias en las trayectorias de la deformación unitaria, que ocasionan deformaciones permanentes en el material, se desarrollan esfuerzos residuales. Este proceso será ilustrado en uno de los ejemplos que siguen.

Para determinar la razón de torsión de una flecha o tubo circular, la ecuación 6-13 puede usarse en la forma siguiente:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{máx}}{c} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} \tag{6-28}$$

Aquí debe usarse la deformación unitaria cortante máxima en c o la deformación unitaria en ρ_a determinada con el diagrama esfuerzo-deformación unitaria.

Ejemplo 6-13

Una flecha maciza de acero de 24 mm de diámetro está tan fuertemente torcida que sólo queda un núcleo elástico de 8 mm de diámetro en el interior, como se muestra en la figura 6-30(a). Si las propiedades del material pueden idealizarse como se muestra en la figura 6-30(b), ¿qué esfuerzos residuales y qué rotación residual permanece al liberar el par de torsión aplicado? Sea $G = 80$ GPa.

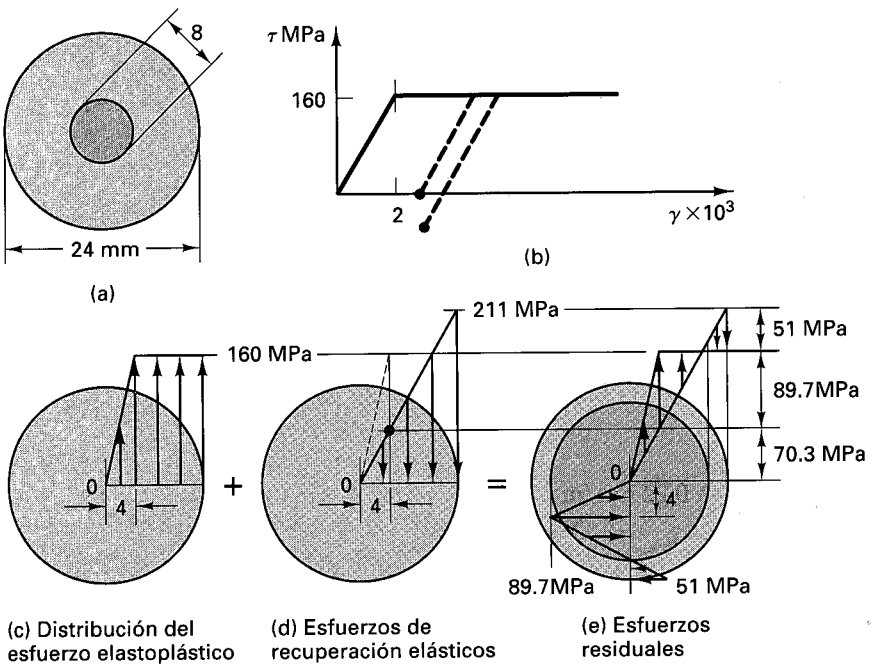


Fig. 6-30

SOLUCIÓN

Para comenzar, deben determinarse la magnitud del par aplicado inicialmente y el correspondiente ángulo de torsión. La distribución de esfuerzos correspondiente a la condición dada se muestra en la figura 6-30(c). Los esfuerzos varían linealmente de 0 a 160 MPa cuando $0 \leq \rho \leq 4$ mm; el esfuerzo es constante e igual a 160 MPa para $\rho > 4$ mm. La ecuación 6-27 puede usarse para determinar el par de torsión T aplicado. La liberación del par T causa esfuerzos elásticos y la ecuación 6-3 es entonces aplicable; véase la figura 6-30(d). La diferencia entre las dos distribuciones de esfuerzos, correspondiente a ningún par externo, da los esfuerzos residuales.

$$T = \int_A \tau\rho \, dA = \int_0^c 2\pi\tau\rho^2 \, d\rho = \int_0^4 \left(\frac{\rho}{4} 160\right) 2\pi\rho^2 \, d\rho + \int_4^{12} (160) 2\pi\rho^2 \, d\rho$$

$$= (16 + 558) \times 10^3 \, \text{N} \cdot \text{mm} = 574 \times 10^3 \, \text{N} \cdot \text{mm}$$

Note la pequeña contribución al total de la primera integral.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{574 \times 10^3 \times 12}{(\pi/32) \times 24^4} = 211 \text{ MPa}$$

En $\rho = 12$ mm, $\tau_{\text{residual}} = 211 - 160 = 51$ MPa.

Dos diagramas residuales alternativos se muestran en la figura 6-30(e). Por claridad, los resultados iniciales están regraficados desde la línea vertical. En toda la porción sombreada del diagrama, el par de torsión residual tiene sentido horario; un par de torsión residual exactamente igual actúa en sentido opuesto en la porción interior de la flecha.

La rotación inicial se determina calculando el giro del núcleo elástico. En $\rho = 4$ mm, $\gamma = 2 \times 10^{-3}$. La recuperación elástica de la flecha está dada por la ecuación 6-16. La diferencia entre los giros inelástico y elástico da la rotación residual por unidad de longitud de flecha. Si el par de torsión inicial es vuelto a aplicar en el mismo sentido, la flecha responde elásticamente.

Inelástico:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 0.50 \text{ rad/m}$$

Elástico:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_p G} = \frac{574 \times 10^3 \times 10^3}{(\pi/32) \times 24^4 \times 80 \times 10^3} = 0.22 \text{ rad/m}$$

Residual:

$$\frac{d\phi}{dx} = 0.50 - 0.22 = 0.28 \text{ rad/m}$$

Ejemplo 6-14

Determine el par de torsión último tomado por una flecha circular maciza de acero dulce cuando son alcanzados en toda su sección transversal esfuerzos cortantes superiores al límite proporcional. Para el acero dulce, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria por cortante puede idealizarse por el mostrado en la figura 6-31(a). El esfuerzo de fluencia cortante τ_{yp} debe tomarse como el mismo que el límite proporcional en cortante τ_{pl}.

SOLUCIÓN

Si un miembro se somete a un par de torsión muy grande, aparecen en todas partes grandes deformaciones unitarias, excepto cerca del centro. Correspondiente a las grandes deformaciones unitarias del material idealizado considerado, el esfuerzo de fluencia cortante se alcanza en todas partes excepto cerca del centro. Sin embargo, la resistencia al par de torsión aplicado ofrecida por el material cerca del centro de la flecha es despreciable ya que las ρ correspondientes son pequeñas [figura 6-31(b)]. (Véase la contribución al par de torsión T por la acción elástica en el ejemplo 6-13.) Por consiguiente, puede suponerse con un grado de exactitud suficiente que un esfuerzo cortante constante τ_{yp} está actuando en todas partes sobre la sección considerada. El par de torsión correspondiente a esta condición puede considerarse como el par de torsión *último.* [La figura 6-31(c)] da una base más firme para esta aseveración) Entonces,

$$T_{\text{últ}} = \int_A (\tau_{yp}\, dA)\rho = \int_0^c 2\pi\rho^2\tau_{yp}\, d\rho = \frac{2\pi c^3}{3}\tau_{yp} \qquad (6\text{-}29)$$

$$= \frac{4}{3}\frac{\tau_{yp}}{c}\frac{\pi c^4}{2} = \frac{4}{3}\frac{\tau_{yp} I_p}{c}$$

Como la capacidad máxima por par de torsión elástico de una flecha maciza es $T_{yp} = \tau_{yp} I_p/c$ y $T_{\text{últ}}$ es $\frac{4}{3}$ veces este valor, la capacidad del par restante después de la fluencia es $\frac{1}{3}$ de aquella en la fluencia. En la figura 6-31(c) se muestra una gráfica del par de torsión T *versus* θ (ángulo de torsión por distancia unitaria) cuando se desarrolla una plasticidad plena. El punto A corresponde a los resultados encontrados en el ejemplo precedente; la línea AB es la recuperación elástica y el punto B es la θ residual para el mismo problema.

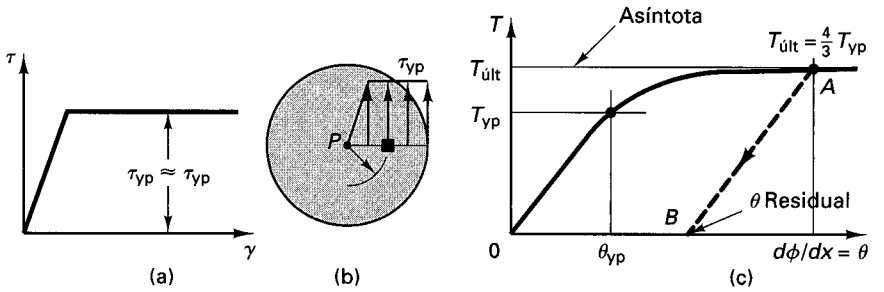


Fig. 6-31

Debe notarse que en miembros de máquinas, debido a las propiedades de fatiga de los materiales, la capacidad estática última de las flechas tal como se evaluaron aquí, es de menor importancia.

Parte C TORSIÓN DE MIEMBROS SÓLIDOS NO CIRCULARES

6-14. Barras sólidas con cualquier sección transversal

El tratamiento analítico de los miembros no circulares macizos en torsión está más allá del alcance de este libro. Matemáticamente, el problema es complejo.[13] Las primeras dos hipótesis establecidas en la Sección 6-3 no se aplican a miembros no circulares. Las Secciones perpendiculares al eje de un miembro se alabean cuando se aplica un par de torsión. La naturaleza de las distorsiones que tienen lugar en una sección rectangular pueden imaginarse observando la figura 6-32.[14] En un miembro rectangular, los elementos en las esquinas no se distorsionan en absoluto. Por tanto, los esfuerzos cortantes en las esquinas son cero; son máximos en los puntos medios de los lados largos. La figura 6-33 muestra la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de tres líneas radiales que parten del centro. Note particularmente la diferencia en esta distribución de esfuerzos respecto a la de una sección circular. En ésta, el esfuerzo es máximo en el punto más remoto, pero en la primera el esfuerzo es cero en el punto más remoto. Esta situación puede aclararse considerando un elemento de esquina, como se muestra en la figura 6-34. Si existiese un esfuerzo cortante τ en la esquina, este podría resolverse en dos componentes paralelas a los bordes de la barra. Sin embargo, como los cortantes siempre ocurren en pares actuando sobre planos mutuamente perpendiculares, esas componentes tendrían que ser equilibradas por cortantes situados en los planos de las superficies exteriores. Esta última situación es imposible ya que las superficies exteriores están libres de todo esfuerzo. Por consiguiente, τ debe ser cero. Similares consideraciones pueden hacerse a otros puntos sobre la frontera. Todos los esfuerzos cortantes en el plano de un corte cerca de las fronteras actúan paralelamente a ellas.

Se han obtenido[15] soluciones analíticas para miembros elásticos rectangulares sometidos a torsión. Los métodos usados están más allá del alcance

[13]Este problema permaneció sin ser resuelto hasta que el famoso experto francés en elasticidad, B. de Saint-Venant, desarrolló una solución para tales problemas en 1853. El problema general de la torsión se llama a veces problema de Saint-Venant.

[14]Un experimento con un borrador de goma sobre la cual se dibuja una retícula rectangular evidencia este tipo de distorsión.

[15]S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1970, pág. 312. La tabla de coeficientes que sigue está adaptada de esta fuente.

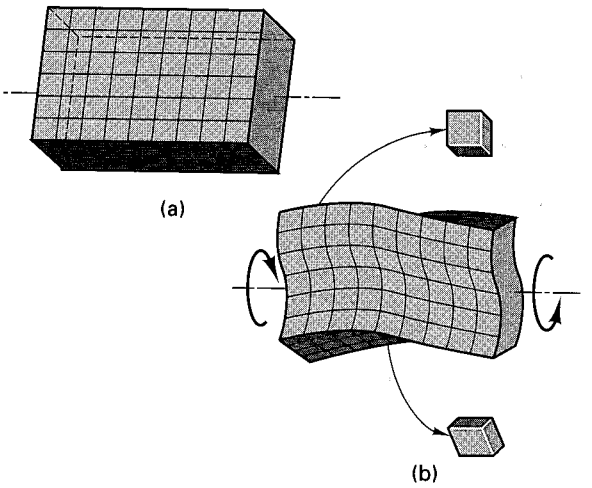


Fig. 6-32 Barra rectangular (a) antes y (b) después de aplicar un par de torsión.

de este libro. Sin embargo, los resultados finales de este análisis son de gran interés. Para el esfuerzo cortante máximo (véase la figura 6-33) y el ángulo de torsión, esos resultados pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\alpha b t^2} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{TL}{\beta b t^3 G} \tag{6-30}$$

donde T, igual que antes, es el par de torsión aplicado, b es la longitud del lado largo y t es el espesor o ancho del lado corto de una sección rectangular. Los valores de los parámetros α y β dependen de la razón b/t. Unos cuantos de estos valores se dan en la siguiente tabla. Para secciones delgadas, donde b es mucho mayor que t, los valores de α y β tienden a $1/3$.

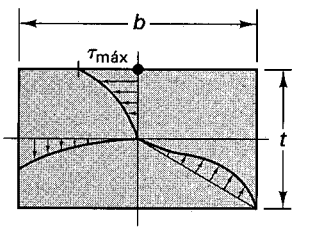


Fig. 6-33 Distribución del esfuerzo cortante en una flecha rectangular sometida a un par de torsión.

Tabla de coeficientes para barras rectangulares

b/t	1.00	1.50	2.00	3.00	6.00	10.0	∞
α	0.208	0.231	0.246	0.267	0.299	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

Es útil reescribir la segunda ecuación 6-30, de manera que exprese la rigidez torsional k_t para una sección rectangular, en la forma

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \beta b t^3 \frac{G}{L} \tag{6-31}$$

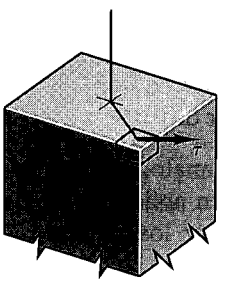


Fig. 6-34 El esfuerzo cortante mostrado no puede existir.

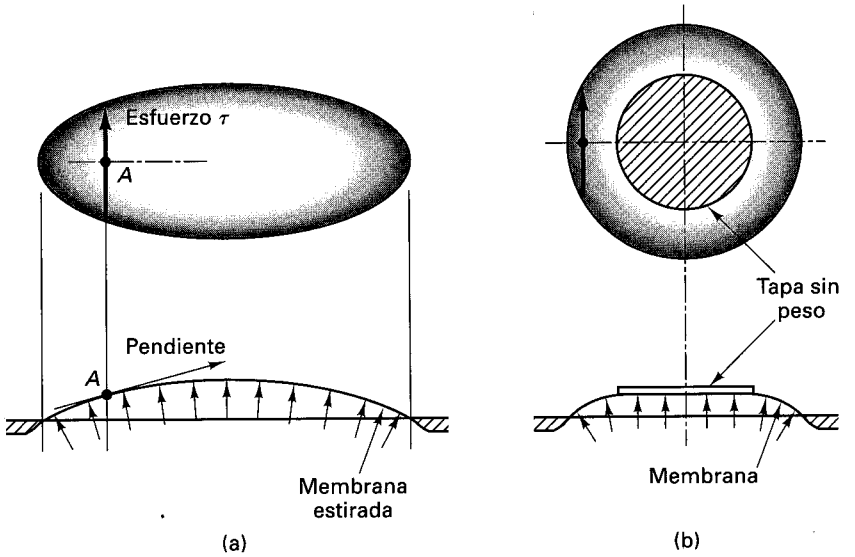


Fig. 6-35 Analogía de la membrana: (a) región simplemente conectada y (b) región múltiplemente (tubular) conectada.

Fórmulas como éstas pueden encontrarse en libros más avanzados para muchos otros tipos de secciones.[16]

Para los casos que no pueden resolverse matemáticamente en forma conveniente, se ha desarrollado un método sorprendente.[17] Resulta que la solución de la ecuación diferencial parcial que debe resolverse en el problema de la torsión elástica es matemáticamente idéntica a la de una membrana delgada, como el caso de una película de jabón ligeramente estirada sobre un agujero. Este agujero debe ser geométricamente similar a la sección transversal de la flecha en estudio. Debe mantenerse una ligera presión de aire sobre un lado de la membrana. Puede demostrarse entonces que lo siguiente se cumple:

1. El esfuerzo cortante en cualquier punto es proporcional a la pendiente de la membrana estirada en el mismo punto, figura 6-35(a).
2. La dirección de un esfuerzo cortante particular en un punto está en ángulo recto a la pendiente de la membrana en el mismo punto, figura 6-35(a).
3. El doble del volumen encerrado por la membrana es proporcional al par de torsión tomado por la sección.

La analogía anterior se llama *analogía de la membrana*. Además de su valor en aplicaciones experimentales, es una ayuda mental muy útil para visualizar los esfuerzos y las capacidades por torsión de miembros. Por

[16]R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1975. Se dispone también de análisis por elemento finito de barras macizas de sección transversal arbitraria. Véase, por ejemplo, L. R. Herrmann, "Elastic torsional analysis of irregular shapes", *J. Eng. Mech. Div., ASCE,* diciembre de 1965, 91 EMD, págs. 11-19.

[17]Esta analogía fue introducida por el científico e ingeniero alemán L. Prandtl en 1903.

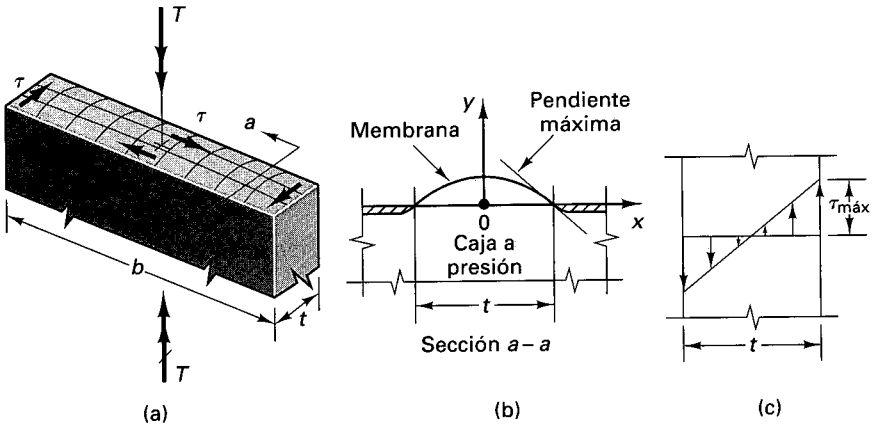


Fig. 6-36 Ilustración de la analogía de la membrana para una barra rectangular en torsión.

ejemplo, considere una barra rectangular estrecha sometida al par de torsión T, como se muestra en la figura 6-36. Una membrana estirada para este miembro se muestra en la figura 6-36(a). Si tal membrana es estirada ligeramente por presión interna, una sección a través de la membrana es una parábola, figura 6-36(b). Para esta superficie, la pendiente máxima, y por consiguiente el esfuerzo cortante máximo, ocurre a lo largo de los bordes, figura 6-36(c). *Ningún esfuerzo cortante se desarrolla a lo largo de una línea que biseque el espesor t de la barra.* Los esfuerzos cortantes máximos a lo largo de los lados cortos son pequeños. El volumen encerrado por la membrana es directamente proporcional al par de torsión que el miembro puede tomar bajo un esfuerzo máximo dado. Por esta razón, las secciones mostradas en la figura 6-37 pueden tomar aproximadamente el mismo par de torsión bajo el mismo esfuerzo cortante máximo (misma pendiente máxima de la membrana) ya que el volumen encerrado por las membranas sería aproximadamente el mismo en todos los casos. (Para todas esas formas, $b = L$ y las t son iguales.) Sin embargo, con algo de imaginación, el lector se convencerá de que las líneas de contorno de una película de jabón se "apilarán" en puntos a de esquinas reentrantes. Por consiguiente, ocurrirán altos esfuerzos locales en esos puntos. Un círculo inscrito dentro del área transversal de una sección es tangente al esfuerzo máximo en una frontera.

Otra analogía, llamada *analogía del montón de arena*, ha sido desarrollada para la torsión plástica.[18] Se vierte arena seca sobre una superficie plana que tenga la forma de la sección transversal del miembro. La superficie del montón de arena que se forma tiene una pendiente constante. Por ejemplo, se forma un cono sobre un disco circular o una pirámide sobre una base cuadrada. La pendiente máxima constante de la arena corresponde a la superficie límite de la membrana en la analogía previa. El volumen del montón de arena, y por consiguiente su peso, es proporcional al par de torsión totalmente plástico tomado por una sección. Los otros conceptos

[18] A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1950.

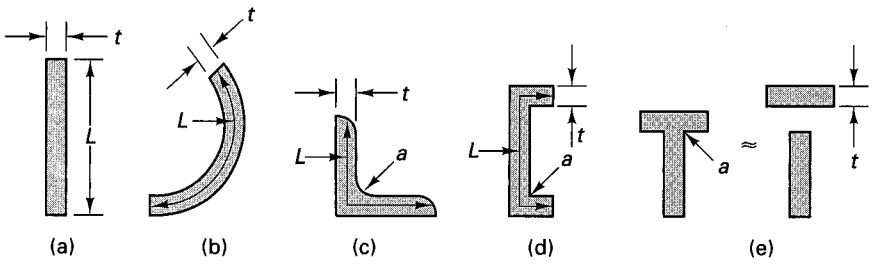


Fig. 6-37 Miembros de igual área transversal y del mismo espesor que toman el mismo par de torsión.

en conexión con la superficie de la arena tienen la misma interpretación que aquellos en la analogía de la membrana.

Las barras estáticamente indeterminadas con cualquier sección transversal pueden analizarse con los procedimientos vistos en la sección 6-9.

Ejemplo 6-15

Usando la analogía de la membrana, determine un valor aproximado para la constante de torsión $(I_p)_{\text{equiv}}$ para una viga de acero W12 × 65; véase la figura 6-38. Compare el valor calculado con el valor de 2.18 in^4 dado en el *Manual AISC de construcción en acero*. (Véase la Tabla 4A en el Apéndice.)

SOLUCIÓN

Comparando las ecuaciones dadas para ϕ para una sección circular, ecuación 6-16, con las de una barra rectangular, ecuación 6-30, puede concluirse que $(I_p)_{\text{equiv}} = \beta bt^3$. Además, una sección W12 × 65 puede aproximarse, como es sugerido por la figura 6-37(e), por tres barras delgadas separadas: dos patines y un alma. Como b/t para los patines es 12/0.605 = 19.8 y para

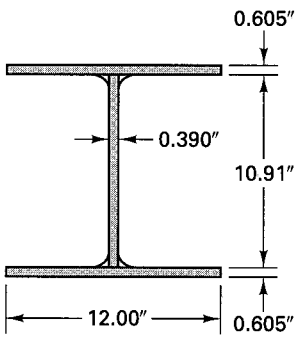


Fig. 6-38

el alma es $10.91/0.390 = 28.0$, de las tablas para ambos casos, $\beta \approx \frac{1}{3}$. Por consiguiente,

$$(I_p)_{\text{equiv}} = \tfrac{1}{3}(2 \times 12 \times 0.605^3 + 10.91 \times 0.390^3) = 1.99 \text{ in}^4$$

El valor dado en el *Manual AISC* es mayor (2.18 in^4). La discrepancia puede atribuirse a que se han despreciado los filetes en las cuatro esquinas interiores.

Este problema puede resolverse desde un punto de vista diferente, usando la ecuación 6-21. El trabajo numérico es idéntico.

6-15. Alabeo de secciones abiertas de pared delgada[19]

La resolución del problema general de la torsión elástica visto en la sección precedente está asociada con el nombre de Saint-Venant. Las soluciones basadas en este enfoque riguroso (que incluye la analogía de la membrana) para secciones abiertas de pared delgada[20] pueden incurrir en importantes inexactitudes en algunas aplicaciones de la ingeniería. Como se señaló en conexión con la torsión de una barra rectangular estrecha, figura 6-36, ningún esfuerzo cortante se desarrolla a lo largo de una línea que biseque el espesor t. Esto significa que *ninguna deformación en el plano puede tener lugar a lo largo de todo el ancho y la longitud de la superficie media de la barra*. Lo mismo es cierto para superficies medias de barras curvas, así como para un ensamble de barras. En este sentido, una sección I como la mostrada en la figura 6-39, que consiste en tres barras planas, *no desarrolla deformaciones en el plano* en las *tres* superficies medias de esas barras durante la torsión.

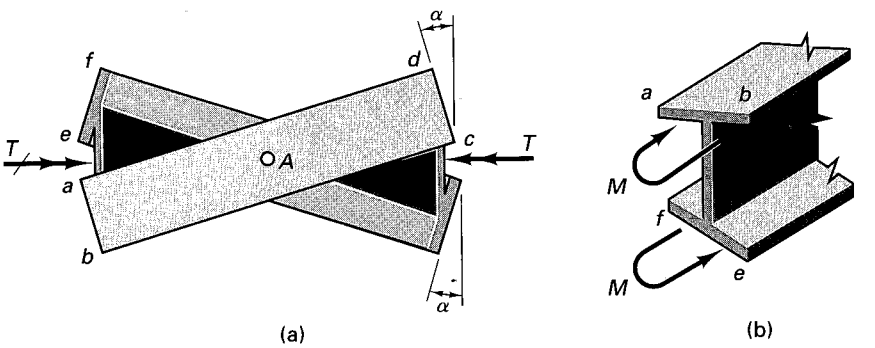


Fig. 6-39 Alabeo transversal debido a un par de torsión aplicado.

[19] Esta sección presenta sólo un análisis cualitativo de este importante tema.

[20] En matemáticas, las fronteras de tales secciones se denominan simplemente conectadas (es decir, tales secciones no son ni tubulares ni huecas).

Por virtud de la simetría, esta sección I se tuerce alrededor de su eje centroidal, que en este caso es también el centro de torsión. Durante la torsión, cuando los patines de la viga se desplazan lateralmente, la superficie media *no deformada abcd* gira respecto al punto A, figura 6-39(a). Un comportamiento similar es exhibido por la superficie media del otro patín. De esta manera, las secciones planas de una viga I se alabean (es decir, dejan de ser planas) durante la torsión. Por el contrario, para miembros circulares, las secciones perpendiculares al eje permanecen planas durante la torsión (véase la Sección 6-3, hipótesis 1). Aunque el alabeo de la sección transversal tiene lugar en otras secciones *gruesas*, incluyendo barras rectangulares, este efecto es despreciable. Por otra parte, para miembros en torsión de *pared delgada*, usados comúnmente en aviones, automóviles, barcos, puentes, etc. el alabeo de las secciones transversales, o bien su restricción, puede tener un efecto importante[21] sobre la resistencia del miembro y particularmente en su rigidez.

El alabeo de las secciones transversales en torsión es restringido en muchas aplicaciones de la ingeniería. Por ejemplo, al soldar un extremo de una viga I de acero a un soporte rígido, la sección transversal unida no puede alabearse. Para mantener la compatibilidad requerida de las deformaciones, deben desarrollarse momentos M en los patines en el plano, mostrados en la figura 6-39(b).[22] Tal restricción obligada rigidiza efectivamente una viga y reduce su torsión. Este efecto es local y, a cierta distancia del soporte, pierde su importancia. Sin embargo, en vigas cortas, el efecto restrictivo del alabeo es dominante. Este importante tema va más allá del alcance de este texto.[23]

Parte D TORSIÓN DE MIEMBROS TUBULARES DE PARED DELGADA

6-16. Miembros huecos de pared delgada

A diferencia de los miembros macizos no circulares, los tubos de *pared delgada* de cualquier forma pueden analizarse fácilmente respecto a la magnitud de los esfuerzos cortantes y el ángulo de torsión causado por un par de torsión aplicado al tubo. Considere un tubo de forma arbitraria con espesor de pared variable, como el mostrado en la figura 6-40(a), y un elemento tomado de este tubo en el que actúan las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4, que se muestra en la figura 6-40(b). Esas fuerzas son iguales a los esfuerzos cor-

[21] V. Z. Vlasov en una serie de artículos presentados en 1940, hizo contribuciones básicas a este tema. Véase su libro *Thin-walled Elastic Beams*, 2a. ed., Washington, D.C.: Israel Translations, Office of Technical Services, 1961.

[22] Los cortantes que tienen lugar en los patines y toman eficientemente parte del par de torsión aplicado no se muestran en el diagrama.

[23] Para detalles, véase, por ejemplo, J. T. Oden y E. A. Ripperger, *Mechanics of Elastic Structures*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

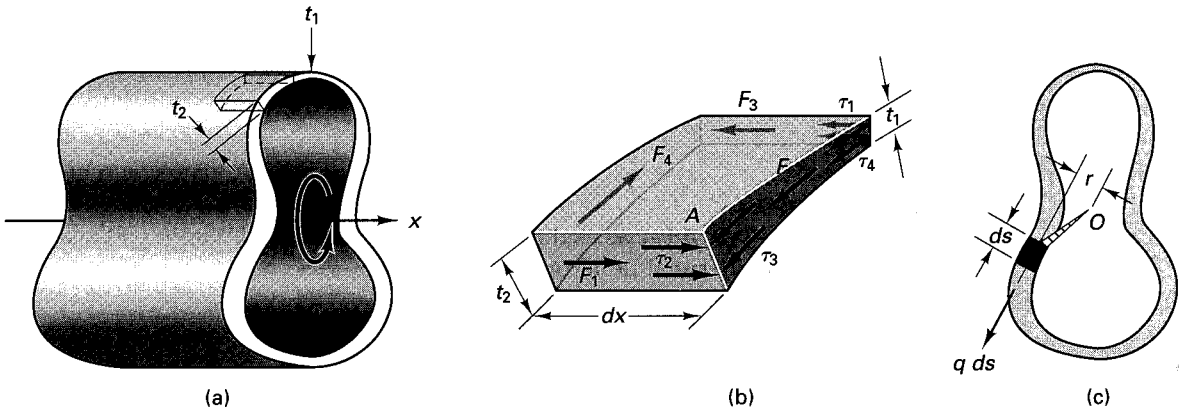


Fig. 6-40 Miembro tubular de pared delgada y de espesor viariable.

tantes que actúan sobre los planos cortados multiplicados por las áreas respectivas.

De $\Sigma F_x = 0$, $F_1 = F_3$, pero $F_1 = \tau_2 t_2\, dx$ y $F_3 = \tau_1 t_1\, dx$, donde τ_2 y τ_1 son esfuerzos cortantes que actúan sobre las áreas respectivas $t_2\, dx$ y $t_1\, dx$. Por consiguiente, $\tau_2 t_2\, dx = \tau_1 t_1\, dx$ o bien $\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$. Sin embargo, como las secciones longitudinales se tomaron a una distancia arbitraria entre sí, se infiere de las relaciones previas que el producto del esfuerzo cortante y el espesor de la pared es el mismo (es decir, constante) sobre cualesquiera de los planos. Esta constante se denotará por q, que es medida en unidades de fuerza entre distancia unitaria a lo largo del perímetro. Por tanto, sus unidades son N/m o lb/in.

En la ecuación 1-2 de la sección 1-4, se estableció que los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares son iguales en una esquina de un elemento. Por consiguiente, en una esquina como la A en la figura 6-40(b), $\tau_2 = \tau_3$; similarmente, $\tau_1 = \tau_4$. Por tanto, $\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2$, o, en general, q es constante en el plano de una sección perpendicular al eje del miembro. Con base en esto puede formularse una analogía. Las fronteras interiores y exteriores de la pared pueden imaginarse como las fronteras de un canal. Puede uno entonces imaginarse una cantidad constante de agua circulando continuamente en este canal. En este arreglo, la cantidad de agua que fluye a través de un plano transversal del canal es constante. Debido a esta analogía, la cantidad q se ha llamado *flujo cortante*.

A continuación consideremos la sección transversal del tubo como se muestra en la figura 6-40(c). La fuerza por distancia unitaria del perímetro de este tubo, en virtud del razonamiento previo, es constante y es el flujo cortante q. Este flujo cortante multiplicado por la longitud ds del perímetro da una fuerza $q\, ds$ por longitud diferencial. El producto de esta fuerza infinitesimal $q\, ds$ y r alrededor de algún punto conveniente como el O, figura 6-40(c), da la contribución de un elemento a la resistencia del par de torsión aplicado T. Sumando o integrando esto,

$$T = \oint rq\, ds \tag{6-32}$$

donde el proceso de integración se lleva a cabo alrededor del tubo a lo largo de la línea central del perímetro. Como para un tubo, q es constante, esta ecuación puede escribirse como

$$T = q \oint r\, ds \tag{6-33}$$

En vez de efectuar la integración, se dispone de una simple interpretación de la integral. Puede verse en la figura 6-40(c) que $r\, ds$ es dos veces el valor del área sombreada de un triángulo infinitesimal de altura r y base ds. Por consiguiente, la integral completa es dos veces toda el área limitada por la línea central del perímetro del tubo. Si se define esta área por el símbolo Ⓐ, obtenemos

$$T = 2Ⓐq \qquad \text{o} \qquad q = \frac{T}{2Ⓐ} \tag{6-34}$$

Esta ecuación[24] se aplica sólo a tubos de *pared delgada*. El área Ⓐ es aproximadamente el promedio de las dos áreas encerradas por las superficies interior y exterior de un tubo, o como se indicó antes, es el área encerrada por la línea central del perfil de la pared. La ecuación 6-34 no es aplicable en absoluto si el tubo está escindido y deben en cambio usarse las ecuaciones 6-30.

Como para cualquier tubo, el flujo cortante q dado por la ecuación 6-34 es constante, de la definición de flujo cortante, el esfuerzo cortante en cualquier punto de un tubo donde el espesor de la pared es t, es

$$\tau = \frac{q}{t} \tag{6-35}$$

En el rango elástico, las ecuaciones 6-34 y 6-35 son aplicables a cualquier forma de tubo. Para un comportamiento inelástico, la ecuación 6-35 se aplica sólo si el espesor t es constante. El análisis de tubos de más de una celda está más allá del alcance de este libro.[25]

Para materiales linealmente *elásticos*, el ángulo de torsión para un tubo hueco puede encontrarse aplicando el principio de conservación de la energía dado por la ecuación 3-16. En esta deducción es conveniente introducir el ángulo de torsión por unidad de longitud de tubo definido por $\theta = d\phi/dx$. La energía de deformación unitaria cortante elástica para el tubo debe también ser por unidad de longitud del tubo. Por lo tanto, la ecuación 5-5 para la energía de deformación unitaria elástica se reduce aquí a $U_{sh} = \int_{vol}(\tau^2/2G)\, dV$, donde $dV = 1 \times t\, ds$. Sustituyendo la ecuación 6-35 y luego la ecuación 6-34 en esta relación y simplificando, obtenemos

$$\overline{U}_{sh} = \oint \frac{\tau^2}{8Ⓐ^2 Gt}\, ds = \frac{T^2}{8Ⓐ^2 G} \oint \frac{ds}{t} \tag{6-36}$$

donde, en la última expresión, las constantes se han sacado de la integral.

[24]La ecuación 6-34 se llama a veces fórmula de Bredt en honor del ingeniero alemán que la desarrolló.

[25]J. T. Oden y E. A. Ripperger, *Mechanics and Elastic Structures*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

Igualando esta relación con el trabajo externo por unidad de longitud del miembro expresado como $\overline{W}_e = T\theta/2$, la ecuación diferencial que rige es

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4\textcircled{A}^2 G}\oint \frac{ds}{t} \tag{6-37}$$

Aquí nuevamente es útil reescribir la ecuación 6-37 para expresar la rigidez torsional k_t para un tubo hueco de pared delgada. Como para un tubo prismático sometido a un par de torsión constante, $\phi = \theta L$,

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{4\textcircled{A}^2}{\oint ds/t}\frac{G}{L} \tag{6-38}$$

El alabeo de la sección transversal visto en la sección 6-15 no es muy importante para miembros tubulares. El análisis de miembros tubulares estáticamente indeterminados se lleva a cabo de acuerdo con los procedimientos vistos antes.

Ejemplo 6-16

Resuelva el ejemplo 6-3 usando las ecuaciones 6-34 y 6-35. El tubo tiene radios exterior e interior de 10 y 8 mm, respectivamente, y el par de torsión aplicado es de 40 N · m.

SOLUCIÓN

El radio medio del tubo es de 9 mm y el espesor de la pared es de 2 mm. Por tanto,

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2\textcircled{A}t} = \frac{40 \times 10^3}{2\pi \times 9^2 \times 2} = 39.3 \text{ MPa}$$

Nótese que usando las ecuaciones 6-34 y 6-35, sólo se obtiene un esfuerzo cortante y que éste es casi justamente igual al promedio de los dos esfuerzos calculados en el ejemplo 6-3. Entre más delgadas son las paredes, más exacta es la respuesta, o viceversa.

Es interesante notar que un tubo rectangular, mostrado en la figura 6-41, con un espesor de pared de 2 mm, tendrá casi el mismo esfuerzo cortante que el de un tubo circular para el mismo par de torsión aplicado. Esto se debe a que el área encerrada es aproximadamente la misma que la $\textcircled{A}$ del tubo circular. Sin embargo, estarán presentes algunas concentraciones de esfuerzos en las esquinas interiores (reentrantes) del tubo cuadrado.

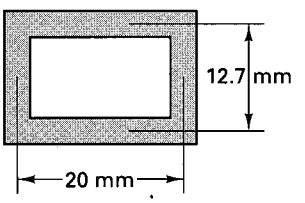


Fig. 6-41

Ejemplo 6-17

Una pieza extruida de aluminio tiene la sección transversal mostrada en la figura 6-42. Si se aplica el par de torsión $T = 300$ N·m, (a) determine los esfuerzos cortantes máximos que se desarrollarán en las tres partes diferentes del miembro y (b) encuentre la rigidez torsional del miembro. No tome en cuenta las concentraciones de esfuerzos.

SOLUCIÓN

La sección transversal consiste esencialmente en tres partes: una región circular ①, una barra rectangular ② y una caja hueca rectangular con espesor de pared variable ③. Durante la aplicación del par de torsión T, cada uno de esos elementos gira el mismo ángulo ϕ y, por tanto, cada elemento resiste un par $(k_t)_i\phi$. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación 6-21, el par de torsión total resistido por el miembro es la suma de esas cantidades para las tres partes. Las expresiones $(k_t)_i$ para las partes están dadas, respectivamente, por las ecuaciones 6-17, 6-31 y 6-38. Esas constantes son

$$(k_t)_1 = I_p \frac{G}{L} = \frac{\pi \times 10^4}{2} \frac{G}{L} = 1.57 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

$$(k_t)_2 = \beta b t^3 \frac{G}{L} = 0.263 \times 30 \times 10^3 \frac{G}{L} = 0.789 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

$$(k_t)_3 = \frac{4\textcircled{A}^2}{\oint ds/t} \frac{G}{L} = \frac{4 \times (40 \times 20)^2}{(40 + 2 \times 20)/3 + 40/4} \frac{G}{L} = 6.98 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

donde todos los valores numéricos están en milímetros. Al evaluar la integral de la última ecuación, se supone que el espesor de 4 mm de la caja se extiende 40 mm.

Sumando las rigideces de las partes, la rigidez torsionante del miembro es $\Sigma (k_t)_i = 9.34 \times 10^4 G/L$.

El par de torsión aplicado se distribuye entre las tres partes según la razón $(k_t)_i/\Sigma (k_t)_i$. Los pares de torsión son entonces $300 \times (1.57 \times 10^4 G/L)/(9.34 \times 10^4 G/L) = 50.4$ N · m para la porción circular, 25.3 N·m para la barra y 224 N·m para la caja. Los esfuerzos máximos en cada una de las partes se determinan usando, respectivamente, las ecuaciones 6-3, 6-30 y 6-34.

$$\tau_{1\text{-máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{50.4 \times 10^3 \times 10}{\pi \times 10^4/2} = 32.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2\text{-máx}} = \frac{T}{\alpha b t^2} = \frac{25.3 \times 10^3}{0.267 \times 30 \times 10^2} = 31.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{3\text{-máx}} = \frac{T}{2\textcircled{A}t} = \frac{224 \times 10^3}{2 \times 40 \times 20 \times 3} = 46.7 \text{ MPa}$$

El esfuerzo $\tau_{1\text{-máx}}$ ocurre a lo largo del perímetro de la porción circular, $\tau_{2\text{-máx}}$ a la mitad de la altura de la barra y $\tau_{3\text{-máx}}$ en las paredes de 3 mm del tubo. Debido a las aproximaciones hechas, esos esfuerzos no pueden considerarse precisos. En aplicaciones mecánicas, las concentraciones de esfuerzos pueden ser particularmente importantes. La analogía de la membrana puede usarse convenientemente para determinar la posición de las concentraciones de esfuerzos. Un remedio para esto puede ser usar filetes de buen tamaño en las esquinas reentrantes.

La rigidez torsional de un miembro, encontrada de esta manera, tal como se necesita en los análisis de vibraciones y para la resolución de problemas elásticos estáticamente indeterminados, es suficientemente exacta ya que los efectos locales, como las concentraciones de esfuerzos, juegan en ella un papel menor.

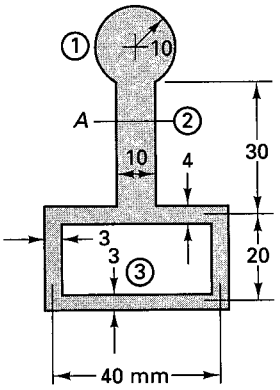


Fig. 6-42

PROBLEMAS

Sección 6-2

6-1. La flecha maciza cilíndrica de tamaño variable, como se muestra en mm en la figura, está sometida a los pares de torsión indicados. ¿Cuál es el esfuerzo torsionante máximo en la flecha y entre qué poleas ocurre éste?

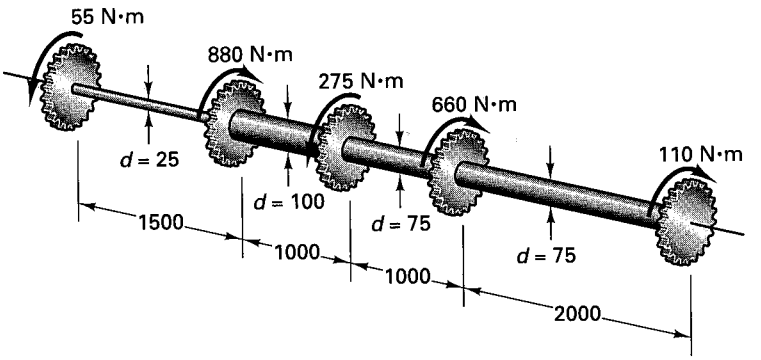


Fig. P6-1

Secciones 6-4 y 6-5

6-2. Se taladra un agujero de 100 mm de diámetro en una flecha circular maciza de 200 mm de diámetro. ¿Qué porcentaje de resistencia torsionl se pierde debido a esta operación?

6-3. Una flecha circular maciza de 40 mm de diámetro va a ser reemplazada por un tubo circular hueco. Si el diámetro exterior del tubo está limitado a 60 mm, ¿cuál debe ser el espesor del tubo hecho del mismo material linealmente elástico para que el esfuerzo máximo de trabajo sea el mismo que en la flecha? Determine la razón de los pesos de ambas flechas.

6-4. Una flecha redonda de 20 mm de diámetro y 500 mm de longitud está empotrada en un extremo y sometida a un par de torsión T en su extremo libre, como se muestra en la figura. Si un extensómetro colocado sobre la superficie a 45° con la horizontal registra una deformación unitaria de 4×10^{-3} mm/mm cuando se aplica el par, ¿cuál es el ángulo de torsión presente en la flecha? Sea $E = 180$ GPa y $G = 70$ GPa. (*Sugerencia:* Nótese la información dada en la figura 6-8.)

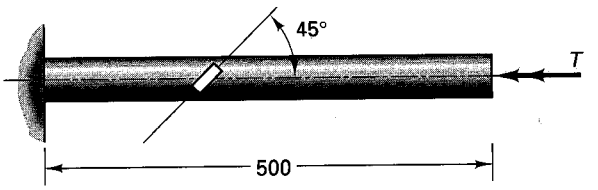


Fig. P6-4

Sección 6-6

6-5. Una flecha maciza de acero de 100 mm de diámetro transmite 400 kW a 2 Hz. (a) Determine el esfuerzo cortante máximo. (b) ¿Cuál es el diámetro requerido para que la flecha opere a 4 Hz bajo el mismo esfuerzo cortante?

6-6. Un motor impulsa una flecha por medio de un conjunto de engranes a 630 rpm, como se muestra en la figura. Se suministran treinta caballos (hp) a una máquina situada a la derecha y 90 hp a otra a la izquierda. Seleccione una flecha maciza redonda del mismo tamaño en toda su longitud. El esfuerzo cortante permisible es de 5750 psi.

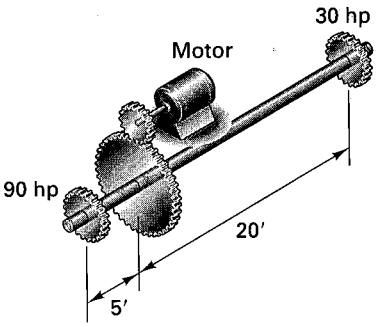


Fig. P6-6

6-7. En un torno, uno de los trenes de engranes está hecho como se muestra en la figura. El pequeño engrane cilíndrico impulsor montado sobre una flecha de 12 mm e impulsado por un motor de 2 kW tiene 28 dientes. El engrane impulsado tiene 90 dientes. Esto reduce efectivamente la velocidad del engrane grande por un factor de 28/90. ¿Cuál debe ser el tamaño de la flecha del engrane grande si se fabrica con el mismo material que el engrane pequeño?

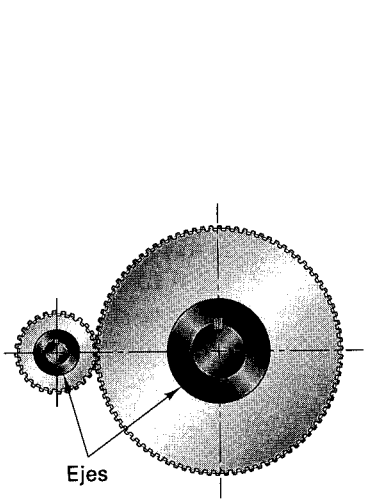


Fig. P6-7

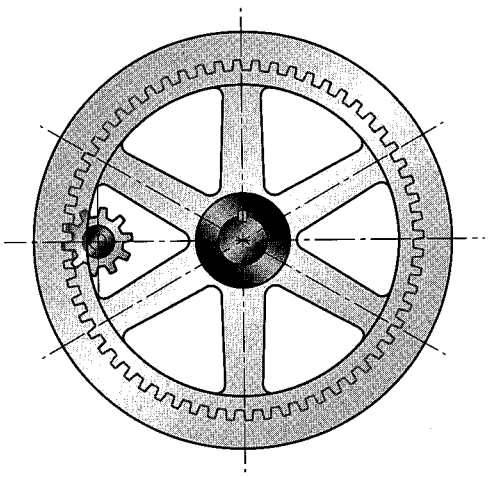


Fig. P6-8

6-8. El pequeño engrane de un tren interno de engranes mostrado en la figura es impulsado por un motor de 500 kW a 30 Hz. El pequeño engrane tiene 10 dientes y el mayor, que es impulsado, tiene 30. Por tanto, el engrane mayor gira a 10 Hz. Si el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa, ¿cuáles son los tamaños requeridos para las flechas?

6-9. Una flecha de aluminio de 40 mm de diámetro con carga cíclica de amplitud constante soporta 5×10^8 ciclos de servicio con un factor de seguridad de 1.8. Use los datos en la figura 2-26 y divida el esfuerzo normal dado en esta figura entre 2. Como se muestra en el capítulo 12, esta es una buena hipótesis conservadora (es decir, $\tau = \sigma/2$). Encuentre el par de torsión que puede aplicarse a esta flecha.

6-10. (a) Diseñe una flecha hueca de acero para transmitir 300 hp a 75 rpm sin exceder un esfuerzo cortante de 8000 psi. Use 1.2:1 como relación del diámetro exterior al diámetro interior. (b) ¿Qué flecha maciza podría usarse en vez de la hueca?

6-11. Un motor de 100 hp impulsa una flecha por medio de un engrane en A a 26.3 rpm. Engranes cónicos en B y C impulsan mezcladoras de cemento. Si la potencia requerida de la mezcladora impulsada por el engrane B es de 25 hp y para la mezcladora impulsada por C es de 75 hp, ¿cuáles son los diámetros requeridos para las flechas? El esfuerzo cortante permisible en la flecha es de 6000 psi. Un número suficiente de chumaceras se proporciona para evitar la flexión.

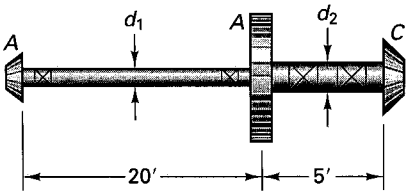


Fig. P6-11

Sección 6-7

6-12. Una flecha circular maciza de 150 mm de diámetro se maquina a un diámetro de 75 mm a lo largo de una parte de la flecha. Si en el punto de transición de los dos diámetros el radio del filete es de 12 mm, ¿qué esfuerzo cortante máximo se desarrolla cuando se aplica un par de torsión de 2700 N·m a la flecha? ¿Cuál será el esfuerzo cortante máximo si el radio del filete se reduce a 3 mm?

6-13. Encuentre el radio requerido de un filete para la unión de una flecha de 6 in de diámetro con otra flecha de 4 in de diámetro si el conjunto transmite 110 hp a 100 rpm y el esfuerzo cortante máximo está limitado a 8000 psi.

6-14. Dos flechas escalonadas de diferentes tamaños están hechas del mismo acero al níquel. En una de ellas el diámetro mayor de 40 mm se reduce a 20 mm. En la transición entre las dos flechas, se introduce un filete semicircular con radio de 1 mm (véase la figura). La segunda flecha, igualmente maquinada tiene 30 mm de diámetro en su parte mayor y 18 mm en la otra. Un filete en la transición tiene un radio de 2 mm. ¿Cuál ensamble de flechas es más adecuado desde el punto de vista del esfuerzo?

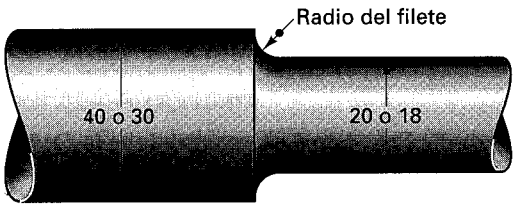


Fig. P6-14

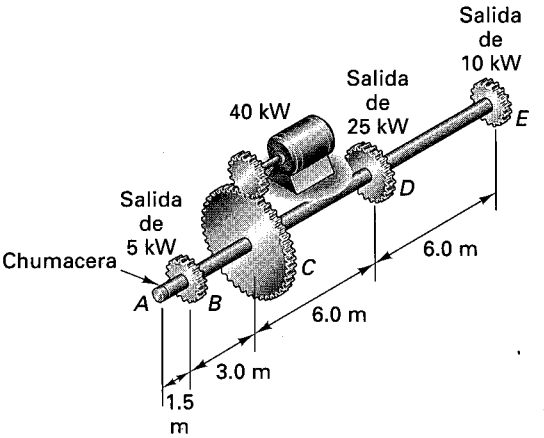


Fig. P6-16

Sección 6-8

6-15. ¿Cuál debe ser la longitud de un alambre de aluminio de 6 mm de diámetro para que pueda ser torcido una vuelta completa sin exceder un esfuerzo cortante de 42 MPa? G =27 GPa.

6-16. La flecha maciza de acero de 50 mm de diámetro mostrada en la figura es impulsada por un motor de 40 kW a 3 Hz. (a) Encuentre los esfuerzos torsionantes máximos en las secciones AB, BC, CD y DE de la flecha. (b) Determine el ángulo total de torsión entre A y E. Sea G = 84 GPa.

6-17. Una barra hueca de acero de 6 in de longitud se usa como resorte torsional. La razón de los diámetros interior a exterior es de 0.5. La rigidez requerida para este resorte es de 0.10 de grado por 1 lb-in de par de torsión. (a) Determine el diámetro exterior de esta barra. $G = 12 \times 10^6$ psi. (b) ¿Cuál es la constante torsional de resorte para esta barra?

6-18. Una flecha maciza de aluminio de 60 mm de diámetro y 1000 mm de longitud va a ser reemplazada por una flecha tubular de acero con el mismo diámetro exterior tal que la nueva flecha ni exceda el doble del esfuerzo cortante máximo ni el ángulo de torsión de la flecha de aluminio. (a) ¿Cuál debe ser el radio interior de la flecha tubular de acero? Sean $G_{Al} = 28$ GPa y $G_{Ac} = 84$ GPa. (b) ¿Cuál de los dos criterios es válido?

6-19. Dos engranes están unidos a dos flechas de acero de 60 mm de diámetro, como se muestra en la figura. El engrane en B tiene un diámetro de paso de 200 mm; el engrane en C tiene un diámetro de paso de 400 mm. ¿Qué ángulo girará el extremo A si en A se aplica un par de torsión de 600 N·m y el extremo D de la segunda flecha no puede girar? $G = 84$ GPa.

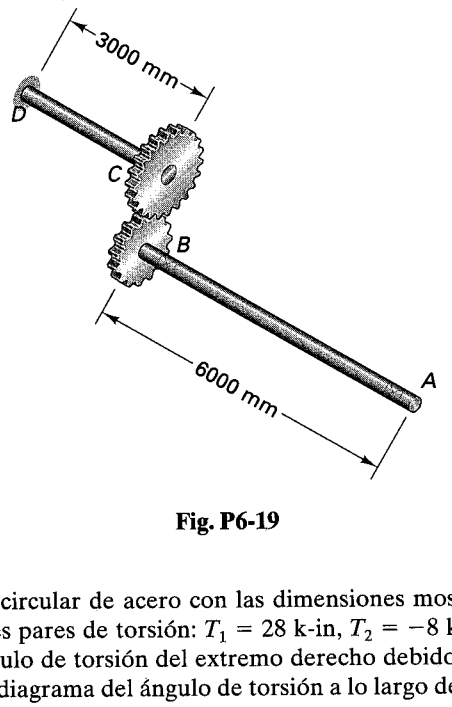


Fig. P6-19

6-20. Una flecha circular de acero con las dimensiones mostradas en la figura está sometida a tres pares de torsión: $T_1 = 28$ k-in, $T_2 = -8$ k-in y $T_3 = 10$ k-in. (a) ¿Cuál es el ángulo de torsión del extremo derecho debido a los pares aplicados? (b) Dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la flecha. Sea $G = 12 \times 10^6$ psi.

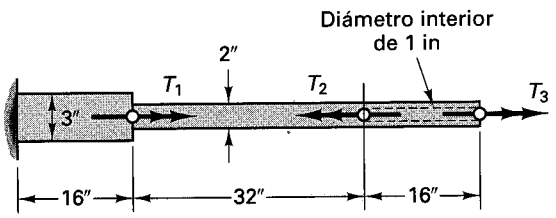


Fig. P6-20

6-21. Un dinamómetro se emplea para calibrar la entrada requerida de potencia para operar un ventilador a 20 Hz. El dinamómetro consta de una flecha maciza de 12 mm de diámetro y de dos discos a 300 mm entre sí unidos a la flecha, como se muestra en la figura. Un disco está unido a través de un tubo al extremo de entrada; el otro está cerca del extremo de salida. El desplazamiento relativo de esos dos discos registrado por luz estroboscópica es de 6° 0′. Calcule la entrada de potencia en hp requerida para operar el ventilador a la velocidad dada. Sea $G = 84$ GPa.

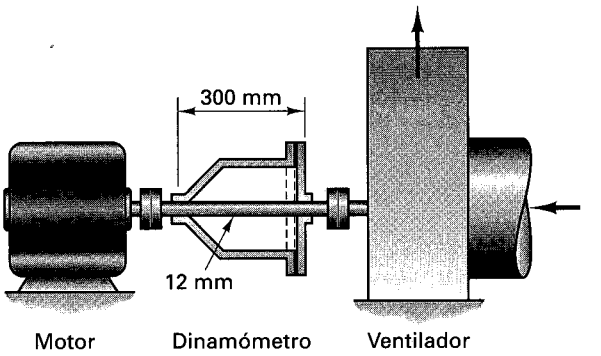


Fig. P6-21

6-22. Un tubo de aleación de níquel tiene 30 mm de diámetro exterior y 20 mm de diámetro interior. El material tiene una $G = 70$ MPa. Determine la flexibilidad torsional para un tubo de 1 m de longitud.

6-23. Un disco circular delgado con masa $m = 2$ kg está unido a una flecha vertical de 500 mm de longitud que cuelga desde un extremo fijo en la parte superior, como se muestra en la figura. (a) Si la flecha está hecha de acero ($G = 83$ MPa) y tiene 24 mm de diámetro, ¿cuál es la frecuencia de vibración torsional del sistema? La ecuación para la frecuencia fundamental de vibración es $f_n = (1/2\pi)\sqrt{k_t/I_{mz}}$, donde el momento de inercia de masa del disco respecto al eje z es $I_{mz} = m\,R^2/2$. (b) ¿Cuál es el diámetro requerido de la flecha para que ésta desarrolle la misma frecuencia de vibración si está hecha de aluminio ($G = 26$ GPa)?

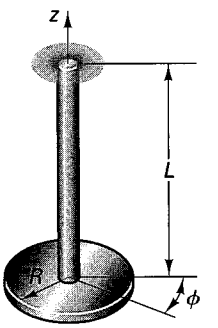


Fig. P6-23

6-24. Una flecha maciza de acero ahusada está fija rígidamente a un soporte en un extremo y en el otro está sometida a un par de torsión T (véase la figura). Encuentre la rotación del extremo libre si $d_1 = 150$ mm, $d_2 = 50$ mm, $L = 500$ mm y $T = 3$ kN·m. Suponga que son aplicables las hipótesis usuales relativas a la deformación unitaria en flechas circulares prismáticas sometidas a un par de torsión, y sea $G = 200$ GPa. (b) Determine la flexibilidad torsional de la flecha.

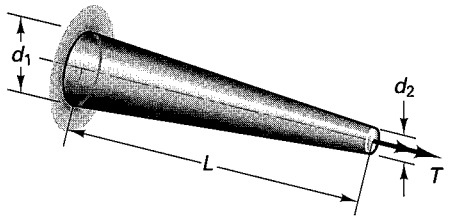


Fig. P6-24

6-25. Un cono truncado elástico de pared delgada tiene las dimensiones mostradas en la figura. (a) Determine la rigidez torsionante de este miembro (es decir, la magnitud del par de torsión por unidad de ángulo de torsión). El módulo cortante para el material es G. (b) ¿Cuál es la flexibilidad torsionante de este miembro?

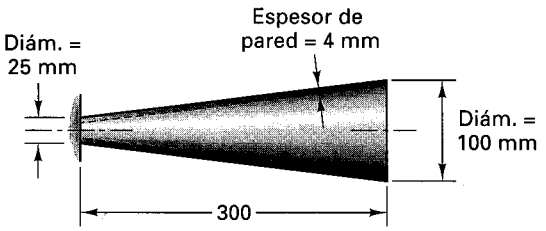


Fig. P6-25

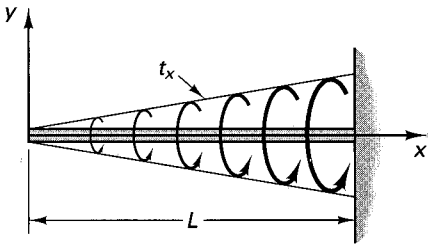


Fig. P6-26

6-26. La carga sobre un tubo de control del alerón de un avión puede idealizarse por un par de torsión $t_x = kx$ in-lb/in uniformemente variable, en donde k es una constante (véase la figura). Determine el ángulo de torsión del extremo libre. Suponga I_pG constante.

6-27. Un par de torsión aplicado a una flecha circular es idealizado como uniformemente variable desde el extremo empotrado; véase la figura. Determine el ángulo de torsión del extremo derecho. La rigidez torsional I_pG de la flecha es constante.

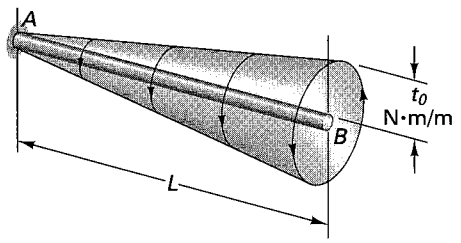


Fig. P6-27

6-28. Una flecha circular de 2000 mm de longitud empotrada en un extremo y libre en el otro, está sometida a un par de torsión variable distribuido linealmente que actúa a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura. La rigidez torsional I_pG de la flecha es constante. Determine el ángulo de torsión en el extremo libre debido al par de torsión aplicado.

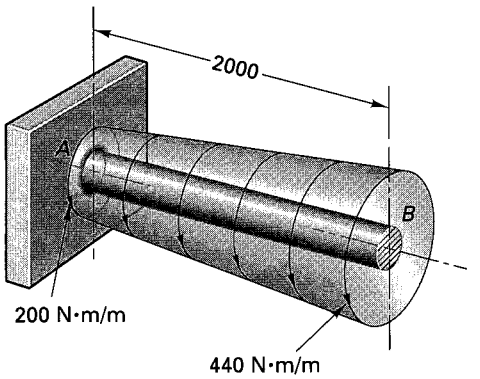


Fig. P6-28

Sección 6-9

6-29. Un tubo de aluminio se ajusta a presión sobre una barra de acero, formando una flecha que actúa como una unidad. Esta flecha tiene 1 m de largo y la sección transversal mostrada en la figura. Suponga comportamiento elástico y sea $E_{ac} = 3E_{Al} = 210$ GPa. (a) ¿Qué esfuerzos se generan al aplicar un par de torsión $T = 20$ kN·m? Muestre la distribución del esfuerzo cortante sobre una gráfica. (b) Determine la rigidez y flexibilidad torsionales de la flecha.

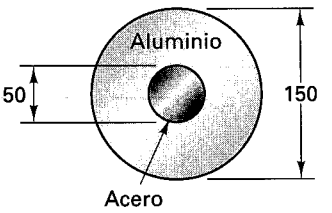


Fig. P6-29

6-30. Un tubo de 50 mm de diámetro exterior y 2 mm de espesor está unido en sus extremos por medio de bridas rígidas a una flecha maciza de 25 mm de diámetro, como se muestra en la figura. Si el tubo y la flecha están hechos del mismo material linealmente elástico, ¿qué parte del par de torsión aplicado T es tomada por el tubo?

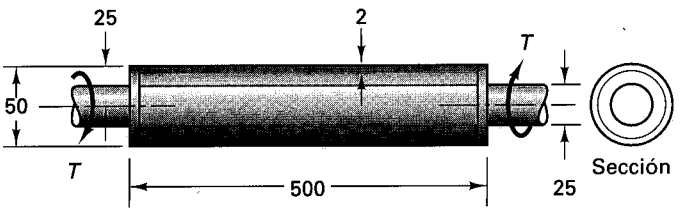


Fig. P6-30

6-31. Suponga que en el problema 6-30, antes de soldar las placas de extremo rígidas, la flecha está sometida a un par de torsión de 200 N·m y se mantiene en esta condición durante el proceso de soldado. ¿Qué par de torsión residual permanecerá en la flecha al liberar el par?

6-32. Usando el método del desplazamiento, determine las reacciones para la flecha mostrada en la figura 6-21 para los siguientes datos: $T = 40$ k-in, $L_1 = 15$ in, $L_2 = 10$ in, $(I_p)_1 = 2\pi$ in^4, $(I_p)_2 = \pi/2$ in^4 y $G_1 = G_2 = G = 12 \times 10^3$ ksi. Dibuje también el diagrama del ángulo de torsión para la flecha a lo largo de su longitud.

6-33. Considere la misma flecha circular elástica escalonada mostrada en las dos figuras alternativas. Usando el método de las fuerzas, determine el ángulo de torsión ϕ_{ab} en a causado por la aplicación de un par de torsión unitario en b y demuestre que es igual a ϕ_{ba}, que es el ángulo de torsión en b debido a la aplicación de un par de torsión unitario en a. Sea $(I_p)_1 = 3(I_p)_2$. (Véase el problema 4-6.)

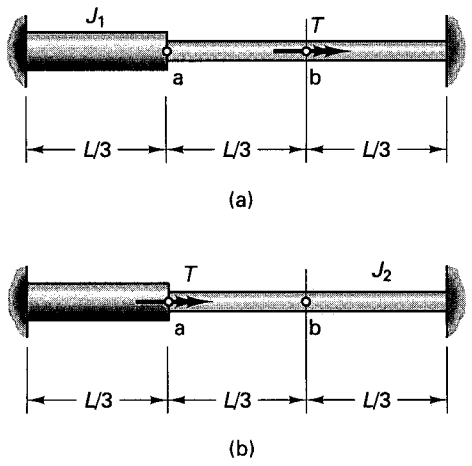


Fig. P6-33

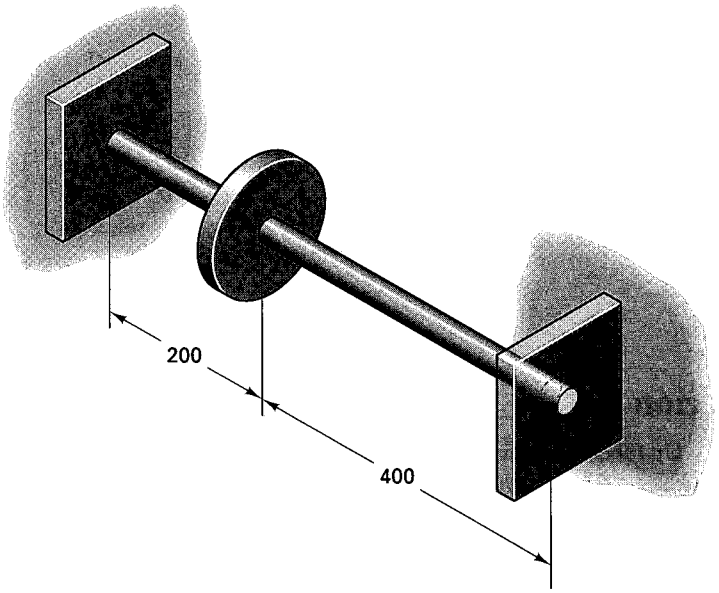


Fig. P6-34

6-34. Un disco circular con masa de 50 lb está unido en un punto situado en el tercio del claro de una flecha maciza de acero de 600 mm de longitud, fija en ambos extremos como se muestra en la figura. La flecha tiene 40 mm de diámetro. Determine la frecuencia torsional fundamental del sistema. Desprecie el peso de la flecha. Para la fórmula de la frecuencia, véase el problema 6-23.

6-35. (a) Usando el método de las fuerzas, determine las reacciones en la flecha circular escalonada mostrada en la figura. Los pares de torsión aplicados son $T_1 = 600$ lb-in, $T_2 = 500$ lb-in y $T_3 = 200$ lb-in. Los diámetros de la flecha son $d_1 = 2.83$ in y $d_2 = 2.38$ in. (b) Dibuje el diagrama de ángulo de torsión para la flecha a lo largo de su longitud. Sea $E = 10 \times 10^3$ ksi.

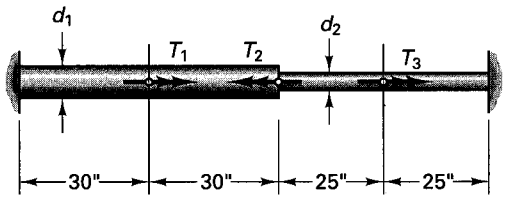


Fig. P6-35

6-36. Una flecha circular elástica fija en ambos extremos está sometida a un par de torsión uniformemente distribuido t_o por unidad de longitud a lo largo de la mitad de su claro, como se muestra en la figura. (a) Usando el método de las fuerzas, encuentre las reacciones. (b) Determine el ángulo de torsión máximo y dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha. La rigidez torsional I_pG de la flecha es constante.

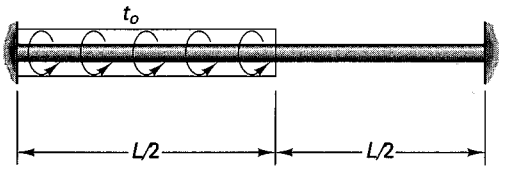


Fig. P6-36

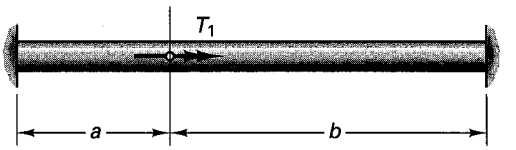


Fig. P6-40

6-37. Suponga que la flecha en el problema 6-27 está fija en ambos extremos. (a) Usando el método de las fuerzas, determine las reacciones. (b) Encuentre el ángulo de torsión máximo y dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha.

Sección 6-10

6-38. Resuelva el problema 6-27 usando la ecuación 6-26.

6-39. Resuelva el problema 6-28 usando la ecuación 6-26.

6-40. Usando la ecuación 6-26 y las condiciones de continuidad (véase la Sección 4-7) o las funciones de singularidad, determine las reacciones en los extremos empotrados causadas por la aplicación del par de torsión T_1; véase la figura. Dibuje los diagramas del par $T(x)$ y del ángulo de torsión $\varphi(x)$.

6-41. Usando la ecuación 6-26 y las condiciones de continuidad (véase la Sección 4-7) o las funciones de singularidad, determine las reacciones causadas por un par de torsión uniformemente distribuido t_o a lo largo de media longitud de flecha, como se muestra en la figura para el problema 6-36. Dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha.

Sección 6-11

6-42. Una flecha circular escalonada tiene las dimensiones mostradas en la figura. (a) Usando un método de energía, determine el ángulo de torsión en el extremo cargado. Se da G. (b) Verifique el resultado usando la ecuación 6-16.

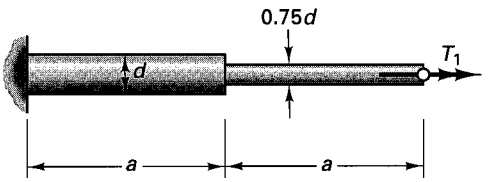


Fig. P6-42

Sección 6-12

6-43. Un cople está hecho con ocho pernos de alta resistencia de $\frac{3}{4}$ in de diámetro localizados sobre un círculo de 10 in de diámetro. (a) Calcule el par de torsión que puede transmitirse por este cople si el esfuerzo cortante permisible en los pernos es de 10.5 ksi. (b) Encuentre los hp que pueden transmitirse cuando la flecha y los coples están girando a 300 rpm.

6-44. Un cople bridado tiene seis pernos con área transversal de 0.2 in^2 cada uno, localizados en un círculo de 8 in de diámetro, más seis pernos con área transversal de 0.5 in^2 cada uno, localizados en un círculo de 5 in de diámetro. Si el esfuerzo cortante permisible en cada perno es de 16 ksi, ¿cuál es la capacidad por par de torsión de este cople?

Sección 6-13

6-45. Una probeta hecha con una barra de acero SAE 1060 de 20 mm de diámetro y 450 mm de longitud falló bajo un par de torsión de 800 N·m. ¿Cuál es el módulo de ruptura de este acero en torsión?

6-46. Una flecha maciza de acero de 20 mm de diámetro y 1000 mm de longitud es torcida de manera que le queda un núcleo elástico de 16 mm de diámetro; véase la figura. (a) Determine el par de torsión aplicado que causa el estado de fluencia. (b) Encuentre la distribución del esfuerzo residual que se tendrá al retirar el par. Dibuje el patrón de esfuerzo residual con los valores críticos. Suponga las propiedades mecánicas idealizadas para el material dadas en la figura 6-30(b) del ejemplo 6-13.

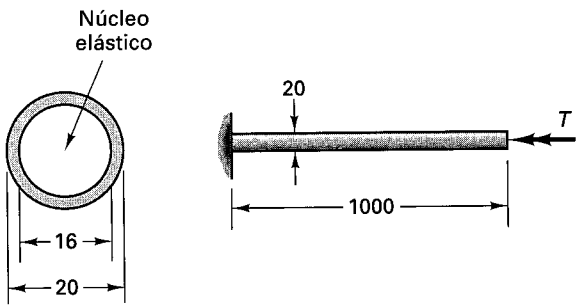


Fig. P6-46

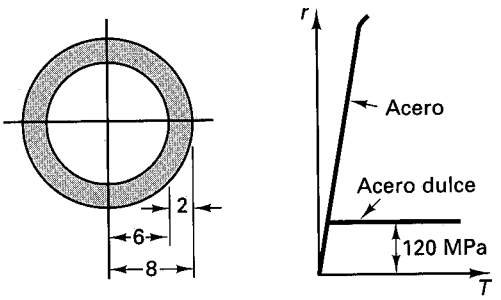


Fig. P6-48

6-47. Si la flecha en el problema 6-46 es torcida en su extremo libre un ángulo $\phi = 25$ rad y luego es liberada, ¿cuál será el ángulo residual ϕ? Encuentre también los esfuerzos cortantes residuales. Dibuje el patrón de esfuerzos residuales con los valores críticos.

6-48. Un tubo delgado de acero al níquel es ajustado en caliente sobre una barra circular maciza de acero dulce. Las dimensiones transversales de la flecha compuesta se muestran en mm en la figura. Determine el par de torsión desarrollado por esta flecha si el esfuerzo cortante máximo medido sobre la superficie es de 480 MPa. Para ambos aceros, $G = 120$ GPa. Sin embargo, el acero dulce fluye en cortante a 120 MPa, mientras que el acero al níquel permanece esencialmente linealmente elástico en el rango de 600 MPa. Diagramas idealizados τ-γ para los dos materiales están ilustrados en la figura.

6-49. Si en el problema 6-48 es liberado el par de torsión aplicado, (a) ¿cuál será el patrón de esfuerzos residuales? Dibuje los resultados con los valores críticos. (b) Determine el ángulo de torsión residual por unidad de longitud de la flecha.

Sección 6-14

6-50. Compare el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión para miembros de iguales longitudes y áreas transversales con sección cuadrada, sección rectangular y sección circular. Todos los miembros están sometidos al mismo par de torsión. La sección circular tiene 100 mm de diámetro y la sección rectangular tiene 25 mm de ancho.

6-51. Compare la resistencia torsional y la rigidez de tubos de pared delgada de sección transversal circular con material linealmente elástico con y sin una ranura longitudinal (véase la figura).

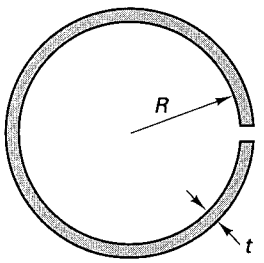


Fig. P6-51

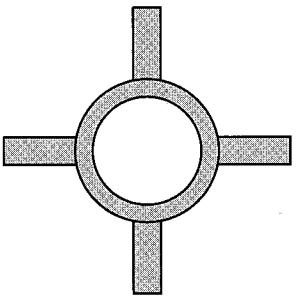


Fig. P6-52

6-52. Una flecha agitadora está hecha con cuatro barras rectangulares soldadas a un tubo circular, como se muestra en la figura. El tubo tiene 4 in de diámetro exterior y $\frac{1}{2}$ in de espesor de pared; cada una de las barras rectangulares es de 1×2 in. Si el esfuerzo cortante elástico máximo, despreciando las concentraciones de esfuerzos, está limitado a 10 ksi, ¿qué par de torsión T puede aplicarse a este miembro?

6-53. Usando la analogía del montón de arena, determine el momento de torsión último de resistencia para una sección rectangular de a por $2a$. (*Sugerencia:* Primero, usando la analogía, verifique la ecuación 6-29 para una flecha circular maciza, donde la altura del montón es $c\tau_{yp}$. Dos veces el volumen incluido por el montón da los resultados requeridos.)

6-54. Un miembro sometido a torsión tiene la sección transversal mostrada en la figura. Estime la constante de torsión $I_{p\,\text{equiv}}$.

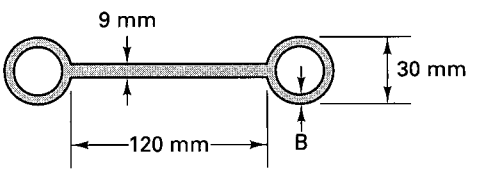


Fig. P6-54

6-55. Considere tres secciones transversales: un círculo, una elipse y un triángulo equilátero con las dimensiones mostradas. (a) Aplique la analogía de la membrana y localice los puntos de esfuerzo máximo. (b) Determine $\tau_{máx}$ y ϕ para las secciones. Sea $T = 1000$ N·m. Las fórmulas para la sección elíptica son $\tau_{máx} = 2T/(\pi ab^2)$ y $\phi = TL/KG$, donde $K = \pi a^3 b^3/(a^2 + b^2)$; para la sección triangular equilátera son $\tau_{máx} = 20T/a^3$ y $K = a^4\sqrt{3}/80$; para ambos casos, $\phi = TL/KG$. (Según R. J. Roark en *Formulas for Stress and Strain*, Nueva York: McGraw-Hill, 1943.) Sean $a = 20$ mm, $b = r = 15$ mm.

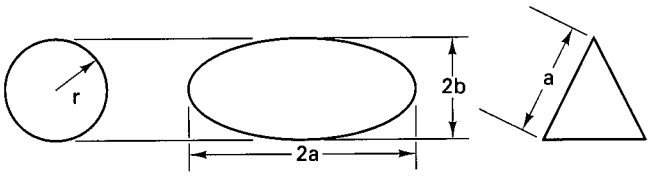


Fig. P6-55

6-56. Sean cada una de las tres áreas transversales de los miembros en el problema 6-55 iguales a 1200 mm^2. Determine $\tau_{máx}$ en cada caso. Recuerde que el área de una elipse es $A = \pi ab$.

6-57. Determine los tamaños relativos de las secciones transversales en el problema 6-55 para que tengan la misma rigidez torsional. Recuerde, como en el problema precedente, que el área de una elipse es $A = \pi ab$.

Sección 6-16

6-58. Para un miembro con la sección transversal mostrada en la figura, encuentre los esfuerzos cortantes máximos y el ángulo de torsión por unidad de longitud debido a un par de torsión aplicado de 1000 lb-in. Desprecie la concentración de esfuerzos. Comente sobre las ventajas ganadas al incrementar el espesor de la pared sobre parte de la sección transversal.

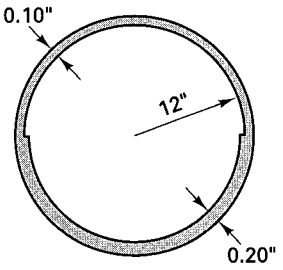


Fig. P6-58

6-59. Una sección transversal de pared delgada en forma de una superficie de sustentación simplificada se muestra en la figura. Determine el par que ella puede soportar bajo un esfuerzo cortante máximo de 20 MPa. Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos. ¿Se tiene alguna ventaja al aumentar el espesor de las placas inclinadas? Use las dimensiones de las líneas centrales

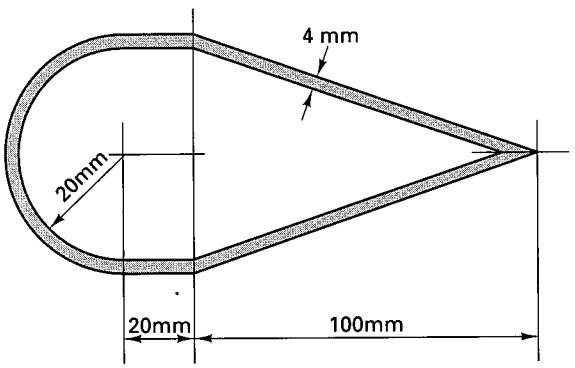


Fig. P6-59

6-60. Una flecha con la sección transversal mostrada en la figura está sometida a un par de torsión $T = 150$ N·m. (a) Estime el porcentaje de par tomado por cada una de las dos componentes transversales y calcule los esfuerzos cortantes máximos en cada parte, despreciando concentraciones de esfuerzos. (b) Encuentre el ángulo de torsión por unidad de longitud generado por el par de torsión aplicado. Sea $G = 25 \times 10^3$ GPa.

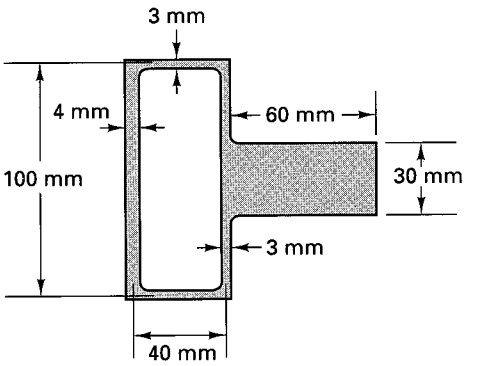


Fig. P6-60

6-61. Una pieza de aluminio extruido está hecha en forma de caja rectangular. Determine la resistencia elástica torsional de este miembro si el esfuerzo cortante está limitado a 120 MPa. ¿Cuál es la flexibilidad torsional de una caja con 400 mm de longitud?

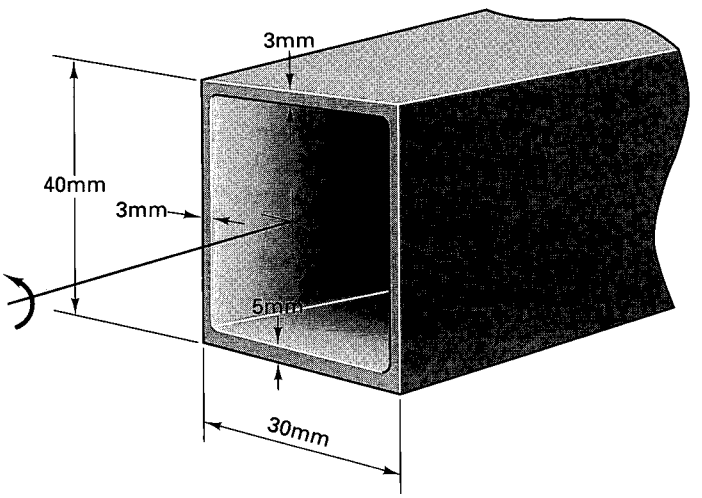


Fig. P6-61

6-62. Una flecha empotrada en ambos extremos está hecha con una barra cuadrada maciza de 20 mm por lado y un tubo cuadrado de 30 mm por lado soldados en la unión de las dos secciones a una placa que forma un apuntador volado en la dirección horizontal; véase la figura. El tubo cuadrado tiene un espesor de pared de 1.5 mm. Determine el desplazamiento vertical de la punta del apuntador causado por la aplicación de los dos pares de torsión T_1 y $2T_1$ cuando el esfuerzo cortante máximo en la flecha es de 40 MPa. Desprecie las concentraciones de esfuerzos y sea G =200 GPa.

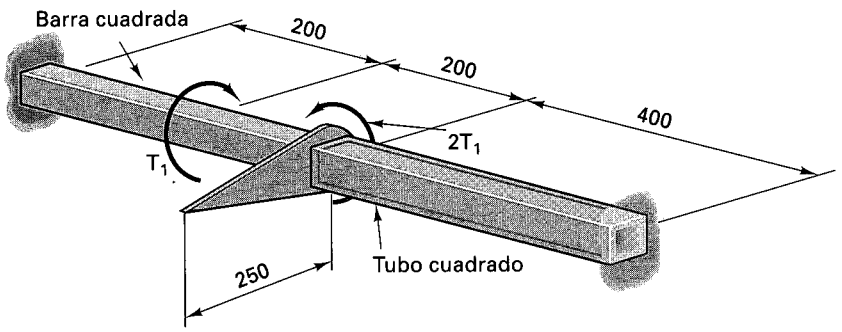


Fig. P6-62

7

Estática de vigas

7-1. Introducción

En muchos casos del diseño estructural y de máquinas, los miembros deben resistir fuerzas aplicadas lateral o transversalmente a sus ejes. Tales miembros se denominan *vigas*. Los miembros principales que soportan pisos de edificios son vigas, igualmente el eje de un vehículo es también una viga. Muchas flechas de maquinaria actúan simultáneamente como miembros en torsión y como vigas. Con los materiales modernos, la viga es un miembro dominante en la construcción. El objetivo principal de este capítulo es la determinación del sistema de fuerzas internas necesarias por equilibrio de cualquier segmento de viga.

Para una viga con todas las fuerzas en el mismo plano (es decir, un problema de viga *plana*) puede desarrollarse un sistema de *tres* componentes de fuerza interna en una sección. Estas son la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flexionante. La determinación de esas cantidades es el objetivo de este capítulo, el cual está dividido en cuatro partes. En la parte A se repasan los métodos para calcular las reacciones; en las partes B y C se analizan dos procedimientos diferentes para calcular la fuerza cortante interna V y el momento flexionante M, así como sus representaciones gráficas a lo largo de una viga. En la parte D se presenta un tema opcional sobre funciones de singularidad para resolver tales problemas.

Se dará atención principal a las vigas simples, que, por conveniencia, se mostrarán en posición horizontal. Se prestará también atención a los problemas relacionados con marcos planos que resisten fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes. Sólo en los sistemas estáticamente determinados serán analizadas plenamente esas cantidades. Se requieren procedimientos especiales, que se desarrollarán en capítulos subsecuentes, para determinar las reacciones en los problemas estáticamente indeterminados y obtener soluciones completas. La extensión a miembros de sistemas tridimensionales, donde se tienen *seis* componentes posibles de fuerza interna, se presentará en capítulos posteriores según se requiera, y se confiará en los conocimientos de estática que tenga el lector. En tales problemas, en una sección de un miembro puede haber una fuerza axial, dos componentes de fuerza cortante, dos componentes de momento flexionante y un par de torsión.

Parte A CÁLCULO DE REACCIONES

7-2. Convenciones diagramáticas para soportes y cargas[1]

Al estudiar las estructuras planas es esencial adoptar convenciones diagramáticas para los soportes y las cargas, ya que son posibles varios tipos de soportes y una gran variedad de cargas. El respetar tales convenciones evita confusión y reduce al mínimo las posibilidades de cometer errores. Esas convenciones forman el lenguaje gráfico de los ingenieros.

Existen tres tipos básicos de soportes para las estructuras planas, los cuales se identifican por el tipo de resistencia que ofrecen a las fuerzas actuantes. Un tipo de soporte es el *rodillo* o *eslabón*. Este es capaz de resistir una fuerza en sólo una *dirección específica* que coincide con la *línea de acción*, como se muestra en la figura 7-1. Debe proporcionarse un eslabón si la reacción actúa alejándose de la viga (es decir, no se permite que una viga se levante de su soporte). En tales casos, puede ser conveniente, para mayor claridad, mostrar el rodillo por encima de la viga, lo cual se hará así en este texto.

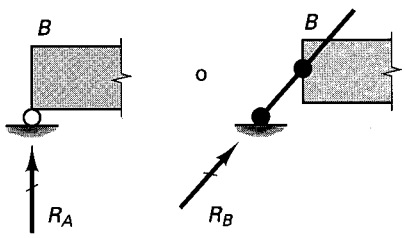


Fig. 7-1 Soporte de rodillo o eslabón.

Ocasionalmente se usa un soporte de rodillo, como en la figura 7-2, que puede resistir sólo una fuerza que actúa perpendicular al plano *CD*.

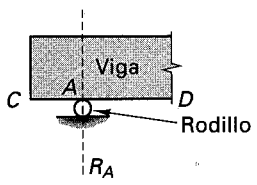


Fig. 7-2 Tipo alternativo de soporte de rodillo.

Otro tipo de soporte es un *pasador*, mostrado diagramáticamente en la figura 7-3. Un soporte de pasador es capaz de resistir una fuerza que actúa en *cualquier dirección* del plano. Por tanto, en general, la reacción en dicho soporte puede tener dos componentes, una en la dirección horizontal y otra en la vertical. A diferencia de la razón aplicable al rodillo o eslabón, la razón entre las componentes reactivas del soporte de pasador *no es fija*.

[1]Ésta y la siguiente sección son un repaso informal de la estática.

Para determinar esas dos componentes deben usarse dos ecuaciones de estática.

El tercer tipo de soporte es capaz de resistir una fuerza en cualquier dirección *y es también capaz de resistir un momento o par*. Físicamente, tal soporte se obtiene empotrando la viga en un muro o soldando el extremo de un miembro a la estructura principal. Un sistema de *tres* fuerzas puede existir en tal soporte, dos componentes de fuerza y una de momento. Este soporte se llama *soporte fijo* o *empotramiento* (es decir, el extremo empotrado no puede girar). La convención estándar para indicarlo se muestra en la figura 7-4.

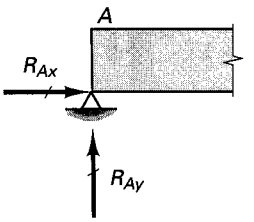


Fig. 7-3 Soporte articulado.

Para diferenciar los empotramientos de los soportes de rodillo y de pasador, los cuales no son capaces de resistir momentos, estos últimos dos se denominan *soportes simples*. En la práctica, los ingenieros usualmente emplean su buen juicio y suponen que uno de los soportes es de uno de los tres tipos, aunque en la construcción real, los soportes para vigas no siempre quedan claramente en esas clasificaciones.

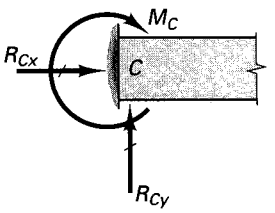


Fig. 7-4 Soporte empotrado.

Las cargas aplicadas consideradas en este capítulo, consisten en fuerzas concentradas mostradas sobre los diagramas por medio de vectores, y las fuerzas distribuidas se muestran por medio de una secuencia de vectores. Un ejemplo de carga uniformemente variable, se ilustra en la figura 7-5, donde se supone que la viga vertical tiene 1 m de ancho y γ (N/m^3) es el peso unitario del líquido. Para este tipo de carga, debe notarse que la intensidad máxima de la carga q_0 (N/m) es aplicable sólo en el fondo y es dos veces mayor que la intensidad promedio de la presión. Por consiguiente, la fuerza total ejercida por esta carga sobre la pared de la viga es $(q_0h/2)$ N, y su resultante actúa a una distancia $h/3$ arriba del fondo del recipiente. Los fondos horizontales de recipientes que contienen líquidos están cargados uniformemente. Varias cargas aerodinámicas son de tipo distribuido.

Debe notarse que, tanto en el diseño de máquinas como en problemas estructurales, surgen numerosas situaciones en que, en sentido global, se aplican momentos concentrados a miembros sometidos a flexión. Un ejemplo se ilustra en la figura 7-6. Note que añadiendo al sistema un voladizo CE a la izquierda con una fuerza P dirigida hacia arriba, se elimina la fuerza axial en el miembro AB, y queda sólo un momento concentrado aplicado en C.

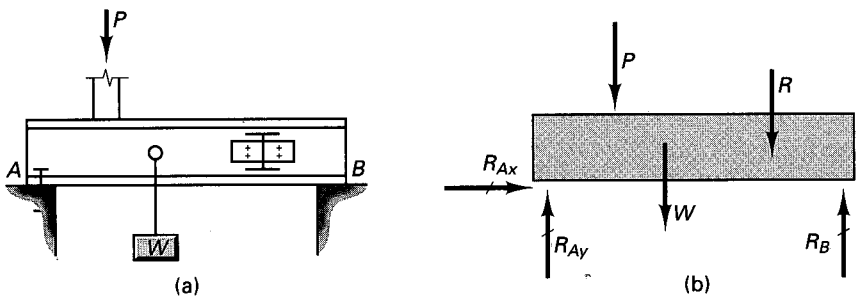


Fig. 7-5 Viga vertical con carga hidráulica uniformemente variable.

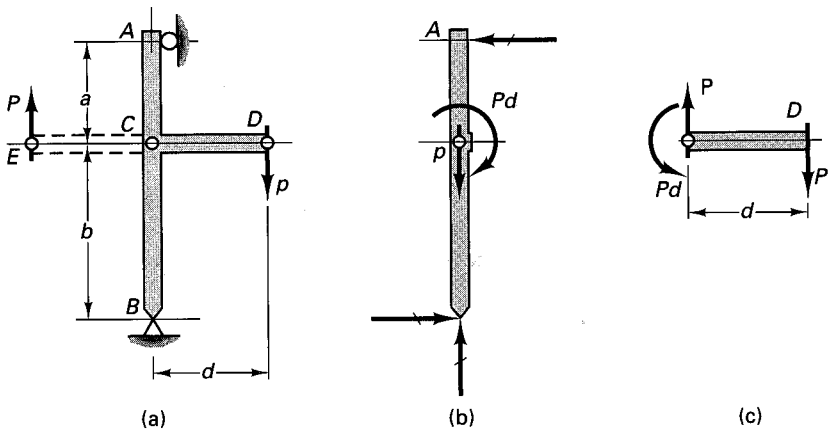


Fig. 7-6 El voladizo *CD* cargado aplica una fuerza axial y un momento concentrado al miembro vertical.

Debe notarse que por la razones dadas en la sección 1-4 para P y en la sección 6-2 para M, en este capítulo se adopta la representación escalar para los vectores de fuerza.

7-3. Cálculos de reacciones en vigas

En este capítulo, todo el trabajo subsecuente con vigas comenzará con la determinación de las reacciones. Cuando todas las fuerzas se aplican en un plano, se dispone de tres ecuaciones de equilibrio estático para el análisis. Estas son $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, y $\Sigma M_z = 0$, que se trataron en el capítulo 1. Para las vigas rectas en posición horizontal, el eje x se tomará en dirección horizontal, el eje y en dirección vertical hacia arriba y el eje z normal al plano del papel. La aplicación de esas ecuaciones a varios problemas de vigas se ilustra en los siguientes ejemplos, los cuales sirven como repaso de este importante procedimiento. La deformación de las vigas, por ser pequeña, se desprecia cuando se aplican las ecuaciones de la estática. En vigas estables, la pequeña cantidad de deformación que tiene lugar, cambia los puntos de aplicación de las fuerzas en forma imperceptible.

Ejemplo 7-1

Encuentre las reacciones en los soportes de la viga simplemente apoyada cargada como se muestra en la figura 7-7(a). Desprecie el peso de la viga.

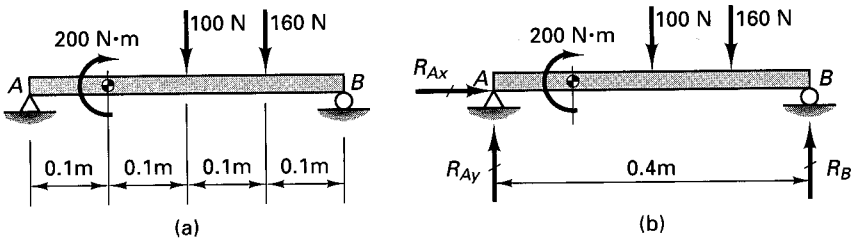


Fig. 7-7

SOLUCIÓN

La carga de la viga ya está dada en forma diagramática. Se examina a continuación la naturaleza de los soportes y las componentes desconocidas de esas reacciones se indican claramente sobre el diagrama. La viga, con las componentes desconocidas de reacción y todas las fuerzas aplicadas, se ha vuelto a dibujar en la figura 7-7(b) para enfatizar este importante paso de la construcción de un diagrama de cuerpo libre. Para diferenciar entre las fuerzas aplicadas y las reacciones, siguiendo la sugerencia hecha en la Sección 1-5, se trazan rayitas sobre los vectores de fuerzas de reacción.

En A pueden existir *dos* componentes desconocidas de reacción, ya que el extremo está articulado. La reacción en B puede actuar sólo en una dirección vertical ya que el extremo está sobre un rodillo. Los puntos de aplicación de todas las fuerzas son anotados cuidadosamente. Después de hacer un diagrama de cuerpo libre de la viga, se aplican las ecuaciones de la estática para obtener la solución.

$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{Ax} = 0$$

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowright + \quad 200 + 100 \times 0.2 + 160 \times 0.3 - R_B \times 0.4 = 0$$

$$R_B = +670\ \text{N} \uparrow$$

$$\Sigma M_B = 0 \curvearrowright + \quad R_{Ay} \times 0.4 + 200 - 100 \times 0.2 - 160 \times 0.1 = 0$$

$$R_{Ay} = -410\ \text{N} \downarrow$$

Comprobación: $\Sigma F_y = 0 \uparrow + \qquad -410 - 100 - 160 + 670 = 0$

Note que $\Sigma F_x = 0$ usa una de las tres ecuaciones independientes de la estática; entonces pueden determinarse sólo dos componentes adicionales de reacción con ayuda de la estática. Si existen más componentes desconocidas de reacción o momento en el soporte, el problema resulta estáticamente indeterminado.

Note que el momento concentrado aplicado en C, entra sólo en las expresiones para la suma de momentos. El signo positivo de R_B indica que su

dirección ha sido supuesta correctamente en la figura 7-7(b). Lo opuesto es el caso de R_{Ay} y la reacción vertical de A actúa hacia abajo. Se dispone de una comprobación del trabajo aritmético si los cálculos se hacen como se muestra.

Ejemplo 7-2

Encuentre las reacciones en la viga parcialmente cargada con una carga uniformemente variable mostrada en la figura 7-8(a). Desprecie el peso de la viga.

SOLUCIÓN

Al examinar las condiciones de soporte, se ve que hay tres componentes de reacción desconocidas; por consiguiente, la viga es estáticamente determinada. Esas componentes y la carga aplicada se muestran en la figura 7-8(b). Note en particular que la configuración del miembro no es importante para el cálculo de las reacciones. Se dibuja un perfil burdo de la forma de la viga para enfatizar este punto. Sin embargo, este nuevo cuerpo está soportado en los puntos A y B de la misma manera que la viga original.

Para calcular las reacciones, la carga distribuida se reemplaza por una fuerza concentrada P equivalente. Ésta pasa por el centroide de las fuerzas distribuidas. Esas cantidades pertinentes están marcadas sobre el croquis de la figura 7-8(b). Después que se ha preparado un diagrama de cuerpo libre, la solución se obtiene aplicando las ecuaciones del equilibrio estático.

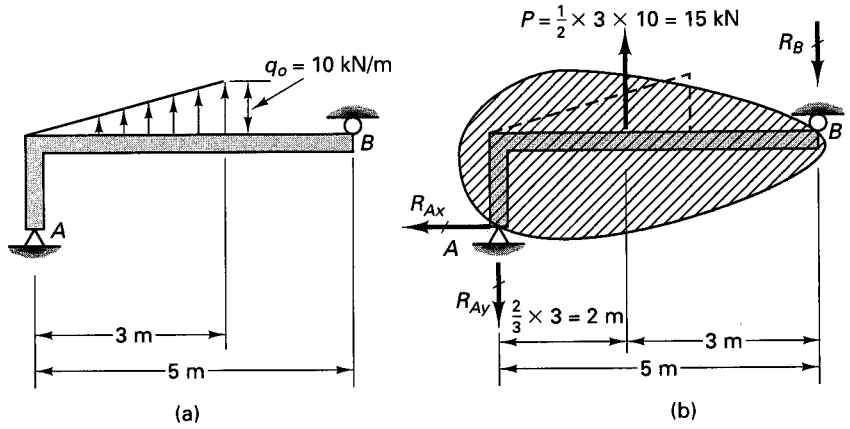


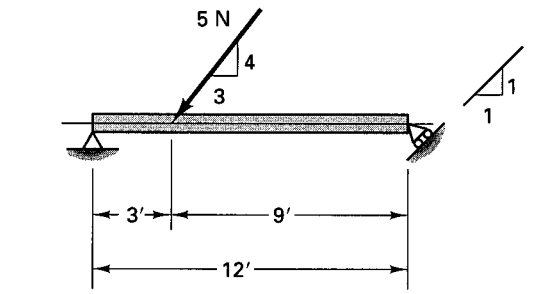
Fig. 7-8

$$\Sigma F_x = 0 \qquad R_{Ax} = 0$$
$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowleft + \qquad + 15 \times 2 - R_B \times 5 = 0 \qquad R_B = 6\ \text{kN} \downarrow$$
$$\Sigma M_B = 0 \curvearrowright + \qquad - R_{Ay} \times 5 + 15 \times 3 = 0 \qquad R_{Ay} = 9\ \text{kN} \downarrow$$

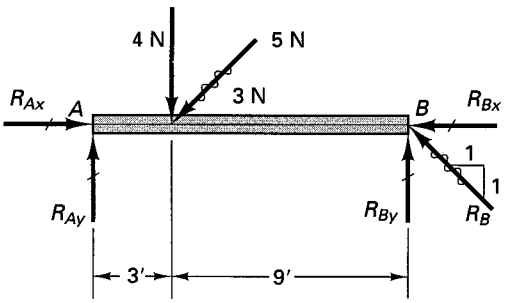
Comprobación: $\Sigma F_y = 0 \uparrow +$ $\qquad - 9 + 15 - 6 = 0$

Ejemplo 7-3

Determine las reacciones en A y B para la viga de la figura 7-9(a) debido a la fuerza aplicada.



(a)



(b)

Fig. 7-9

SOLUCIÓN

En la figura 7-9(b) se muestra un diagrama de cuerpo libre. En A hay dos componentes desconocidas de reacción, R_{Ax} y R_{Ay}. En B, la reacción R_B actúa normalmente al plano de soporte y constituye una sola incógnita. Es conveniente reemplazar esta fuerza por las dos componentes R_{By} y R_{Bx}, que en este problema particular son numéricamente iguales. Similarmente, es mejor reemplazar la fuerza inclinada por las dos componentes mostradas. Esos pasos reducen el problema a uno en que todas las fuerzas son horizontales o verticales. Esto es muy conveniente al aplicar las ecuaciones de equilibrio estático.

$$\Sigma M_A = 0 \curvearrowleft + \qquad 4 \times 3 - R_{By} \times 12 = 0 \qquad R_{By} = 1\text{ k} \uparrow = |R_{Bx}|$$

$$\Sigma M_B = 0 \curvearrowleft + \qquad R_{Ay} \times 12 - 4 \times 9 = 0 \qquad R_{Ay} = 3\text{ k} \uparrow$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow + \qquad R_{Ax} - 3 - 1 = 0 \qquad R_{Ax} = 4\text{ k} \rightarrow$$

$$R_A = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{k}$$

$$R_B = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\text{k}$$

Comprobación: $\Sigma F_y = 0 \uparrow + \qquad + 3 - 4 + 1 = 0$

Algunas veces se insertan *articulaciones* o *juntas con pasadores* en las vigas y marcos. Una articulación es capaz de transmitir sólo fuerzas horizontales y verticales. *Ningún momento puede ser transmitido por una articulación*. Por tanto, el punto donde se localiza una articulación es particularmente conveniente para "separar" una estructura en partes con el fin de calcular las reacciones. Este proceso se ilustra en la figura 7-10. Cada parte de la viga así separada se trata en forma independiente. Cada articulación proporciona un eje adicional respecto al cual pueden tomarse momentos para determinar las reacciones. La introducción de una articu-

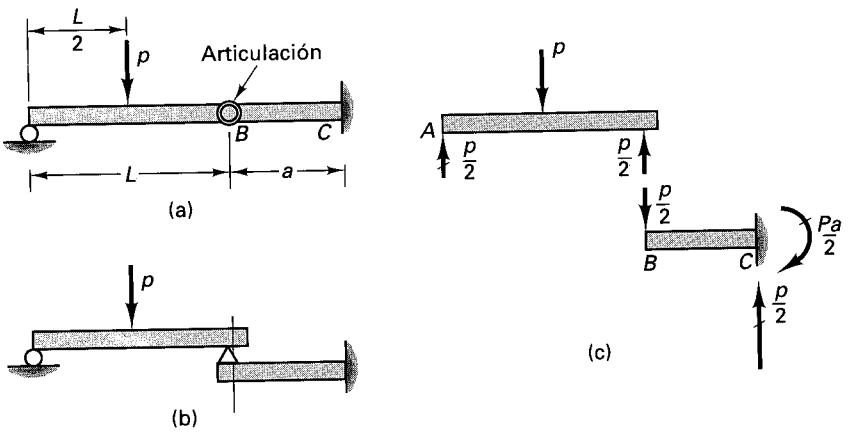


Fig. 7-10 Estructuras "separadas" en articulaciones para determinar las reacciones por estática.

lación o articulaciones en una viga continua convierte al sistema, en muchos casos, en estáticamente determinado. La introducción de una articulación en una viga estáticamente determinada convierte a ésta en inestable. Note que la reacción en la articulación en una viga actúa en *sentido opuesto* al de la otra viga.

Parte B ENFOQUE DIRECTO PARA *P*, *V* Y *M*

7-4. Aplicación del método de las secciones

El objetivo principal de este capítulo es establecer procedimientos para determinar las fuerzas que existen en una sección de una viga o de un marco. Para obtener esas fuerzas se aplicará el método de las secciones, que es el enfoque básico de la mecánica de sólidos. A este procedimiento se le llamará aquí enfoque directo.

El análisis de cualquier viga o marco para determinar las *fuerzas internas* comienza con la preparación de un diagrama de cuerpo libre que muestre tanto las fuerzas aplicadas como las reactivas. Las reacciones pueden siempre calcularse usando las ecuaciones de equilibrio siempre que el sistema sea estáticamente determinado. Si el sistema es estáticamente indeterminado, las reacciones son apropiadamente marcadas y mostradas sobre el cuerpo libre. De esta manera, en todo caso, el sistema completo de fuerzas queda identificado. En los pasos subsecuentes del análisis, *ninguna distinción tiene que hacerse entre las fuerzas aplicadas y las reactivas*. El método de las secciones puede entonces aplicarse a cualquier sección de una estructura, aplicando el concepto previamente empleado de que si *todo el cuerpo* está en equilibrio, *cualquier parte* de él está igualmente en equilibrio.

Para ser más específicos, considere una viga como la de la figura 7-11(a), con ciertas fuerzas concentradas y distribuidas actuando sobre ella. Se supone que se conocen las reacciones, ya que pueden calcularse como en el ejemplo considerado en la Sección 7-3. Las fuerzas aplicadas externamente y las reacciones en el soporte mantienen *todo el cuerpo* en equilibrio. Ahora considere un corte imaginario *X-X normal* al eje de la viga, que la separa en dos segmentos, como se muestra en las figuras 7-11(b) y (c). Note en particular que la sección imaginaria pasa por la carga distribuida y también la separa. Cada uno de esos segmentos de viga es un cuerpo libre que debe estar en equilibrio. Esas condiciones de equilibrio requieren de la existencia de un sistema de fuerzas internas en la sección del corte de la viga. En general, en una sección de dicho miembro, son necesarias una fuerza vertical, una fuerza horizontal y un momento para

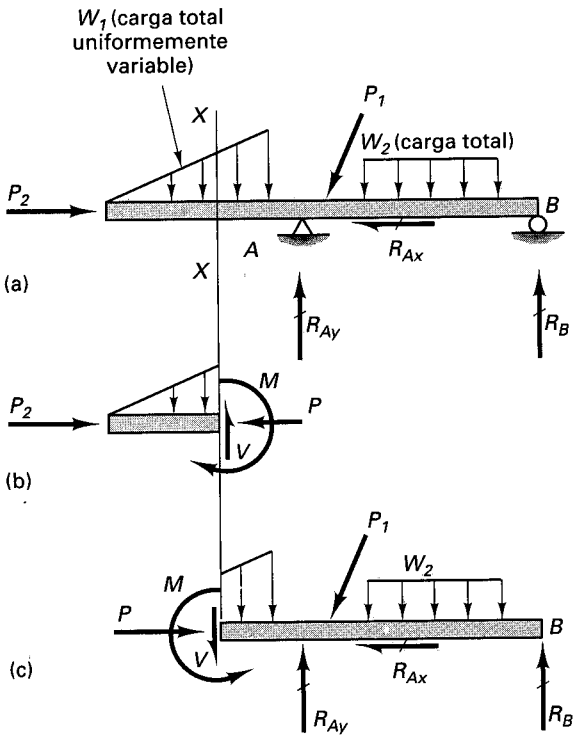


Fig. 7-11 Una aplicación del método de las secciones a una viga estáticamente determinada.

mantener en equilibrio la parte aislada. Esas cantidades adquieren un significado especial en las vigas y por ello se analizarán por separado.

7-5. Fuerza axial en vigas

Una fuerza horizontal como la fuerza P que se muestra en la figura 7-11(b) o (c), puede ser necesaria en una sección de una viga para satisfacer las condiciones de equilibrio. La magnitud y sentido de esta fuerza se obtiene de una solución particular de la ecuación $\Sigma F_x = 0$. Si la fuerza horizontal P actúa hacia la sección, se llama *empuje*; si se aleja de la sección, se llama *tensión axial*. Para referirnos a cualquiera de esas fuerzas se usa el término *fuerza axial*. El efecto de una fuerza axial sobre una sección de un miembro ya se trató en los capítulos 1 y 2, y se mostró que es imperativo aplicar esta fuerza a través del *centroide* del área transversal de un miembro para evitar la flexión. Similarmente, aquí *la línea de acción de la fuerza axial pasará siempre por el centroide del área de la sección transversal de la viga.*

Puede examinarse cualquier sección a lo largo de una viga, respecto a la magnitud de la fuerza axial, en la manera acostumbrada. Usualmente la fuerza de tensión en una sección es considerada positiva. La fuerza axial

(empuje) en la sección X-X en las figuras 7-11(b) y (c) es igual a la fuerza horizontal P_2.

7-6. Fuerza cortante en vigas

En general, para mantener en equilibrio un segmento de una viga, como en la figura 7-11(b), debe haber una fuerza vertical interna V en el corte que satisfaga la ecuación $\Sigma F_y = 0$. Esta fuerza interna V, actuando en *ángulo recto* al eje de la viga, se llama *fuerza cortante. La fuerza cortante es numéricamente igual a la suma algebraica de* ***todas*** *las componentes verticales de las fuerzas externas que actúan sobre el segmento aislado*, pero es opuesta en dirección. Dados los datos cualitativos mostrados en la figura 7-11(b), V es opuesta en dirección a la de la carga hacia abajo a la izquierda de la sección. Esta fuerza cortante puede calcularse también considerando el segmento derecho que se muestra en la figura 7-11(c), la cual es entonces numéricamente igual y opuesta en dirección a la suma de todas las fuerzas verticales, incluyendo las componentes verticales de reacción, a la derecha de la sección. No importa si se usa el segmento derecho o el izquierdo para determinar la fuerza cortante en una sección; aquí rige la simplicidad aritmética. Las fuerzas cortantes en *cualquier otra sección* pueden calcularse en forma similar.

Debe hacerse ahora una observación importante. La *misma* fuerza cortante mostrada en las figuras 7-11(b) y (c) en la sección X-X es opuesta en sentido en los dos diagramas. Para esa *parte* de la carga W_1 hacia abajo a la izquierda de la sección X-X, la viga en la sección proporciona un soporte hacia arriba, para mantener en equilibrio las fuerzas verticales. Inversamente, la porción cargada de la viga ejerce una fuerza hacia abajo *sobre* la viga, como se muestra en la figura 7-11(c). En una sección, deben diferenciarse "dos sentidos" de la fuerza cortante, dependiendo de *qué segmento* de la viga se considere. Esto se infiere del concepto familiar de acción-reacción de la estática y ha ocurrido antes en el caso de una barra cargada axialmente y también en el problema de la torsión.

El sentido de la fuerza cortante en la sección X-X se invertiría en *ambos* diagramas si la carga distribuida W_1 actuase hacia arriba. Con frecuencia, una inversión similar en el sentido de la fuerza cortante tiene lugar en una sección u otra a lo largo de una viga. Por tanto, la adopción de una convención de signos es necesaria para diferenciar entre los dos posibles sentidos de la fuerza cortante. La definición de una fuerza cortante positiva se ilustra en la figura 7-12. Una fuerza interna V *hacia abajo,* actuando en una sección sobre un *segmento izquierdo* aislado de la viga, como en la figura 7-12(a), o una fuerza V *hacia arriba* actuando en la misma sección sobre el *segmento derecho* de la viga, como en la figura 7-12(b), corresponde a una fuerza cortante positiva. Las fuerzas cortantes positivas se muestran en las figuras 7-12(c) y (d) para un elemento aislado de una viga por dos secciones. La fuerza cortante en la sección X-X de la figura 7-11(a) es una fuerza cortante negativa. Note que además de especificar el sentido de una fuerza cortante V, es esencial asociarla con un lado particular de una sección, figura 7-12(c). Esto también sucede con los esfuerzos. (Véase el análisis en las secciones 1-3 y 1-4.)

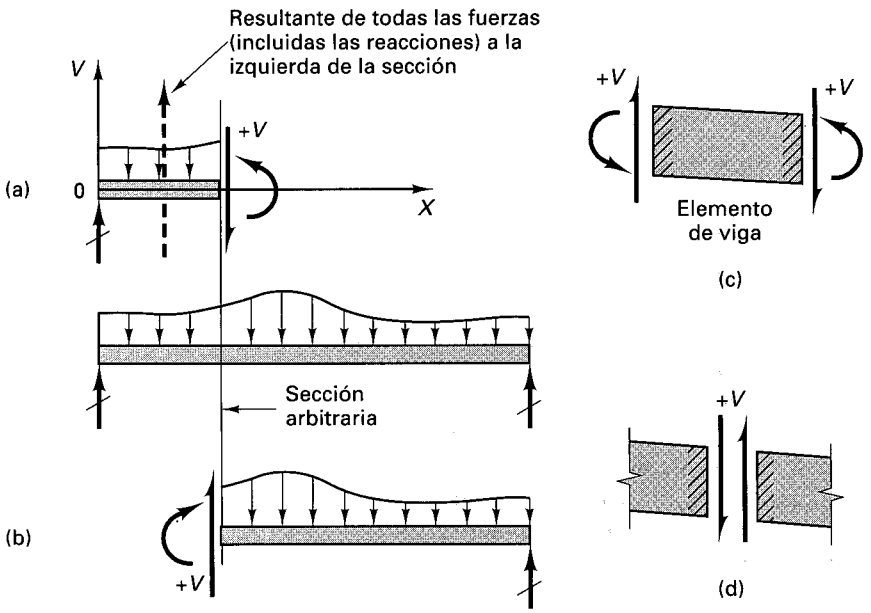


Fig. 7-12 Definición de una fuerza cortante positiva.

En este libro, la convención de signos seleccionada para la fuerza cortante es la que más se utiliza. Históricamente, parece estar basada en dirigir los ejes coordenados como se muestra en la figura 7-13(a). Pocos libros[2] invierten el sentido de la fuerza cortante positiva para ser consistentes con el sentido de los ejes mostrados en la figura 7-13(b).

7-7. Momento flexionante en vigas

Las fuerzas internas axial y cortante en una sección de una viga, satisfacen sólo dos ecuaciones de equilibrio: $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. La condición restante de equilibrio estático para un problema plano es $\Sigma M_z = 0$. Ésta, en general, puede sólo satisfacerse si se desarrolla un par o un *momento interno resistente* dentro del área de la sección transversal del corte, para contrarrestar el momento causado por las fuerzas externas. El momento resistente interno debe actuar en sentido opuesto al momento externo para satisfacer la ecuación gobernante $\Sigma M_z = 0$. Se infiere de la misma ecuación que *la magnitud del momento interno resistente es igual al momento externo*. Esos momentos tienden a flexionar una viga en el plano de las cargas y se denominan *momentos flexionantes*.

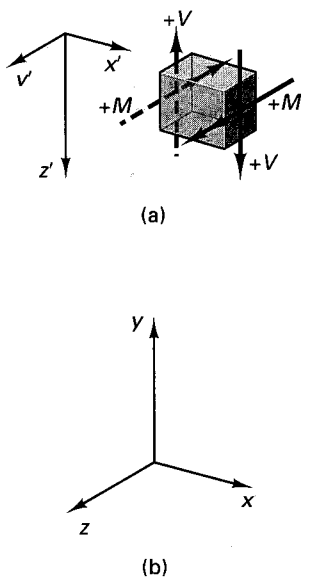


Fig. 7-13 Los sentidos positivos de la fuerza cortante y del momento flexionante definidos en (a) se usan en este texto con las coordenadas mostradas en (b).

[2]S. H. Crandall, N. C. Dahl y T. J. Lardner, *An Introduction to the Mechanics of Solids* (*Una introducción a la mecánica de sólidos*), 2a. ed.(Nueva York: McGraw-Hill, 1978; J. L. Meriam, *Statics* (*Estática*), 2a. ed. Nueva York: Wiley, 1971; E. P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids* (*Introducción a la mecánica de sólidos*) Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1968.

Para determinar un momento flexionante interno que mantiene en equilibrio un segmento de viga, se puede usar la parte izquierda o la derecha del cuerpo libre de la viga, como se muestra en las figuras 7-11(b) y (c). La magnitud del momento flexionante se encuentra sumando los momentos causados por todas las fuerzas multiplicadas por sus respectivos brazos. Las fuerzas internas V y P, así como los pares aplicados, deben incluirse en la suma. Para excluir los momentos causados por V y P, conviene *seleccionar el punto de intersección de esas dos fuerzas internas como el punto respecto al cual se suman los momentos*. Este punto se encuentra sobre el *eje centroidal* de la sección transversal de la viga. En las figuras 7-11(b) y (c), el momento flexionante interno puede ser interpretado físicamente como un jalón sobre las fibras superiores de la viga y un empuje sobre las inferiores.

Si la carga W_1 en la figura 7-11(a) actuase en sentido opuesto, los momentos resistentes en las figuras 7-11(b) *y* (c) se invertirían. Ésta y situaciones similares requieren de la adopción de una convención de signos para los momentos flexionantes. Esta convención está asociada con una acción física definida de la viga. Por ejemplo, en las figuras 7-11(b) y (c), los momentos internos mostrados generan tensión en la parte superior de la viga y compresión en la inferior. Esto tiende a incrementar la longitud de la superficie superior de la viga y a contraer la superficie inferior. Si tales momentos ocurren en forma continua a lo largo de la viga, ésta se deformará con la concavidad hacia abajo. A tales momentos se les asigna un *signo negativo*. Por otra parte, un momento positivo se define como uno que genera compresión en la parte superior y tensión en la parte inferior de la sección transversal de una viga. La concavidad entonces es hacia arriba. Por ejemplo, una viga simple que soporta un grupo de fuerzas hacia abajo se deflexiona hacia abajo como se muestra en forma *exagerada* en la figura 7-14(a). Las definiciones de los momentos flexionantes positivo y negativo se muestran en las figuras 7-14(b) y (c). Note que, igual que para las fuerzas cortantes V, además del sentido de M, es también *esencial asociar el momento con un lado particular de una sección.*

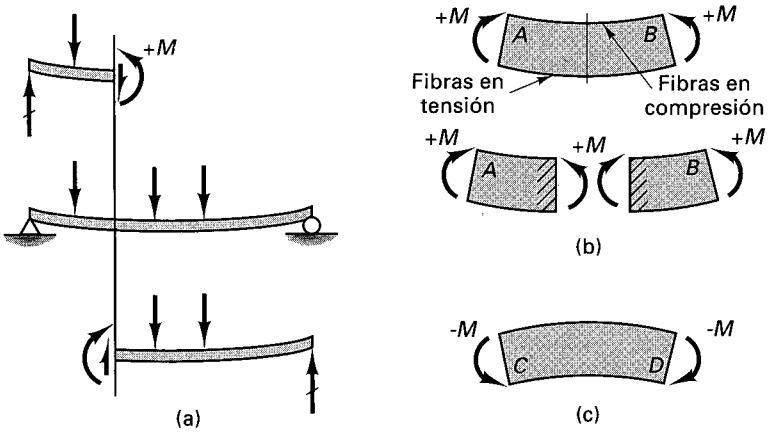


Fig. 7-14 Definición de los signos del momento flexionante.

Ejemplo 7-4

Considere el ejemplo 7-2 y determine el sistema interno de fuerzas en las secciones *a-a* y *b-b*; véase la figura 7-15(a).

SOLUCIÓN

En la figura 7-15(a) se muestra un diagrama de cuerpo libre que incluye las reacciones. Un cuerpo libre a la izquierda de la sección *a-a* en la figura 7-15(b) muestra la ordenada máxima para la parte aislada de la carga aplicada. Por condiciones de equilibrio,

$$V_a = -9 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} \times 10 = -2.33 \text{ kN}$$

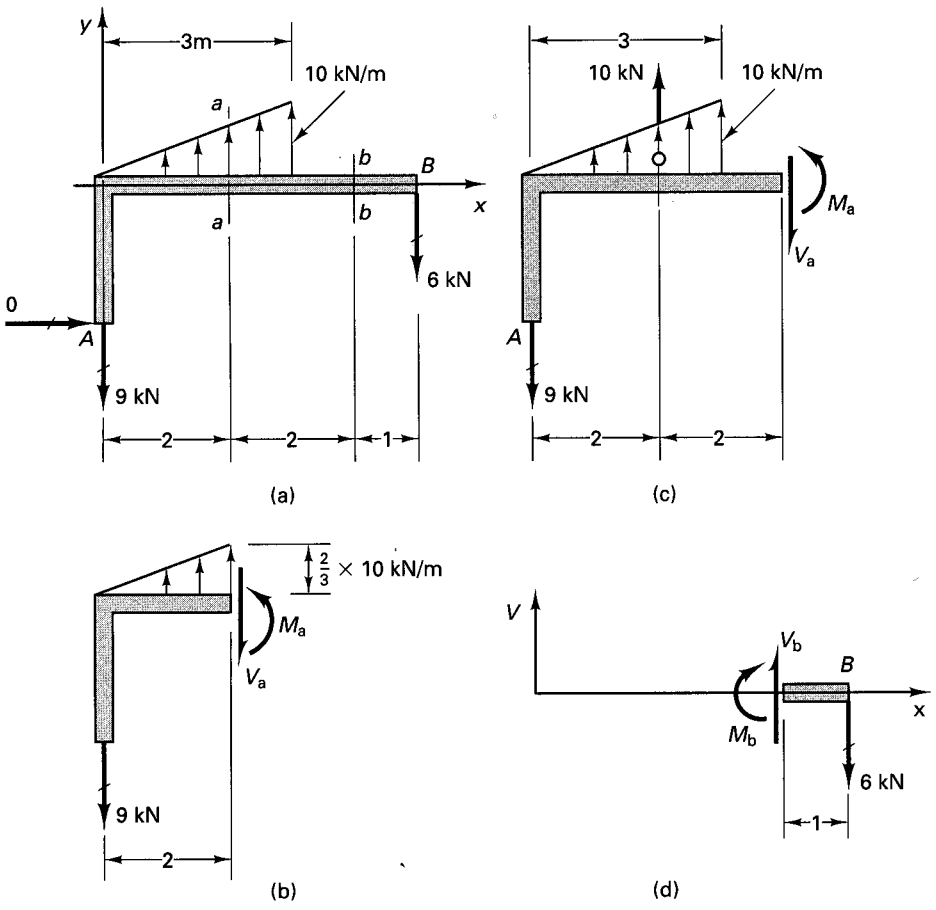


Fig. 7-15

y

$$M_a = -9 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} \times 10 \times \frac{1}{3} \times 2 = -13.6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

Esas fuerzas tienen sentidos opuestos a los mostrados en la figura.

Un diagrama de cuerpo libre a la izquierda de la sección *b-b* se muestra en la figura 7-15(c) y a la derecha, en la figura 7-15(d). Es evidente que el segundo cuerpo libre es más sencillo para los cálculos, dando directamente

$$V_b = +6\ \text{kN}$$

y

$$M_b = -6 \times 1 = -6\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

El mismo procedimiento puede seguirse para marcos que consisten en varios miembros rígidamente unidos entre sí, así como para barras curvas. En todos esos casos, las secciones deben ser perpendiculares al eje de un miembro.

7-8. Diagramas de *P*, *V* y *M*

Con los métodos estudiados antes, la magnitud y el sentido de las fuerzas axiales, fuerzas cortantes y momentos flexionantes pueden obtenerse en muchas secciones de una viga. Además, con las convenciones de signo adoptadas para esas cantidades, puede hacerse una gráfica de sus valores sobre diagramas *separados*, en los cuales pueden trazarse ordenadas iguales a las cantidades calculadas, desde una línea base que represente la longitud de una viga. Cuando se prepara una gráfica de esas ordenadas y se interconectan por medio de líneas, se obtienen representaciones de las funciones. Esos diagramas, correspondientes al tipo de cantidades que representan se llaman, respectivamente, *diagrama de fuerza axial, diagrama de fuerza cortante y diagrama de momento flexionante*. Con ayuda de dichos diagramas, la magnitud y localización de las diversas cantidades resultan inmediatamente obvias. Es conveniente dibujar esos diagramas directamente abajo del diagrama de cuerpo libre de la viga, usando la misma escala horizontal para la longitud de la misma. Un dibujo muy preciso de esos diagramas comúnmente es innecesario, aunque por lo general las ordenadas importantes se marcan con sus valores numéricos.

Los diagramas de fuerza axial no se usan tanto como los de fuerza cortante y momento flexionante. Esto se debe a que la mayor parte de las vigas son cargadas por fuerzas que actúan perpendicularmente al eje de ellas. Para tal carga, no hay fuerzas axiales en ninguna sección de la viga.

Son sumamente importantes los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Con ellos, de un vistazo un ingeniero puede saber el tipo de desempeño que se quiere tener en toda sección de una viga. El procedimiento de seccionar una viga o marco y encontrar el sistema de fuerzas en la sección es el enfoque fundamental, el cual se usará en los siguientes ejem-

plos. En algunos de éstos se darán expresiones algebraicas para esas funciones a lo largo de una viga.

Un método sistemático para construir rápidamente los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, se analizará en la parte siguiente de este capítulo.

Ejemplo 7-5

Dibuje los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante para la viga que se muestra en la figura 7-16(a) debido a la fuerza inclinada de magnitud $P = 5$k.

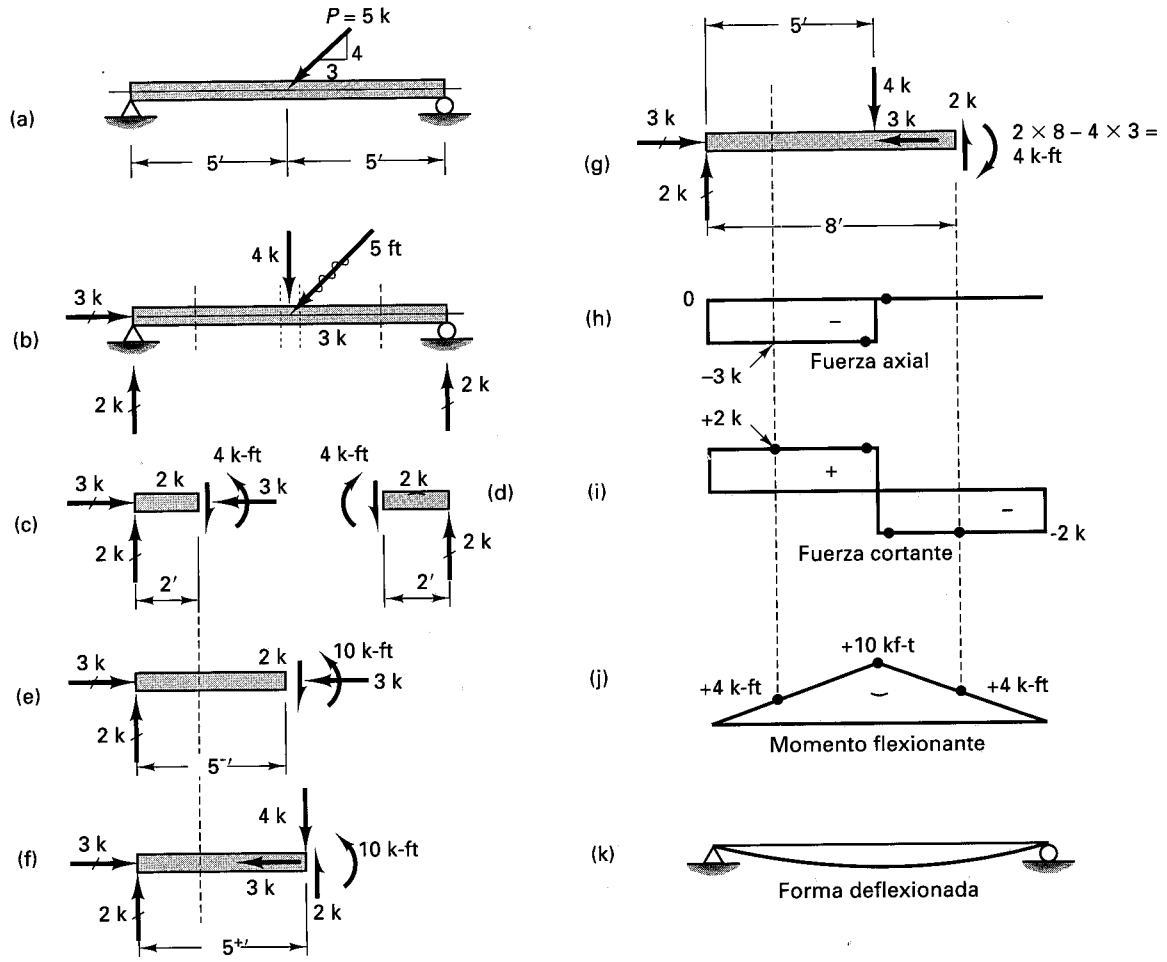


Fig. 7-16

SOLUCIÓN

En la figura 7-16(b) se muestra un diagrama de cuerpo libre de la viga. Las reacciones se determinan por inspección después que la fuerza aplicada se descompone en las dos componentes. Luego se investigan varias secciones

de la viga, como se muestra en las figuras 7-16(c)-(g). En cada caso, se plantea la misma pregunta: *¿Cuáles son las fuerzas internas necesarias para mantener en equilibrio el segmento de la viga?* Las cantidades correspondientes se registran sobre los diagramas respectivos de cuerpo libre del segmento de viga. Las ordenadas de esas cantidades se indican por medio de puntos resaltados en las figuras 7-16(h)-(j), con atención en los signos.

Note que los cuerpos libres mostrados en las figuras 7-16(d) y (g) son equivalentes ya que proporcionan la misma información y normalmente no se dibujarían ambos. Note que una sección *justamente a la izquierda* de la fuerza aplicada tiene un signo de cortante, figura 7-16(e), mientras que *justamente a la derecha*, figura 7-16(f), tiene otro. Esto indica la importancia de determinar las fuerzas cortantes a cada lado de una fuerza concentrada. Para la condición que se muestra, la viga *no resiste* una fuerza cortante que es igual a toda la fuerza. El momento flexionante en ambos casos es el mismo.

En este caso particular, después de que unos cuantos puntos han sido establecidos sobre los tres diagramas en las figuras 7-16(h)-(j), puede inferirse el comportamiento de las cantidades respectivas sobre toda la longitud de la viga. Entonces, aunque el segmento de la viga mostrado en la figura 7-16(c) tiene 2 ft de longitud, puede variar en longitud desde cero hasta *justamente a la izquierda* de la fuerza aplicada y *no ocurre ningún cambio ni en la fuerza cortante ni en la fuerza axial.* Por consiguiente, las ordenadas en las figuras 7-16(h) e (i) *permanecen* constantes para este segmento de la viga. Por otra parte, el momento flexionante depende directamente de la distancia desde el soporte; por tanto, varía linealmente, como se muestra en la figura 7-16(j). Un razonamiento similar se aplica al segmento mostrado en la figura 7-16(d), permitiendo entonces completar los tres diagramas sobre el lado derecho. El uso del cuerpo libre de la figura 7-16(g) para completar el diagrama a la derecha del centro conduce al mismo resultado.

El signo de un momento flexionante, como en las figuras 7-14(b) y (c), define el sentido en que se flexiona una viga. Como en este problema, en toda la longitud de la viga los momentos son positivos, la viga se curva para "retener agua". Para recalcar este comportamiento físico, algunos analistas consideran conveniente dibujar una línea curva corta directamente abajo del diagrama de momento, como se muestra en la figura 7-16(k), para indicar la manera en que se curva una viga o un segmento de viga.

A veces, además de, o en vez de, los diagramas de fuerza cortante o momento flexionante, son necesarias las expresiones analíticas para esas funciones. Con el origen de x en el extremo izquierdo de la viga, se aplican las siguientes relaciones:

$V = +2$ k	para $0 < x < 5$
$V = -2$ k	para $5 < x < 10$
$M = +2x$ k-ft	para $0 \leq x \leq 5$
$M = +2x - 4(x - 5) = +20 - 2x$ k-ft	para $5 \leq x \leq 10$

Estas expresiones pueden establecerse fácilmente reemplazando mentalmente por una x las distancias de 2 y 8 ft, respectivamente, en las figuras 7-16(c) y (g)

Ejemplo 7-6

Dibuje los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante para la viga en voladizo cargada con una fuerza inclinada en su extremo libre; véase la figura 7-17(a).

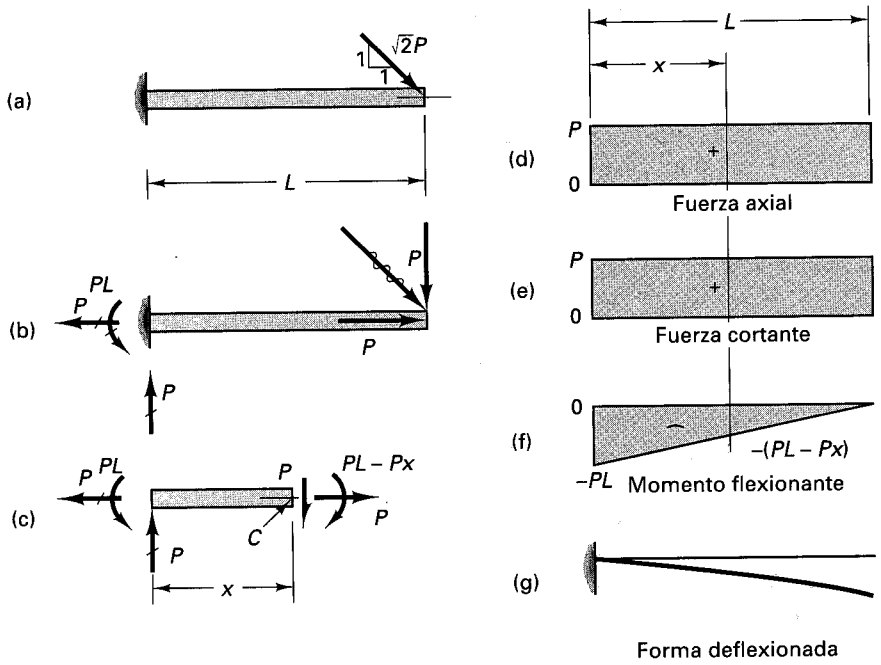


Fig. 7-17

SOLUCIÓN

Primero, la fuerza inclinada se reemplaza por las dos componentes mostradas en la figura 7-17(b) y se determinan las reacciones. Las *tres* incógnitas en el soporte se obtienen de las ecuaciones de la estática conocidas. Esto completa el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 7-17(b). *Indicar en forma completa todas esas fuerzas es de la mayor importancia.*

Un segmento de la viga se muestra en la figura 7-17(c); en este segmento puede verse que la fuerza axial y la fuerza cortante permanecen constantes independientemente de la distancia x. Por otra parte, el momento flexionante es una cantidad variable. Una suma de momentos respecto a C da $PL - Px$ actuando con el sentido que se indica. Esto representa un momento *negativo*. El momento en el soporte es igualmente un momento flexionante *negativo* ya que tiende a estirar las fibras *superiores* de la viga. Los tres diagramas están dibujados en las figuras 7-17(d)-(f).

Ejemplo 7-7

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga cargada con las fuerzas que se muestran en la figura 7-18(a).

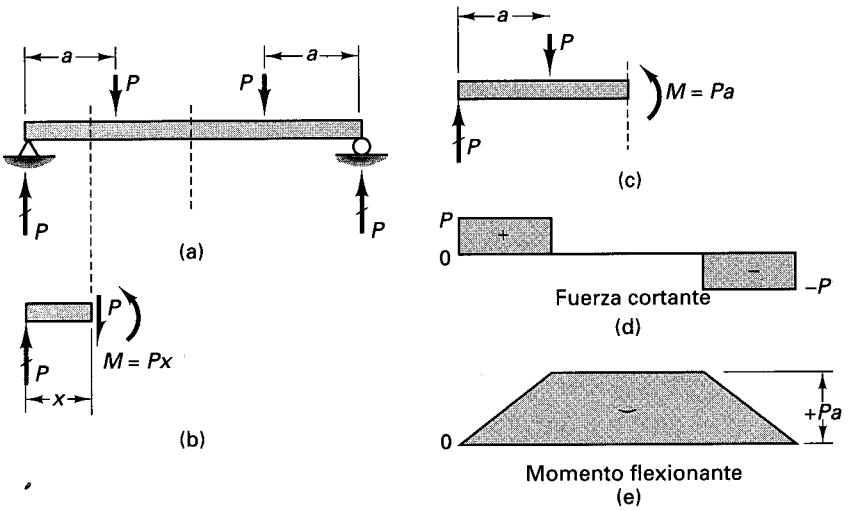


Fig. 7-18

SOLUCIÓN

Una sección arbitraria a una distancia x del soporte izquierdo aísla el segmento de viga mostrado en la figura 7-18(b). Esta sección es aplicable para cualquier valor de x justamente a la izquierda de la fuerza aplicada P. La fuerza cortante, independientemente de la distancia al soporte, permanece constante y es $+P$. El momento flexionante varía linealmente desde el soporte, alcanzando un máximo de $+Pa$.

Una sección arbitraria aplicable en cualquier lugar *entre* las dos fuerzas aplicadas se muestra en la figura 7-18(c). Ninguna fuerza cortante es necesaria para mantener el equilibrio de un segmento en esta parte de la viga. Sólo un momento flexionante constante de $+Pa$ debe ser resistido por la viga en esta zona. A tal estado de flexión se le llama flexión *pura*.

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta condición de carga se muestran en las figuras 7-18(d) y (e). Ningún diagrama de fuerza axial es necesario, ya que no hay fuerza axial en ninguna sección de la viga.

Ejemplo 7-8

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga simple con carga uniformemente distribuida; véase la figura 7-19.

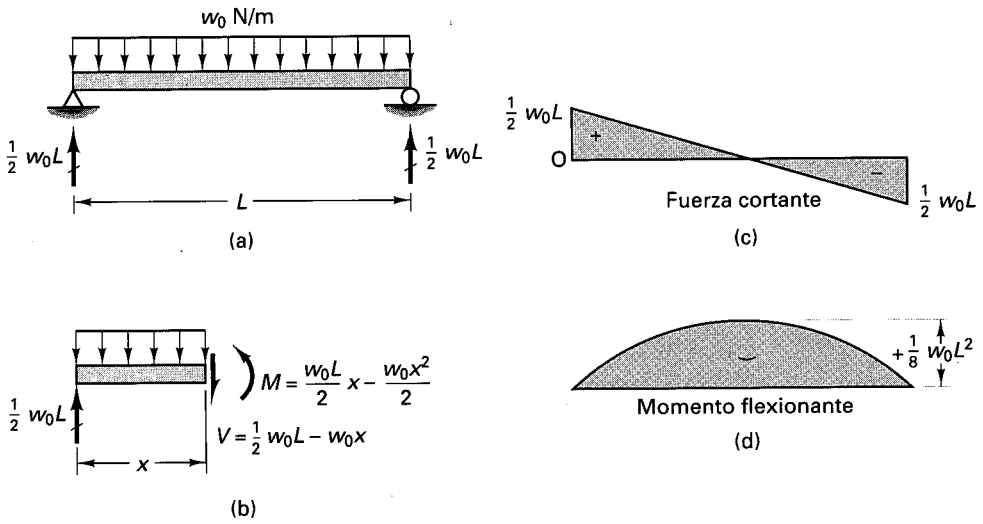


Fig. 7-19

SOLUCIÓN

La mejor manera de resolver este problema es escribir expresiones algebraicas para las cantidades buscadas. Con este fin se usa una sección arbitraria a una distancia x del soporte izquierdo, aislando el segmento que se muestra en la figura 7-19(b). Como la carga aplicada está continuamente distribuida a lo largo de la viga, esta sección es típica y aplicable a *cualquier sección* a lo largo de la misma.

La fuerza cortante V es igual a la reacción izquierda hacia arriba *menos* la carga a la izquierda de la sección. El momento flexionante interno M, resiste el momento causado por la reacción a la izquierda, *menos* el momento causado por las fuerzas a la izquierda de la misma sección. La suma de momentos se toma respecto a un eje *en la sección*. Aunque es costumbre aislar el segmento izquierdo, pueden obtenerse expresiones similares considerando el segmento derecho de la viga, poniendo la debida atención a la convención de signos. Los diagramas de las funciones V y M se muestran en las figuras 7-19(c) y (d).

Ejemplo 7-9

Para la viga en el ejemplo 7-4, que se muestra en la figura 7-20(a), exprese la fuerza cortante V y el momento flexionante M en función de x a lo largo del miembro horizontal.

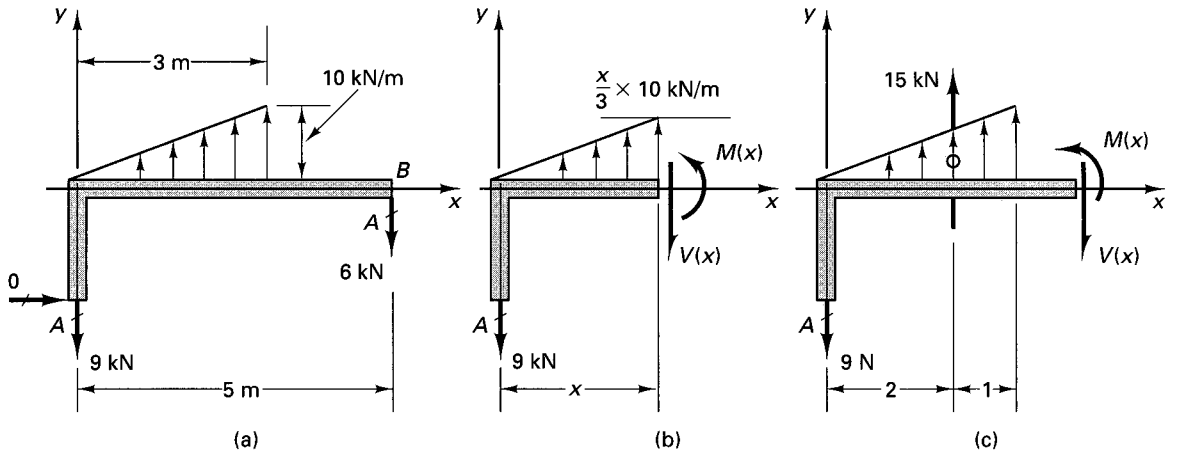


Fig. 7-20

SOLUCIÓN

En este caso, a diferencia del ejemplo anterior, una discontinuidad de carga ocurre en $x = 3$ m. Por tanto, la solución se determina en dos partes para cada una de las cuales las funciones V y M son continuas. Un diagrama de cuerpo libre para el segmento de viga bajo la carga se muestra en la figura 7-20(b) y para el resto en la figura 7-20(c). Las expresiones requeridas para $0 < x < 3$ son

$$V(x) = -9 + \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{3} \times 10\right) = -9 + \frac{5}{3}x^2 \text{ kN}$$

$$M(x) = -9x + \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{3} \times 10\right)\left(\frac{x}{3}\right) = -9x + \frac{5}{9}x^3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para $3 < x < 5$,

$$V(x) = -9 + 15 = +6 \text{ kN}$$

$$M(x) = -9x + 15(x - 2) = 6x - 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Para obtener la última expresión, es más sencillo usar un diagrama de cuerpo libre similar al de la figura 7-15(d).

Este problema también puede resolverse usando las funciones de singularidad vistas en la Sección 7-16.

Ejemplo 7-10

Escriba las expresiones analíticas para V y M para la viga de la figura 7-21.

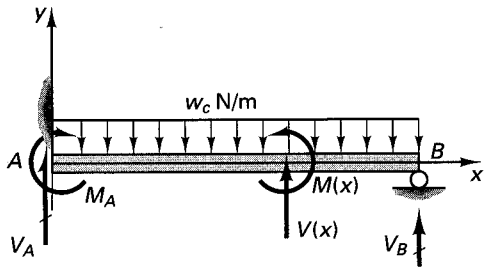


Fig. 7-21

SOLUCIÓN

A diferencia de los casos precedentes, este es un problema estáticamente indeterminado de primer grado con una sola reacción redundante. No hay reacción horizontal en A. Excepto por la cuidadosa identificación de las reacciones desconocidas llamándolas V_A, V_B y M_A, el procedimiento es el mismo que antes, aunque los resultados numéricos no pueden obtenerse hasta que sean determinadas las reacciones. Con base en esto, a una distancia x del origen,

$$V(x) = V_A - w_o x$$

y

$$\begin{aligned} M(x) &= M_A + V_A x - (w_o x)x/2 \\ &= M_A + V_A x - w_o x^2/2 \end{aligned}$$

En ocasiones será necesario usar tales expresiones en el proceso de encontrar reacciones desconocidas en los capítulos 14 y 17.

Ejemplo 7-11

Considere un sistema estructural formado por tres barras rectas interconectadas, como se muestra en la figura 7-22(a). En secciones arbitrarias, determine las fuerzas internas P, V y M en los miembros causadas por la aplicación de una fuerza vertical P_1 en D.

SOLUCIÓN

El marco se analiza en forma conveniente aislando los tres miembros rectos, como se muestra en la figura 7-22(b). Para cada caso se indica un siste-

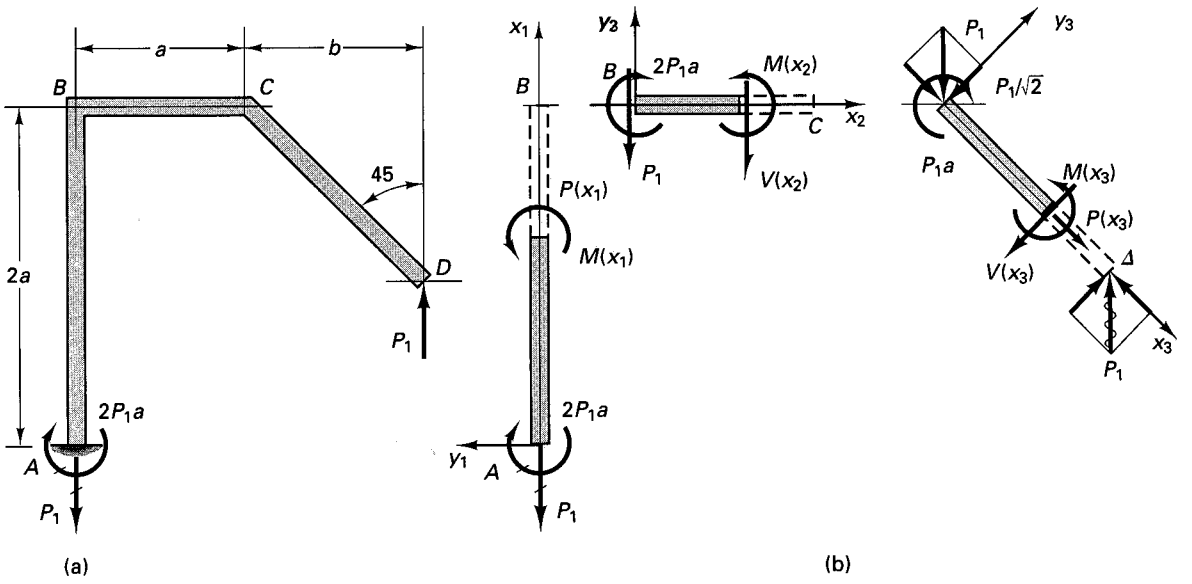


Fig. 7-22

ma coordenado diferente y se muestran secciones a través de los miembros a distancias arbitrarias de los orígenes.

La solución comienza calculando la reacción en A que se muestra entonces sobre el segmento AB de la viga. Se ve que en una sección arbitraria de esta viga, las fuerzas internas son

$$P(x_1) = +P_1,\ V(x_1) = 0 \quad \text{y} \quad M(x_1) = +2P_1a$$

Estas fuerzas son constantes en toda la longitud de la barra vertical y se vuelven las reacciones en B para el segmento de viga BC. Es importante notar que la fuerza axial en el miembro AB actúa como cortante en BC. Después que se conocen las reacciones en B para BC, el procedimiento usual da las siguientes fuerzas internas:

$$P(x_2) = 0,\ V(x_2) = -P_1, \quad \text{y} \quad M(x_2) = +2P_1a - P_1x_2$$

Para el miembro CD, excepto por la necesidad de resolver la fuerza P_1 en C, el procedimiento para determinar las fuerzas internas es el mismo que antes, el cual da

$$P(x_3) = -P_1/\sqrt{2},\ V(x_3) = -P_1/\sqrt{2}, \quad \text{y} \quad M(x_3) = +P_1a - P_1x_3/\sqrt{2}$$

Sustituyendo $x_3 = \sqrt{2}a$ en la última expresión, puede verificarse que el momento flexionante en D es cero, como es de esperarse.

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para este sistema estructural, pueden graficarse directamente sobre el perfil del marco.

Ejemplo 7-12

Considere una viga curva cuyo eje centroidal tiene la forma de un semicírculo de 0.2 m de radio, como se muestra en la figura 7-23(a). Si este miembro es jalado por las fuerzas de 1000 N mostradas, encuentre la fuerza axial, la fuerza cortante y el momento flexionante en la sección A-A definida por $\alpha = 45°$. El eje centroidal y las fuerzas aplicadas se encuentran en el mismo plano.

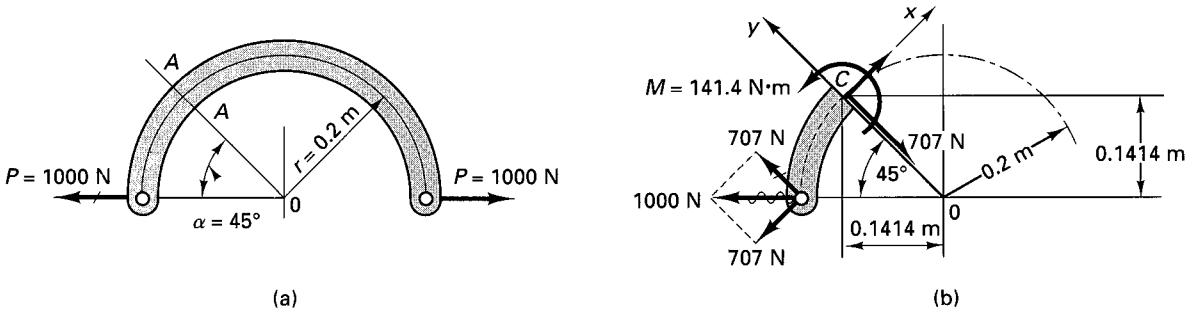


Fig. 7-23

SOLUCIÓN

No hay una diferencia esencial en el método de ataque en este problema, comparado con el de una viga recta. El cuerpo en su conjunto es examinado por condiciones de equilibrio. De las condiciones de este problema es evidente que el miembro está en equilibrio. A continuación se aísla un segmento de la viga; véase la figura 7-23(b). *La sección A-A se toma perpendicularmente al eje de la viga.* Antes de determinar las cantidades buscadas en el corte, la fuerza aplicada P se descompone en sus componentes paralela y perpendicular al corte. Esas direcciones se toman, respectivamente, como las de los ejes y y x. Esta resolución reemplaza P por las componentes mostradas en la figura 7-23(b). De $\Sigma F_x = 0$, la fuerza axial en el corte es +707 N. De $\Sigma F_y = 0$, la fuerza cortante es 707 N en el sentido mostrado. El momento flexionante en el corte puede determinarse de varias maneras diferentes. Por ejemplo, si se usa $\Sigma M_O = 0$, note que las líneas de acción de la fuerza aplicada P y la fuerza cortante en la sección pasan por O. Por tanto, sólo la fuerza axial en el centroide del corte multiplicada por el radio tiene que ser considerada y el momento flexionante *resistente* es 707(0.2) = 141.4 N · m, actuando con el sentido mostrado. Una solución alternativa puede obtenerse aplicando $\Sigma M_C = 0$. En C, un punto que se encuentra sobre el centroide, la fuerza axial y la cortante se intersecan. El momento flexionante es entonces el producto de la fuerza aplicada P y el brazo de 0.1414 m. En ambos métodos para determinar el momento flexionante, el uso de las componentes de la fuerza P se evita ya que hacerlo así es más complicado desde el punto de vista aritmético.

Se sugiere que el lector termine este problema en términos de un ángulo general α. Varias observaciones interesantes pueden hacerse en tal solución general. Los momentos en los extremos desaparecen para $\alpha = 0°$ y $\alpha = 180°$. Para $\alpha = 90°$, la fuerza cortante desaparece y la fuerza axial es igual a la fuerza aplicada P. El momento flexionante máximo está asociado con $\alpha = 90°$.

Parte C V Y M POR INTEGRACIÓN

7-9. Ecuaciones diferenciales de equilibrio para un elemento de viga

En vez del enfoque directo de cortar una viga y determinar las fuerzas cortantes y momentos flexionantes en una sección por estática, puede usarse un eficiente procedimiento alternativo. Con este fin deben deducirse ciertas relaciones diferenciales fundamentales. Éstas pueden usarse para la construcción de los diagramas de cortante y momento así como para el cálculo de las reacciones.

Considere un elemento de viga de longitud Δx, aislado por dos secciones adyacentes tomadas perpendicularmente a su eje. Figura 7-24(b). Tal elemento se muestra como un cuerpo libre en la figura 7-24(c). Todas las fuerzas que se muestran actuando sobre este elemento tienen sentido positivo. El sentido positivo de la fuerza distribuida externa q se hace coincidir con el sentido del eje y positivo. Como la fuerza cortante y el momento flexionante pueden cada uno cambiar de una sección a la siguiente, note que sobre el lado derecho del elemento, esas cantidades son designadas, respectivamente, $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

De la condición de equilibrio de fuerzas verticales se obtiene[3]

$$\sum F_y = 0 \uparrow + \quad V + q\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

o

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} = q \tag{7-1}$$

Por equilibrio, la suma de momentos respecto a A debe también ser cero. Entonces, notando que desde el punto A el brazo de la fuerza distribuida es $\Delta x/2$, se tiene

$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft + \quad (M + \Delta M) - V\Delta x - M - (q\Delta x)(\Delta x/2) = 0$$

[3]Ninguna variación de $q(x)$ dentro de Δx tiene que considerarse ya que en el límite cuando $\Delta x \to 0$, el cambio en q es despreciablemente pequeño. Esta simplificación no es una aproximación.

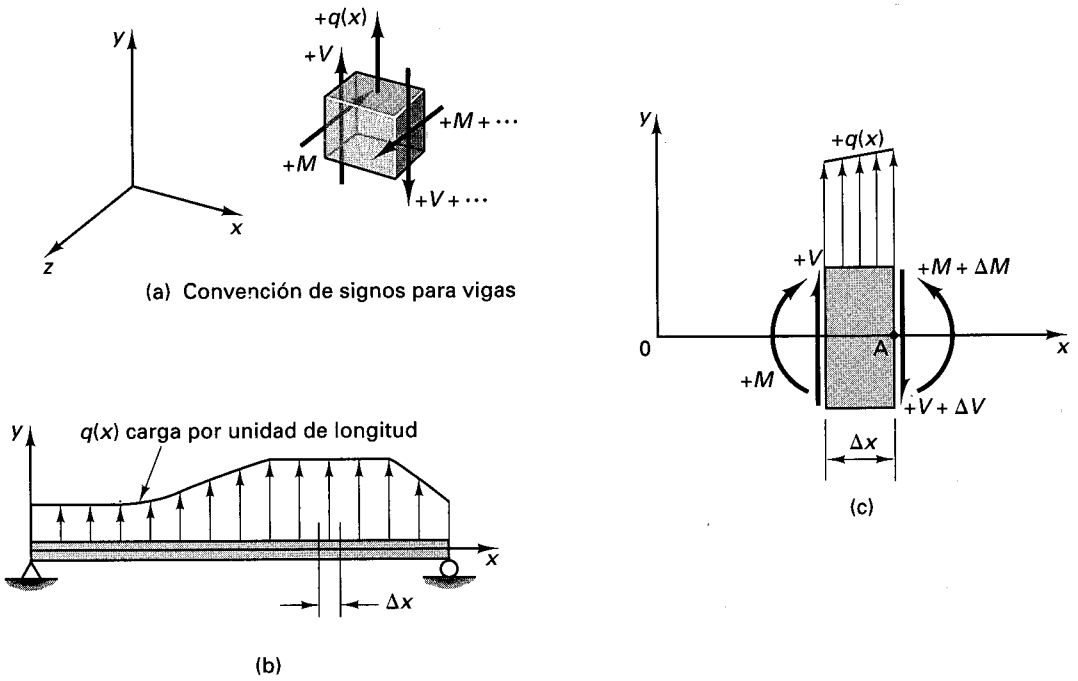


Fig. 7-24 Viga y elementos de viga entre secciones adyacentes.

o

$$\frac{\Delta M}{\Delta x} = V + \frac{q\Delta x}{2} \tag{7-2}$$

Las ecuaciones 7-1 y 7-2, cuando $\Delta x \to 0$, dan las siguientes dos ecuaciones diferenciales básicas:

$$\boxed{\frac{dV}{dx} = q} \tag{7-3}$$

y

$$\boxed{\frac{dM}{dx} = V} \tag{7-4}$$

Sustituyendo la ecuación 7-4 en la ecuación 7-3 se obtiene otra útil relación:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d^2M}{dx^2} = q \tag{7-5}$$

Esta ecuación diferencial puede usarse para determinar las reacciones de vigas estáticamente determinadas tomando en cuenta las condiciones de frontera, mientras que las ecuaciones 7-3 y 7-4 son muy convenientes para la construcción de diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Esas aplicaciones se verán a continuación.

7-10. Diagramas de fuerza cortante por integración de la carga

Por transposición e integración de la ecuación 7-3 se obtiene la fuerza cortante V:

$$V = \int_0^x q\,dx + C_1 \tag{7-6}$$

Asignando límites definidos a esta integral, se ve que la fuerza cortante en una sección es simplemente una integral (es decir, una suma) de las fuerzas verticales a lo largo de la viga desde el extremo izquierdo de la viga *a la sección considerada* más una constante de integración C_1. Esta constante es igual a la fuerza cortante en el extremo izquierdo. Entre dos secciones definidas cualquiera de una viga, la fuerza cortante cambia una cantidad igual a la fuerza vertical incluida *entre* esas secciones. Si ninguna fuerza está presente entre dos secciones cualesquiera, no tiene lugar ningún cambio en la fuerza cortante. Si una fuerza concentrada interviene en la suma, ocurre una discontinuidad o "salto" en el valor de la fuerza cortante. El proceso continuo de suma sigue siendo válido ya que una fuerza concentrada puede considerarse como una fuerza distribuida que se extiende una distancia infinitesimal a lo largo de la viga.

Con base en el razonamiento precedente, un diagrama de fuerza cortante puede establecerse por medio del proceso de suma. Con este fin, *las reacciones deben siempre determinarse primero*. Luego se suman sucesivamente *desde el extremo izquierdo* de la viga, para preservar la convención de signo adoptada para la fuerza cortante en la figura 7-12, las componentes verticales de fuerzas *y reacciones*. La fuerza cortante en una sección es simplemente igual a la suma de *todas* las fuerzas verticales a la izquierda de la sección.

Cuando el diagrama de fuerza cortante se construye a partir del diagrama de carga por medio del proceso de suma, pueden hacerse dos importantes observaciones respecto a su forma. Primero, el sentido de la carga aplicada determina el signo de la pendiente del diagrama de fuerza cortante. Si la carga aplicada actúa hacia arriba, la pendiente del diagrama de cortante es positiva y viceversa. Segundo, esta pendiente es igual a la intensidad correspondiente de la carga aplicada. Por ejemplo, considere un segmento de una viga con una carga hacia abajo uniformemente distribuida w_o y fuerzas cortantes conocidas en ambos extremos, como se muestra en la figura 7-25(a). Como aquí la intensidad de la carga aplicada w_o es *negativa* y *uniformemente distribuida* (es decir, $q = -w_o$ = constante), la pendiente del diagrama de fuerza cortante exhibe las mismas características. Alternativamente, la intensidad de carga linealmente variable que actúa hacia arriba sobre un segmento de viga con fuerzas cortantes conocidas en los extremos, mostrada en la figura 7-25(b), da lugar a un diagrama de cortante con forma diferente. Cerca del extremo izquierdo de este segmento, la carga *hacia arriba* q_1 localmente aplicada es *más pequeña* que la correspondiente q_2 cerca del extremo derecho. Por tanto, la pen-

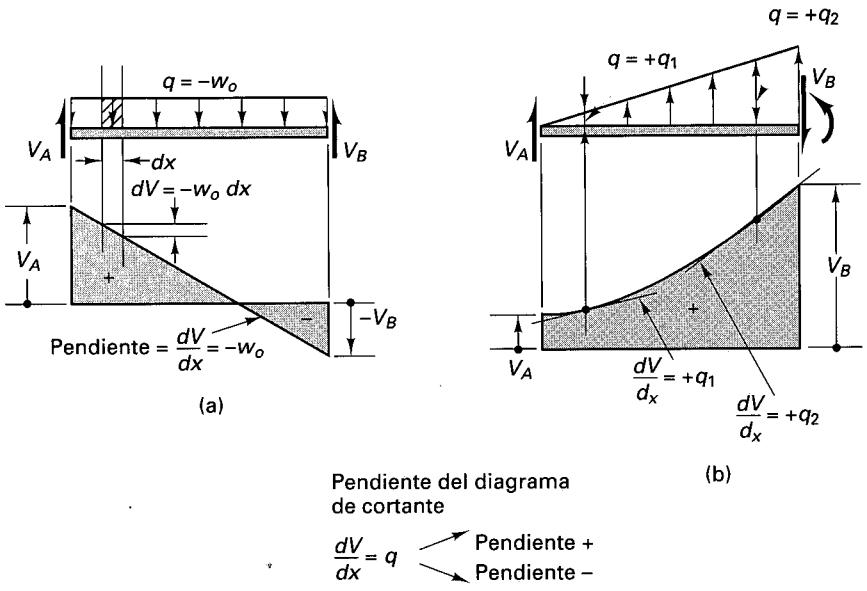


Fig. 7-25 Diagramas de fuerza cortante para (a) una intensidad de carga uniformemente distribuida y (b) una intensidad de carga uniformemente creciente.

diente *positiva* del diagrama de fuerza cortante a la izquierda es *más pequeña* que a la derecha, y el diagrama es cóncavo hacia arriba.

No deje de notar que *una mera suma consecutiva y sistemática de las componentes verticales de las fuerzas es todo lo que es necesario para obtener el diagrama de fuerza cortante.* Cuando se usa el proceso de suma consecutiva, el diagrama debe terminar con la fuerza cortante (reacción) previamente calculada en el extremo derecho de la viga. Ninguna fuerza cortante actúa en la viga más allá de la última fuerza vertical o reacción. *El hecho de que el diagrama cierre de esta manera ofrece una importante verificación de los cálculos aritméticos.* Esta verificación no debe nunca ignorarse. Ella permite obtener soluciones independientemente con una seguridad casi total de que son correctas. El procedimiento semigráfico de integración delineado antes es muy conveniente en los problemas prácticos. Es la base para esbozar rápidamente diagramas cualitativos de fuerza cortante.

Desde el punto de vista físico, la convención de signos para la fuerza cortante no es completamente consistente. Siempre que se analizan vigas, un diagrama de fuerza cortante dibujado desde un lado de la viga es opuesto en signo a un diagrama construido viendo a la misma viga desde el otro lado. El lector debería verificar esto en algunos casos simples, como en un voladizo con una carga concentrada en su extremo libre y en una viga simplemente apoyada con una fuerza concentrada en el centro de su claro. Para fines de diseño, el signo de la fuerza cortante no es usualmente importante.

7-11. Diagramas de momento por integración de la fuerza cortante

Por transposición e integración de la ecuación 7-4 se obtiene el momento flexionante

$$M + \int_0^x V\,dx + C_2 \tag{7-7}$$

donde C_2 es una constante de integración correspondiente a las condiciones de frontera en $x = 0$. Esta ecuación es análoga a la ecuación 7-6 desarrollada para la construcción de diagramas de fuerza cortante. El significado del término $V\,dx$ se muestra gráficamente por las áreas rayadas de los diagramas de fuerza cortante en la figura 7-26. La suma de esas áreas entre secciones definidas de una viga corresponde a una evaluación de la integral definida. Si los extremos de una viga están sobre rodillos, están articulados o están libres, los momentos iniciales y terminales son cero. Si el extremo está empotrado (fijo contra rotaciones), en vigas estáticamente determinadas, el momento en el extremo se conoce del cálculo de las reac-

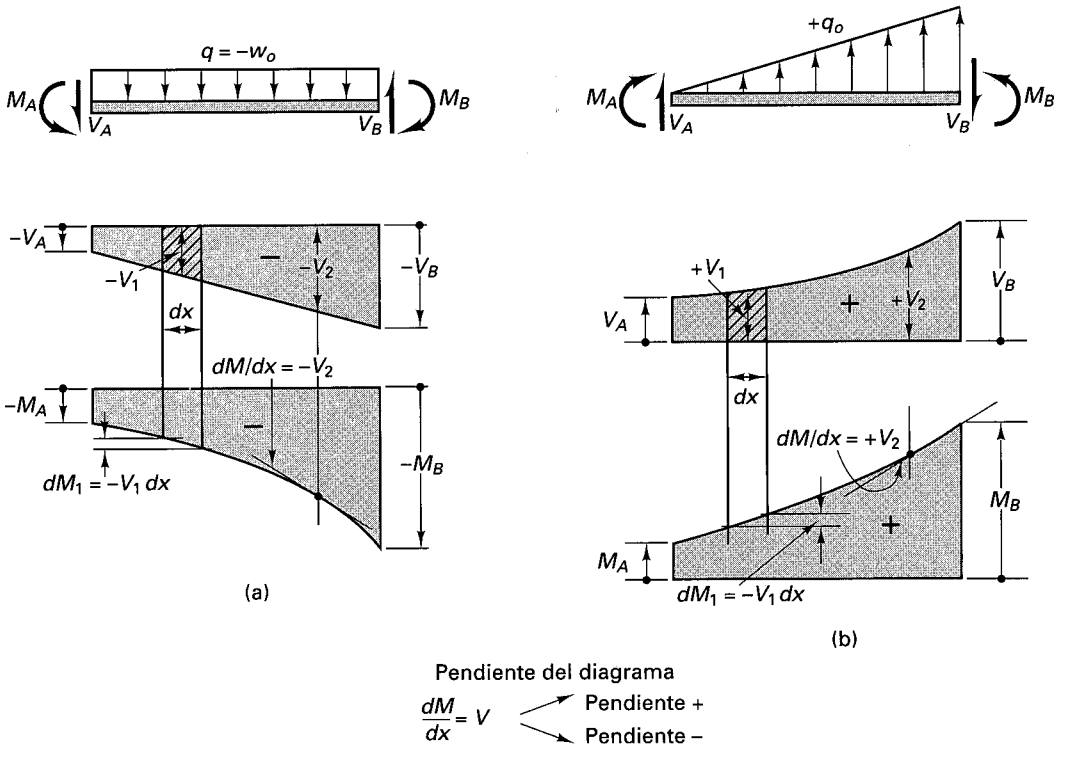


Fig. 7-26 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para (a) una intensidad de carga uniformemente distribuida y (b) una intensidad de carga uniformemente creciente.

ciones. Si el extremo fijo de una viga está a la izquierda, este momento con su signo apropiado[4] es la *constante inicial de integración* C_2.

Procediendo *continuamente a lo largo de la viga desde el extremo izquierdo* y sumando las áreas del diagrama de fuerza cortante con atención a sus signos, se obtiene el diagrama de momentos flexionantes. Este proceso de obtener el diagrama de momentos a partir del diagrama de cortante por medio de sumas, es exactamente el mismo que el empleado antes para pasar del diagrama de carga al de cortante. *El cambio en momento en un segmento dado de una viga es igual al área del correspondiente diagrama de fuerza cortante.* Cualitativamente, la forma de un diagrama de momentos puede establecerse fácilmente a partir de las pendientes en algunos puntos seleccionados a lo largo de la viga. Esas pendientes tienen el mismo signo y magnitud que las correspondientes fuerzas cortantes sobre el diagrama de cortante, ya que de acuerdo con la ecuación 7-4, $dM/dx = V$. Alternativamente, puede estudiarse a lo largo de la viga el cambio de momento $dM = V\,dx$. En la figura 7-26 se muestran algunos ejemplos. De acuerdo con estos principios, las fuerzas cortantes variables causan una variación no lineal del momento. Una fuerza cortante constante produce un cambio uniforme en el momento flexionante, lo que da una línea recta en el diagrama de momentos. Si no se tiene fuerza cortante a lo largo de una cierta porción de una viga, no tiene lugar *ningún cambio en el momento.*

Como $dM/dx = V$, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, el momento *máximo o mínimo se presenta donde la fuerza cortante es nula.*

En un diagrama de momentos obtenido por sumas, se tiene nuevamente una valiosa verificación del trabajo aritmético *en el extremo derecho* de la viga. *Las condiciones terminales para el momento deben ser satisfechas.* Si el extremo es libre o articulado, la suma calculada debe ser igual a cero. Si el extremo es un empotramiento, el momento extremo calculado por sumas es igual al calculado inicialmente para la reacción. Estas son las condiciones de frontera y deben ser siempre satisfechas.

Ejemplo 7-13

Obtenga los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga simétricamente cargada mostrada en la figura 7-27(a) por el proceso de integración.

SOLUCIÓN

Las reacciones son cada una igual a P. Para obtener el diagrama de fuerza cortante, figura 7-27(b), se comienza con la suma de fuerzas desde el extremo izquierdo. La reacción izquierda actúa hacia *arriba*, por lo que una ordenada del diagrama de fuerza cortante en esta fuerza igual a P se traza hacia *arriba*. Como no hay otras fuerzas hasta llegar al cuarto del claro, *ningún cambio en la magnitud de la ordenada del diagrama tiene lugar has-*

[4]Los momentos flexionantes toman sus signos de acuerdo con la convención adoptada en la figura 7-14. Los momentos que causan *compresión* en las fibras superiores de la viga son positivos.

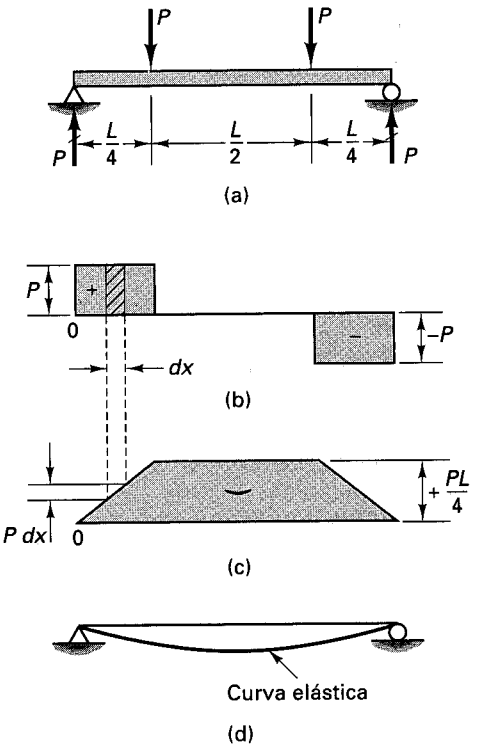


Fig. 7-27

ta llegar a ese punto. Luego, una fuerza hacia abajo P lleva la ordenada a la línea base y esta ordenada cero permanece con ese valor hasta alcanzar la siguiente fuerza hacia abajo P donde la fuerza cortante cambia a $-P$. En el extremo derecho, la reacción hacia arriba cierra el diagrama y esto constituye una verificación del trazo del diagrama. Este diagrama de fuerza cortante es *antisimétrico*.

El diagrama de momentos, figura 7-27(c), se obtiene sumando las áreas del diagrama de cortante. Como la viga está simplemente apoyada, el momento en el extremo izquierdo es cero. La suma de la porción positiva del diagrama de cortante *crece a razón constante* a lo largo de la viga hasta el cuarto del claro, donde el momento alcanza una magnitud de $+PL/4$. Este momento permanece constante en la mitad media de la viga. *Ningún cambio en el momento puede ocurrir en esta zona* ya que no hay una correspondiente área de cortante.

Más allá de la segunda fuerza, el momento decrece en $-P\,dx$ en *cada* dx. Por consiguiente, el diagrama de momento en esta zona tiene una pendiente negativa constante. Como las áreas positivas y negativas del diagrama de cortante son iguales, en el extremo derecho, el momento es cero. Esto es como debe ser, ya que el extremo derecho está sobre un rodillo. Se obtiene así una comprobación del trabajo hecho. Este diagrama de momentos es *simétrico*.

Ejemplo 7-14

Considere una viga simple con una intensidad de carga uniformemente creciente desde un extremo, como se muestra en la figura 7-28(a). La carga total aplicada es W. (a) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante con ayuda del proceso de integración. (b) Obtenga expresiones para V y M usando la ecuación 7-5.

SOLUCIÓN

(a) Como la carga total $W = kL^2/2, k = 2W/L^2$. Para la distribución dada de carga, las reacciones hacia abajo son $W/3$ y $2W/3$, como se muestra en la figura 7-28(a). Por tanto, el diagrama de fuerza cortante dado en la figura 7-28(b) comienza y termina como se muestra. Como la razón de carga aplicada es menor a la izquierda que a la derecha, el diagrama de fuerza cortante es cóncavo hacia arriba. El punto de fuerza cortante nula ocurre donde la reacción a la izquierda es equilibrada por la carga aplicada; es decir,

$$\frac{W}{3} = \frac{1}{2}x_1\frac{2W}{L^2}x_1 \quad \text{por consiguiente, } x_1 = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

En x_1, el momento flexionante es máximo; por tanto,

$$M_{\text{máx}} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{W}{3}\frac{L}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\frac{L}{\sqrt{3}}\frac{2W}{L^2}\frac{L}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2WL}{9\sqrt{3}}$$

Siguiendo las reglas dadas en la figura 7-26, el diagrama de momento tiene la forma mostrada en la figura 7-28(c).

Aunque los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante podrían esbozarse cualitativamente, fue necesario suplementar los resultados analíticamente para determinar sus valores críticos.

(b) Aplicando la ecuación 7-5 e integrando dos veces, se tiene

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q = +kx = +\frac{2W}{L^2}x$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{kx^2}{2} + C_1 \quad \text{y} \quad M = \frac{kx^3}{6} + C_1x + C_2$$

Sin embargo, las condiciones de frontera requieren que el momento en $x = 0$ y $x = L$ sea cero; es decir, $M(0) = 0$ y $M(L) = 0$. Por tanto, como

$$M(0) = 0 \quad C_2 = 0$$

y, similarmente, como $M(L) = 0$,

$$\frac{kL^3}{6} + C_1L = 0 \quad \text{o} \quad C_1 = -\frac{kL^2}{6}$$

Con esas constantes,

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{kx^2}{2} - \frac{kL^2}{6} = \frac{Wx^2}{L^2} - \frac{W}{3}$$

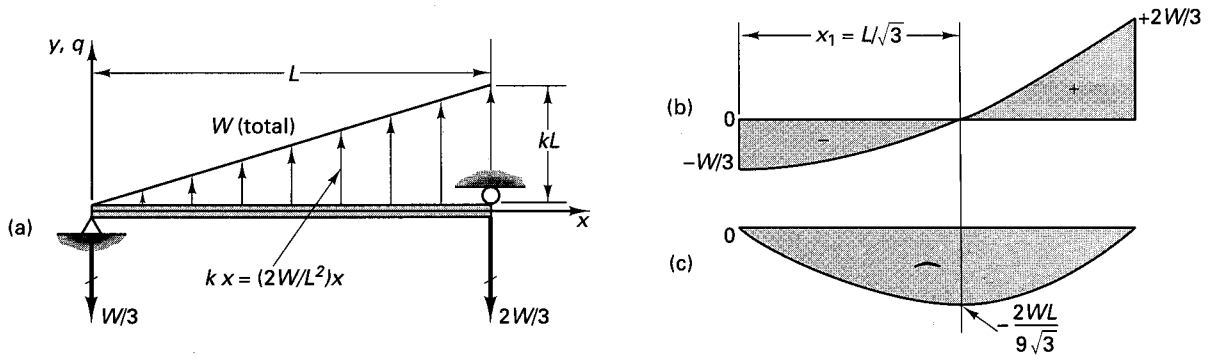


Fig. 7-28

y

$$M = \frac{kx^2}{6} - \frac{kL^2x}{6} = \frac{Wx^3}{3L^2} - \frac{Wx}{3}$$

Esos resultados concuerdan con los encontrados antes.

Las atractivas características del enfoque de valor en la frontera usado en este ejemplo para resolver ecuaciones diferenciales pueden extenderse a situaciones de carga discontinua usando las funciones de singularidad vistas en la Sección 7-14.

Ejemplo 7-15

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 7-29(a) con ayuda del proceso de integración.

SOLUCIÓN

Las reacciones deben calcularse primero y antes de seguir adelante, la fuerza inclinada se descompone en sus componentes horizontal y vertical. La reacción horizontal en A es de 120 kN y actúa hacia la derecha. De $\Sigma M_A = 0$, se encuentra que la reacción vertical en B es de 125 kN (verifique esto). Similarmente, la reacción en A es de 165 kN. La suma de las componentes verticales de reacción es de 290 kN y es igual a la suma de las fuerzas verticales.

El diagrama para la fuerza axial se muestra en la figura 7-29(b). Esta fuerza de compresión actúa sólo en el segmento AD de la viga.

Con las reacciones conocidas se comienza con la suma de fuerzas desde el extremo izquierdo de la viga para obtener el diagrama de fuerza cortante, figura 7-29(c). Al principio, la carga distribuida que actúa hacia abajo se acumula lentamente. Luego, conforme crece la intensidad de la carga, para un igual incremento de distancia a lo largo de la viga, ocurre un mayor cambio en la fuerza cortante. Por consiguiente, el diagrama de fuerza cortante en la zona CA es una línea curva con su concavidad hacia abajo.

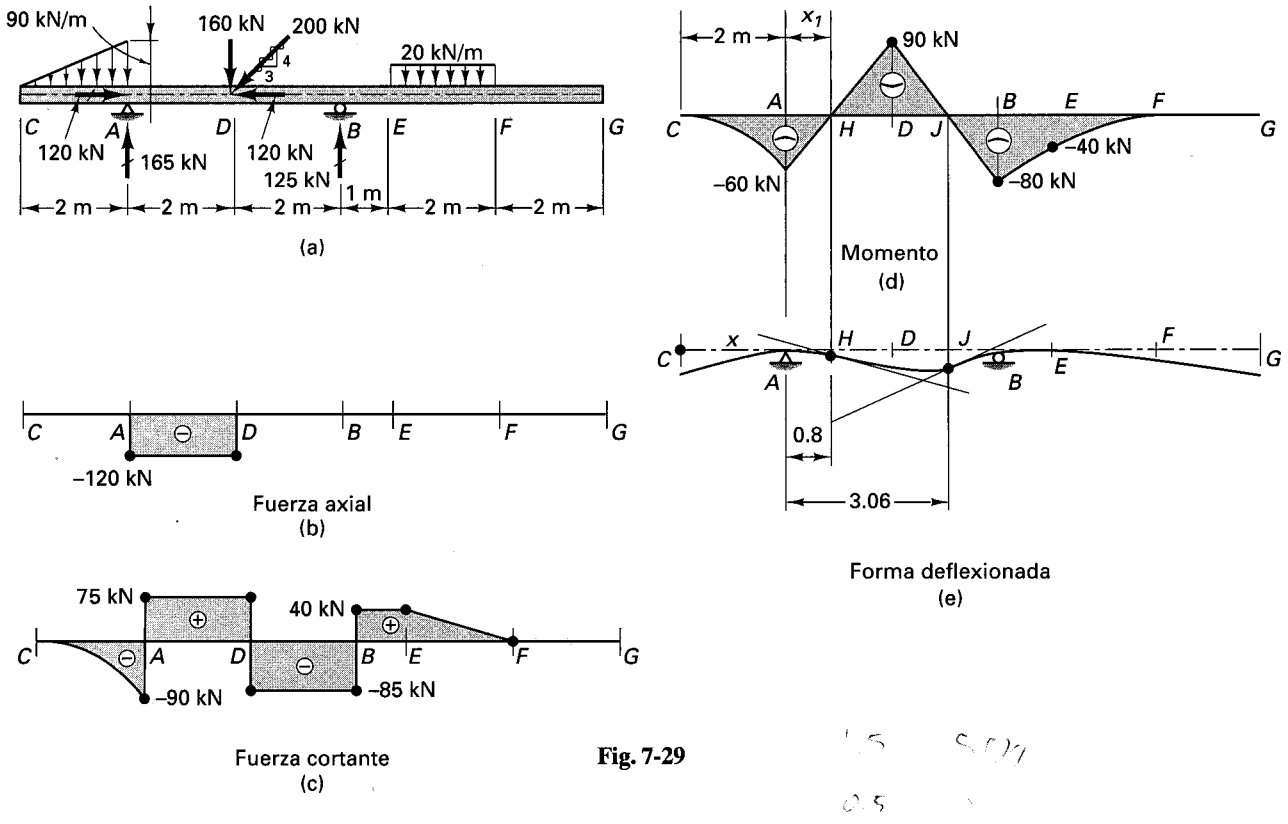


Fig. 7-29

Esto concuerda con la ecuación 7-3, ilustrada en la figura 7-25. Como $dV/dx = q = -w_o$, la pendiente negativa de este diagrama de fuerza cortante es menor a la izquierda y crece hacia A. La fuerza total hacia abajo de C a A es de 90 kN y este valor es la ordenada negativa del diagrama, *justo a la izquierda del soporte A*. En A, la reacción hacia arriba de 165 kN mueve la ordenada del diagrama de fuerza cortante a +75 kN. Este valor de la fuerza cortante se aplica a una sección en la viga *justo a la derecha* del soporte A. El abrupto *cambio* de la fuerza cortante en A es igual a la reacción, pero este total no representa la fuerza cortante a través de la viga.

Ninguna fuerza está aplicada a la viga entre A y D; por consiguiente, no hay cambio en el valor de la fuerza cortante. En D, la componente hacia abajo de 160 kN de la fuerza concentrada hace caer el valor de la fuerza cortante a −85 kN. Similarmente, el valor de la fuerza cortante se eleva a +40 kN en B. Como entre E y F, la carga uniformemente distribuida actúa hacia abajo, de acuerdo con la ecuación 7-3 y como se muestra en la figura 7-25, tiene lugar un decremento de la fuerza cortante a razón constante de 20 kN/m. En F, la fuerza cortante es cero, lo que sirve como verificación final.

Para construir el diagrama de momento mostrado en la figura 7-29(d) por el método de las sumas, las áreas del diagrama de fuerza cortante en la figura 7-29(c) deben ser sumadas continuamente desde el extremo izquier-

do. Al principio, en el segmento CA, menos área es contribuida a la suma en el diagrama de momento. Esto está de acuerdo con la ecuación 7-4, $dM/dx = V$, como se ilustra en la figura 7-26. Aquí V, que define la pendiente del diagrama de momento, es negativa y progresivamente crece hacia la derecha. El momento en A es igual al área del diagrama de fuerza cortante en el segmento CA. Esta área está encerrada por una línea curva que puede ser determinada por integración[5] ya que la fuerza cortante a lo largo de este segmento puede expresarse analíticamente.

Este procedimiento es a veces molesto y en vez de él, el momento flexionante en A puede obtenerse a partir de la definición fundamental del momento en una sección. Pasando una sección por A y aislando el segmento CA, se encuentra el momento en A. Las otras áreas del diagrama de fuerza cortante en este ejemplo son fácilmente determinadas. Debe darse la debida atención a los signos de esas áreas. Es conveniente disponer el trabajo en forma tabular. En el extremo derecho de la viga se obtiene la acostumbrada verificación.

M_A	$(-2 \times 90/2)(2/3) = -60$ kN · m	(momento respecto a A)
	$+75 \times 2 = +150$	(área cortante de A a D)
M_D	$+90$ kN · m	
	$-85 \times 2 = -170$	(área cortante de D a B)
M_B	-80 kN · m	
	$+40 \times 1 = +40$	(área cortante de B a E)
M_E	-40 kN · m	
	$+2 \times 40/2 = +40$	(área cortante de E a F)
M_F	-0 kN · m	(comprobación)

7-12. Efecto de momentos concentrados sobre los diagramas de momento

En la deducción de los diagramas de momento por suma de las áreas del diagrama de cortante, no se incluyó ningún *momento externo concentrado* actuando sobre el elemento infinitesimal; sin embargo, tal momento puede presentarse. Por consiguiente, el proceso de suma deducido es aplicable sólo hasta el punto de aplicación de un momento externo. *En una sección justamente más allá de un momento aplicado externamente se requiere un*

[5]En este caso, la curva de la fuerza cortante es una parábola de segundo grado cuyo vértice está sobre una línea vertical que pasa por A. Para áreas encerradas por diversas curvas, véase la Tabla 2 del Apéndice.

momento flexionante diferente para mantener el segmento de una viga en equilibrio. Por ejemplo, en la figura 7-30 un momento M_A externo en sentido horario está actuando sobre el elemento de la viga en A. Entonces, si el momento interno horario a la izquierda es M_O, por equilibrio del elemento, el momento resistente antihorario a la derecha debe ser $M_O + M_A$. En el punto del momento aplicado externamente, aparece en el diagrama de momento una discontinuidad o "salto", igual al momento concentrado. Por consiguiente, al aplicar el proceso de suma, debe darse consideración a los momentos concentrados ya que sus efectos no aparecen en el diagrama de fuerza cortante. El proceso convencional de suma puede aplicarse hasta el punto de aplicación de un momento concentrado. En este punto, un "salto" vertical igual al momento externo debe dibujarse en el diagrama. La dirección de este "salto" vertical en el diagrama depende del sentido del momento concentrado y se determina convenientemente con ayuda de un croquis análogo al de la figura 7-30. Después de pasar la discontinuidad en el diagrama de momento, el proceso de suma de las áreas del diagrama de cortante puede continuarse sobre el resto de la viga.

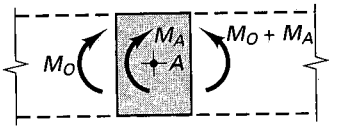


Fig. 7-30 Un momento externo concentrado actuando sobre un elemento de una viga.

Ejemplo 7-16

Construya el diagrama de momento flexionante para la viga horizontal cargada como se muestra en la figura 7-31(a).

SOLUCIÓN

Tomando momentos respecto a cualquier extremo de la viga, se encuentra que las reacciones verticales son $P/6$. En A, la reacción actúa hacia abajo; en C, actúa hacia arriba. De $\Sigma F_x = 0$, se sabe que en A actúa una reacción horizontal hacia la izquierda igual a P. A continuación se dibuja el diagrama de fuerza cortante; véase la figura 7-31(b). Éste tiene una ordenada

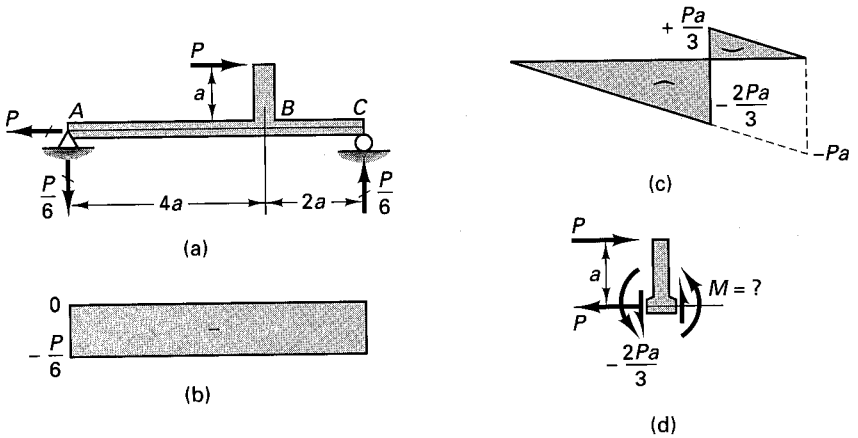


Fig. 7-31

negativa constante en *toda* la viga. Después de esto, usando el proceso de suma, se construye el diagrama de momento mostrado en la figura 7-31(c). El momento en el extremo izquierdo de la viga es cero ya que el soporte está articulado. El cambio total en momento de A a B está dado por el área del diagrama de fuerza cortante entre esas secciones y es igual a $-2Pa/3$. El diagrama de momento en la zona AB tiene una pendiente negativa constante. Para ampliar el análisis, se aísla un elemento de la viga, como se muestra en la figura 7-31(d). *Se sabe* que el momento en el lado izquierdo de este elemento es $-2Pa/3$ y que el momento concentrado causado por la fuerza aplicada P respecto al eje neutro de la viga es Pa; por tanto, por equilibrio, el momento en el lado derecho del elemento debe ser $+Pa/3$. En B, tiene lugar un "salto" hacia arriba igual a $+Pa$ en el diagrama de momentos y justo a la derecha de B, la ordenada es $+Pa/3$. Más allá del punto B se continúa con la suma de las áreas del diagrama de fuerza cortante. El área entre B y C es igual a $-Pa/3$. Este valor *cierra* el diagrama de momento en el extremo derecho de la viga y se satisfacen así las condiciones de frontera. Note que las líneas en el diagrama de momento que están inclinadas hacia abajo y hacia la derecha son paralelas. Esto se debe a que la fuerza cortante en toda la longitud de la viga es negativa y constante.

Ejemplo 7-17

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para el miembro mostrado en la figura 7-32(a). Todas las dimensiones mostradas están en mm. Desprecie el peso de la viga.

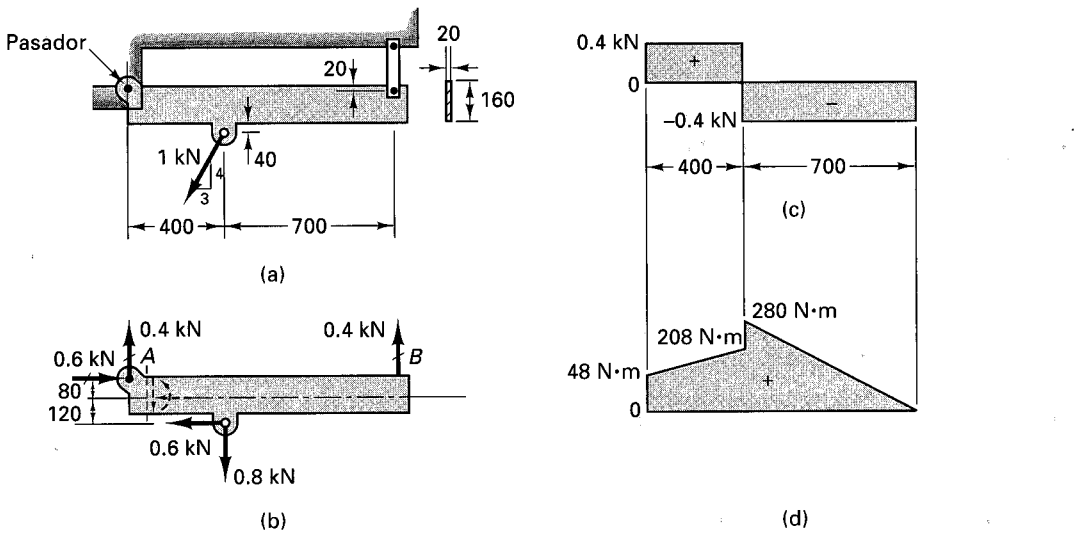


Fig. 7-32

SOLUCIÓN

En este caso, a diferencia de todos los casos considerados hasta ahora, son asignadas dimensiones al *peralte* de la viga. Se supone, por simplicidad, que la viga es rectangular en su sección transversal; en consecuencia, *el eje centroidal* se encuentra 800 mm por debajo de la parte superior de la viga. Note cuidadosamente que esta viga no está soportada en su eje centroidal.

Un diagrama de cuerpo libre de la viga con la fuerza aplicada descompuesta en componentes se muestra en la figura 7-32(b). Las reacciones se calculan de la manera usual. Como el diagrama de fuerza cortante tiene que ver sólo con fuerzas verticales, éste se construye fácilmente, como se muestra en la figura 7-32(c).

Al construir el diagrama de momento mostrado en la figura 7-32(d) se debe proceder con mucho cuidado. Como se recalcó antes, los momentos flexionantes siempre pueden determinarse considerando un segmento de viga y se calculan convenientemente tomando momentos de las fuerzas externas *respecto a un punto sobre el eje centroidal de la viga*. Entonces, pasando una sección justo a la derecha de A y considerando el segmento a la izquierda, puede verse que un momento positivo de 48 N · m es resistido por la viga en este extremo. Por tanto, la gráfica del diagrama de momento debe *comenzar* con una ordenada de +48 N · m. El otro punto sobre la viga donde ocurre un momento concentrado es C. Aquí la componente horizontal de la fuerza aplicada induce un momento en sentido horario de $0.6 \times 120 = 72$ N · m respecto al eje neutro. Justo a la derecha de C, este momento debe ser resistido por un momento positivo adicional. Esto causa una discontinuidad en el diagrama de momento. El proceso de suma de áreas del diagrama de cortante se aplica a los segmentos de la viga donde no está aplicado ningún momento externo. Los cálculos necesarios se llevan a cabo en forma tabular.

M_A $\quad +0.6 \times 800 = +48$ N · m

$+0.4 \times 400 = +160$ (área cortante de A a C)

Momento justamente a la izquierda de $C = +208$ N · m

$+0.6 \times 120 = +72$ (Momento externo en C)

Momento justamente a la derecha de $C = +280$ kN · m

$-0.4 \times 700 = -280$ (área cortante de C a B)

M_B $\quad = 0$ (comprobación)

Note que al resolver este problema, las fuerzas se consideraron *donde ellas realmente actúan sobre la viga*. La investigación de la fuerza cortante y el momento flexionante en una sección de una viga determina lo que la viga está realmente experimentando. A veces, esto difiere del procedimiento para determinar reacciones, donde la configuración de un miembro no es importante.

De nuevo, debe enfatizarse que si se necesita un momento o una fuerza cortante en una sección *particular* de un miembro, *el método básico de las secciones siempre puede ser usado*. En miembros inclinados, la fuerza cortante actúa *normal al eje de la viga*.

7-13. Diagramas de momento y la curva elástica

Como se definió en la sección 7-7, un momento positivo ocasiona que una viga se deforme con su concavidad hacia arriba y viceversa. Por tanto, la forma del eje deflexionado de una viga puede ser *claramente* establecida a partir del *signo* del diagrama de momento. La forma de este eje de una viga elástica cargada se conoce como *curva elástica*. Es costumbre mostrar la curva elástica sobre un croquis, donde las pequeñas deflexiones reales toleradas en la práctica están muy *exageradas*. Un croquis de la viga elástica aclara la acción física de una viga. También proporciona una base útil para los cálculos cuantitativos de las deflexiones, lo que se verá en las secciones 15-2 y 15-3. Algunos de los ejemplos precedentes en que se construyeron diagramas de momento flexionante se usarán para ilustrar la acción física de una viga.

Por inspección de la figura 7-27(c) se ve que el momento flexionante en toda la viga es *positivo*. De acuerdo con esto, la curva elástica mostrada en la figura 7-27(d) es *cóncava hacia arriba en todo punto*. Una representación correcta de la convexidad o concavidad de la curva elástica es importante. En este caso, los extremos de la viga descansan sobre soportes.

En un diagrama de momento más complejo, figura 7-29(e), ocurren zonas de momento positivo y de momento negativo. Correspondiente a las zonas de momento negativo, tiene lugar una curvatura *definida* de la curva elástica que es cóncava hacia abajo; véase la figura 7-29(e). Por otra parte, para la zona *HJ*, donde ocurre un momento positivo, la concavidad de la curva elástica es hacia arriba. Donde las curvas se unen, como en *H* y *J*, hay líneas que son *tangentes* a las dos curvas ya que la viga es físicamente *continua*. Note también que el extremo libre *FG* de la viga es tangente a la curva elástica en *F*. No hay curvatura en *FG*, ya que el momento es cero en ese segmento de la viga.

Si se sigue la sugerencia hecha en el ejemplo 7-5 de indicar la curvatura de los segmentos de la viga por medio de pequeñas líneas curvas sobre el diagrama de momento, como en la figura 7-29(d), la curva elástica es simplemente un conjunto de tales curvas dibujadas a una escala apropiada.

El punto de transición sobre la curva elástica a una curvatura inversa se llama *punto de inflexión*. En este punto, el momento cambia de signo y la viga no resiste ahí ningún momento. Este hecho hace a menudo que esos puntos sean convenientes para una conexión de campo de grandes miembros y su posición es calculada. Un procedimiento para determinar los puntos de inflexión será ilustrado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7-18

Encuentre la posición de los puntos de inflexión para la viga analizada en el ejemplo 7-15; véase la figura 7-29(a).

SOLUCIÓN

Por definición, un punto de inflexión corresponde a un punto sobre una viga donde el momento flexionante es cero. Por tanto, un punto de inflexión puede localizarse estableciendo una expresión algebraica para el momento en una viga para el segmento en que se anticipa tal punto y resolviendo esta relación igualada a cero. Midiendo x desde el extremo C de la viga, figura 7-29(e), el momento flexionante para el segmento AD de la viga es $M = -(2 \times 90/2)(x - 2 \times 2/3) + 165 \times (x - 2)$. Simplificando y haciendo esta expresión igual a cero, se obtiene

$$M = 75x - 210 = 0 \qquad x = 2.80 \text{ m}$$

Por tanto, el punto de inflexión que ocurre en el segmento AD de la viga es $2.80 - 2.00 = 0.80$ m desde el soporte A.

Similarmente, escribiendo una expresión algebraica para el momento flexionante para el segmento DB e igualándola a cero, se encuentra la posición del punto de inflexión J:

$$M = -(2 \times 90/2)(x - 2 \times 2/3) + 165 \times (x - 2) - 160 \times (x - 4) = 0$$

donde $x = 5.06$ m; por tanto, la distancia $AJ = 3.06$ m.

A menudo, un método más conveniente para encontrar los puntos de inflexión es utilizar las relaciones conocidas entre los diagramas de cortante y de momento. Entonces, como el momento en A es -60 kN, el punto de momento cero ocurre cuando la porción positiva del área del diagrama de cortante de A a H es igual a este momento (es decir, $-60 + 75 \times x_1 = 0$). Por tanto, la distancia $AH = 60/75 = 0.8$ m, igual que antes.

Similarmente, comenzando con un momento positivo conocido de +90 kN · m, el segundo punto de inflexión se sabe que ocurre cuando una porción del área negativa del diagrama de cortante entre D y J reduce este valor a cero. Por tanto, distancia $DJ = 90/85 = 1.06$ m o distancia $AJ = 2 + 1.06 = 3.06$ m.

Igual que cualquier elemento infinitesimal de viga debe estar en equilibrio, lo debe estar también cualquier elemento de esquina de un marco con nodos rígidos. Por tanto, los momentos flexionantes en una esquina pueden actuar sólo como se muestra en la figura 7-33(a) o 7-33(b). Las partes asociadas de la curva elástica se muestran en esas figuras.

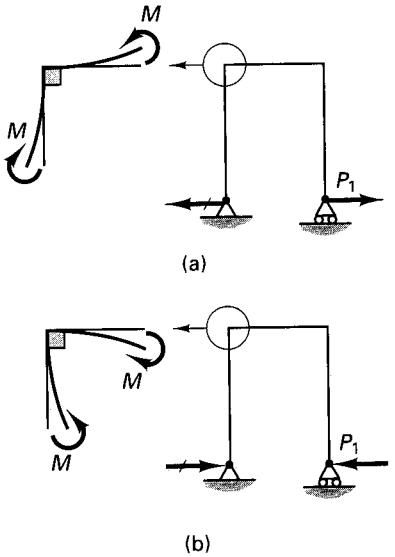


Fig. 7-33 Curvas elásticas en esquinas de marcos planos rígidos.

Parte D *V* Y *M* POR FUNCIONES DE SINGULARIDAD

7-14. Aplicaciones de las funciones de singularidad

Como se señaló antes, pueden ser necesarias expresiones analíticas de la fuerza cortante $V(x)$ y del momento flexionante $M(x)$ de una viga dada en el análisis. Si la carga $q(x)$ es una función continua entre los soportes,

la solución de la ecuación diferencial $d^2M/dx^2 = q(x)$ es un enfoque conveniente para determinar $V(x)$ y $M(x)$ (véase el ejemplo 7-14). Esto se ampliará aquí a situaciones en que la función de carga es discontinua. Con este fin se usará la notación del cálculo operacional. Las funciones $q(x)$ consideradas aquí son polinomios con potencias enteras de x. El tratamiento de otras funciones está más allá del alcance de este texto. Sin embargo, para las funciones consideradas, el método es perfectamente general. Aplicaciones adicionales de este enfoque se darán en el capítulo 14 para calcular deflexiones de vigas. Las funciones de singularidad presentadas aquí no son apropiadas para vigas con sección transversal variable.

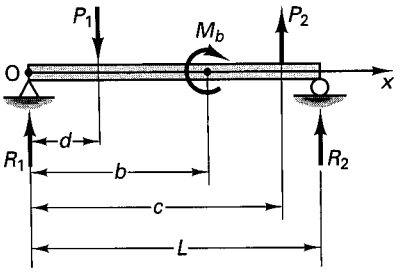


Fig. 7-34 Una viga cargada.

Considere una viga cargada como en la figura 7-34. Como las cargas aplicadas son fuerzas concentradas, existen cuatro regiones distintas en que se aplican expresiones diferentes del momento flexionante. Estas son

$$M = R_1x \qquad \text{cuando } 0 \le x \le d$$

$$M = R_1x - P_1(x - d) \qquad \text{cuando } d \le x < b$$

$$M = R_1x - P_1(x - d) + M_b \qquad \text{cuando } b < x \le c$$

$$M = R_1x - P_1(x - d) + M_b + P_2(x - c) \qquad \text{cuando } c \le x \le L$$

Las cuatro ecuaciones pueden escribirse como una, siempre que uno defina la siguiente función simbólica:

$$\langle x - a\rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < a \\ (x - a)^n & \text{para a} < \text{x} < \infty \end{cases} \tag{7-8}$$

donde $n \ge 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

La expresión encerrada por los corchetes agudos no existe hasta que x alcanza a. Para x más allá de a, la expresión se vuelve un binomio ordinario. Para $n = 0$ y para $x > a$, la función es la unidad. Con base en esto, las cuatro funciones separadas para $M(x)$ dadas para la viga de la figura 7-34 pueden combinarse en una expresión que es aplicable en todo el claro:[6]

$$M = R_1\langle x - 0\rangle^1 - P_1\langle x - d\rangle^1 + M_b\langle x - b\rangle^0 + P_2\langle x - c\rangle^1$$

Aquí los valores de a son $0, d, b$ y c, respectivamente.

Para trabajar más ampliamente con esta función, es conveniente introducir dos funciones simbólicas adicionales. Una es para la fuerza concentrada, tratándola como un caso derivado de una carga distribuida. La otra es para el momento concentrado, tratándola similarmente. Deben también establecerse reglas para integrar todas esas funciones. En este análisis se seguirá el enfoque heurístico (no riguroso).

[6]Este enfoque fue introducido primero por A. Clebsch en 1862. O. Heavside, en su *Electromagnetic Theory* (*Teoría electromagnética*), inició y ampliamente extendió los métodos del cálculo operacional. En 1919, W. H. Macauly sugirió específicamente el uso de corchetes especiales para problemas de vigas. El lector interesado en un estudio adicional y/o un tratamiento más riguroso de este tema puede consultar textos de matemáticas que traten las transformadas de Laplace.

Una fuerza concentrada (puntual) puede ser considerada como una carga distribuida enormemente fuerte actuando sobre un pequeño intervalo ε, figura 7-35(a). Tratando ε como una constante, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} \frac{P}{\varepsilon}\, dx = P \tag{7-9}$$

Puede verse que P/ε tiene las dimensiones de fuerza por unidad de distancia unitaria y corresponde a la carga distribuida $q(x)$ en el tratamiento anterior. Por tanto, cuando $\langle x - a\rangle^1 \to 0$, para una fuerza concentrada en $x = a$, por analogía de $\langle x - a\rangle^1$ con ε.

$$q = P\langle x - a\rangle_*^{-1} \tag{7-10}$$

Para q, esta expresión es dimensionalmente correcta, aunque $\langle x - a\rangle_*^{-1}$ en $x = a$ se vuelve infinita y por definición es cero en cualquier otra parte. Se trata entonces de una *función singular*. En la ecuación 7-10, el asterisco subíndice del corchete agudo es un recordatorio de que según la ecuación 7-9, la integral de esta expresión extendida sobre el rango e permanece acotada y, al integrarla, da la misma fuerza puntual. Por tanto, debe adoptarse una regla simbólica especial de integración:

$$\int_0^x P\langle x - a\rangle_*^{-1}\, dx = P\langle x - a\rangle^0 \tag{7-11}$$

El coeficiente P en las funciones previas se conoce como la *resistencia* de la singularidad. Para P igual a la unidad, la *función de carga unitaria puntual* $\langle x - a\rangle_*^{-1}$ se llama también *delta de Dirac* o *función de impulso unitario*.

Por un razonamiento análogo, véase la figura 7-35(b), la función de carga q para un momento concentrado en $x = a$ es

$$q = M_a\langle x - a\rangle_*^{-2} \tag{7-12}$$

Esta función, al ser integrada dos veces, define dos reglas simbólicas de integración. La segunda integral, excepto por el intercambio de P por M, ya ha sido establecida como la ecuación 7-11.

$$\int_0^x M_a\langle x - a\rangle_*^{-2}\, dx = M_a\langle x - a\rangle_*^{-1} \tag{7-13}$$

$$\int_0^x M_a\langle x - a\rangle_*^{-1}\, dx = M_a\langle x - a\rangle^0 \tag{7-14}$$

En la ecuación 7-12, la expresión es correcta dimensionalmente ya que q tiene las unidades de M/mm. Para M_a igual a la unidad, se obtiene la *función momento unitario concentrado*, $\langle x - a\rangle_*^{-2}$, que se llama también *doble-*

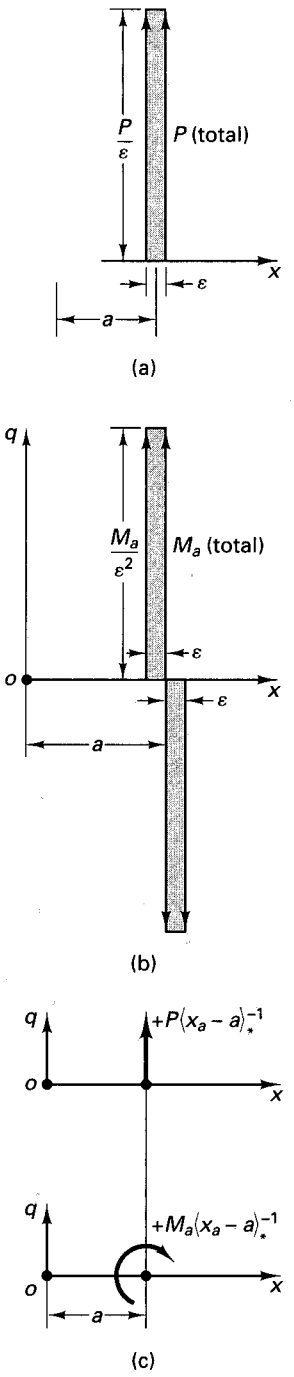


Fig. 7-35 Fuerza concentrada P y momento M_a: (a) y (b) considerados como carga distribuida y (c) notación simbólica para P y M en a.

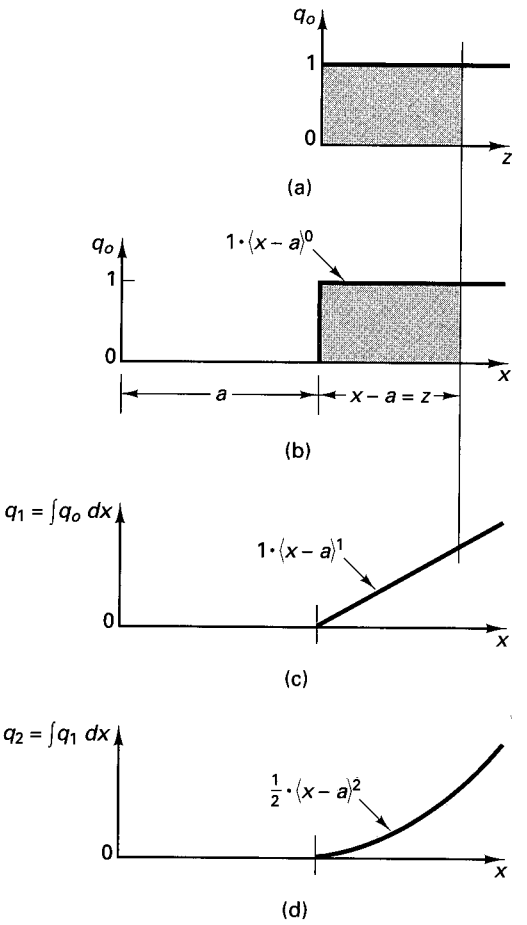


Fig. 7-36 Integraciones típicas.

te o *dipolo*. Esta función es también singular, tomando el valor infinito en $x = a$ y cero en cualquier otra parte. Sin embargo, después de integrarla dos veces, se obtiene un resultado acotado. Las ecuaciones 7-10, 7-12 y 7-13 son de carácter simbólico. La relación de esas ecuaciones con las cargas puntuales dadas es claramente evidente de las ecuaciones 7-11 y 7-14.

La integral de funciones binomiales en los corchetes agudos para $n \geq 0$ está dada por la siguiente regla:

$$\int_0^x \langle x-a \rangle_n \, dx = \frac{\langle x-a \rangle^{n+1}}{n+1} \qquad \text{para } n \geq 0 \qquad (7\text{-}15)$$

Este proceso de integración se muestra en la figura 7-36. Si la distancia a se hace igual a cero, se obtienen integrales convencionales.

Ejemplo 7-19

Usando notación funcional simbólica, determine $V(x)$ y $M(x)$ debidos a la carga mostrada en la figura 7-37(a).

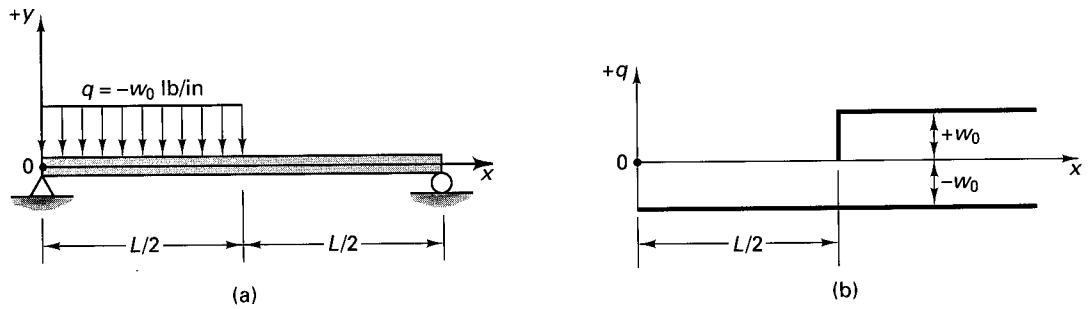


Fig. 7-37

SOLUCIÓN

Para resolver este problema puede usarse la ecuación 7-5. La carga aplicada $q(x)$ actúa hacia abajo y comienza en $x = 0$. Por tanto, debe existir un término $q = -w_0$ o $w_0\langle x - 0\rangle^0$, que significa lo mismo. Sin embargo, esta función se propaga sobre todo el claro; véase la figura 7-37(b). Para terminar la carga distribuida en $x = L/2$ como se requiere en este problema, debe añadirse otra función $+w_o\langle x - L/2\rangle^0$. Las dos expresiones juntas representan correctamente la carga aplicada.

Para la viga simplemente apoyada, las condiciones conocidas de frontera son $M(0) = 0$ y $M(L) = 0$. Estas se usan para determinar las reacciones:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = q = -w_o\langle x - 0\rangle^0 + w_o\langle x - L/2\rangle^0$$

$$\frac{dM}{dx} = V = -w_o\langle x - 0\rangle^1 + w_o\langle x - L/2\rangle^1 + C_1$$

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_o\langle x - 0\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_o\langle x - L/2\rangle^2 + C_1x + C_2$$

$$M(0) = C_2 = 0$$

$$M(L) = -\tfrac{1}{2}w_oL^2 + \tfrac{1}{2}w_o(L/2)^2 + C_1L = 0$$

Por consiguiente,

$$C_1 = +\tfrac{3}{8}p_oL$$

y

$$V(x) = -w_0\langle x - 0\rangle^1 + w_o\langle x - L/2\rangle^1 + \tfrac{3}{8}w_oL$$

$$M(x) = -\tfrac{1}{2}w_0\langle x - 0\rangle^2 + \tfrac{1}{2}w_o\langle x - L/2\rangle^2 + \tfrac{3}{8}w_oLx$$

Después que se obtiene la solución, esas relaciones se leen más fácilmente reescribiéndolas en forma convencional:

$$\left.\begin{aligned} V &= +\tfrac{3}{8}w_0L - w_ox \\ M &= +\tfrac{3}{8}w_oLx - \tfrac{1}{2}w_ox^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } 0 < x \leq L/2$$

$$\left.\begin{aligned} V &= +\tfrac{3}{8}w_oL - \tfrac{1}{2}W_oL = -\tfrac{1}{8}w_oL \\ M &= +\tfrac{1}{8}w_oL^2 - \tfrac{1}{8}w_oLx \end{aligned}\right\} \quad \text{cuando } L/2 \leq x < L$$

Las reacciones pueden comprobarse por estática. Haciendo $V = 0$, puede encontrarse la localización de momento máximo. Se deja como ejercicio al lector completar la graficación de esas funciones.

Ejemplo 7-20

Encuentre $V(x)$ y $M(x)$ para la viga cargada como se muestra en la figura 7-38. Use funciones de singularidad y trate el problema como uno de valores en la frontera.

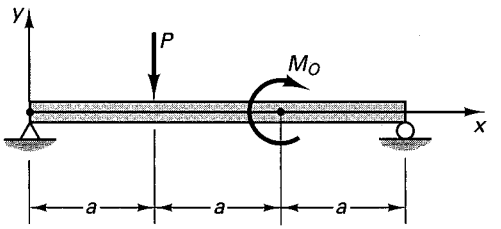


Fig. 7-38

SOLUCIÓN

Usando directamente las ecuaciones 7-10 y 7-12, la función $q(x)$ puede escribirse en forma simbólica. De las condiciones $M(0) = 0$ y $M(L) = 0$, con $L = 3a$, pueden encontrarse las constantes de integración.

$$d^2M/dx^2 = q = -P\langle x - a\rangle_*^{-1} + Pa\langle x - 2a\rangle_*^{-2}$$

$$dM/dx = V = -P\langle x - a\rangle^0 + Pa\langle x - 2a\rangle_*^{-1} + C_1$$

$$M = -P\langle x - a\rangle^1 + Pa\langle x - 2a\rangle^0 + C_1x + C_2$$

$$M(0) = C_2 = 0$$

y

$$M(3a) = -2Pa + Pa + 3C_1a = 0$$

Por consiguiente,

$$C_1 = +\tfrac{1}{3}P = \tfrac{1}{3}P\langle x - 0\rangle^0$$

y

$$V(x) = +\tfrac{1}{3}P\langle x - 0\rangle^0 - P\langle x - a\rangle^0 + Pa\langle x - 2a\rangle_*^{-1}$$

$$M(x) = +\tfrac{1}{3}P\langle x - 0\rangle^1 - P\langle x - a\rangle^1 + Pa\langle x - 2a\rangle^0$$

En la expresión final para $V(x)$, el último término no tiene valor si la expresión se escribe en forma convencional. Tales términos se usan sólo como rastreadores durante el proceso de integración.

Se sugiere que el lector compruebe las reacciones por estática convencional, que escriba explícitamente $V(x)$ y $M(x)$ para los tres intervalos de la viga dentro de los cuales esas funciones son continuas y que compare éstas con los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante construidos por el procedimiento de suma.

En las figuras 7-39(a) y 7-39(b) se sugiere una manera de representar una carga uniformemente variable que actúa sobre una parte de una viga. Se necesitan tres funciones separadas para definir completamente la carga dada.

En el análisis previo se ha supuesto tácitamente que las reacciones están en los extremos de las vigas. Si no es tal el caso, las constantes desconocidas C_1 y C_2 deben introducirse en la ecuación 7-5 como cargas concentradas; es decir, como

$$C_1\langle x - a\rangle_*^{-1} \quad \text{y} \quad C_2\langle x - b\rangle_*^{-1}$$

Esta es la condición mostrada en la figura 7-39(c). Ninguna constante adicional de integración es necesaria en una solución obtenida de esta manera.

Las funciones de singularidad pueden usarse convenientemente en problemas estáticamente indeterminados de barras cargadas axialmente, así como de miembros en torsión y de vigas. Sin embargo, las soluciones están *limitadas a miembros prismáticos*. Si la sección transversal varía a lo largo de la longitud de un miembro, el procedimiento de las funciones de singularidad se vuelve impráctico.

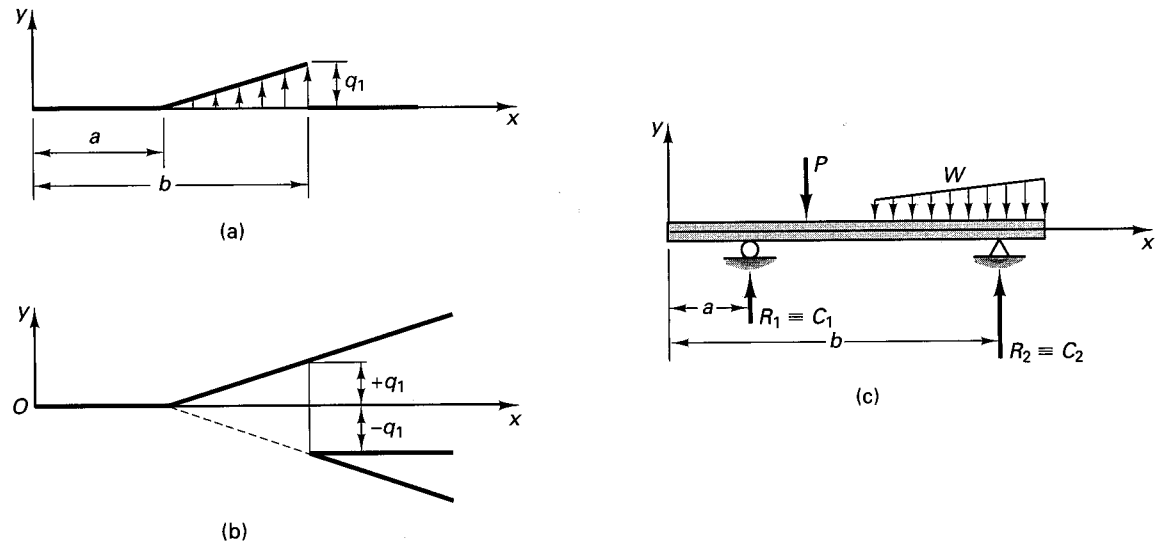


Fig. 7-39 Ilustración de la formulación de funciones de singularidad para reacciones.

PROBLEMAS

Sección 7-3

7-1 al 7-4. Determine las componentes de reacción causadas por las cargas aplicadas en las estructuras mostradas en las figuras. *Los diagramas de cuerpo libre correctamente dibujados son parte esencial de las soluciones.* (*Sugerencia para el problema 7-1:* El efecto sobre una estructura de dos fuerzas de cables actuando sobre una polea sin fricción es el mismo que el de dos fuerzas aplicadas en el centro del eje de la polea. Demuestre este principio antes de hacer uso de él.)

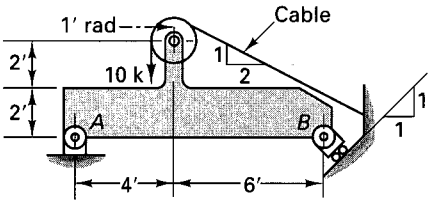


Fig. P7-1

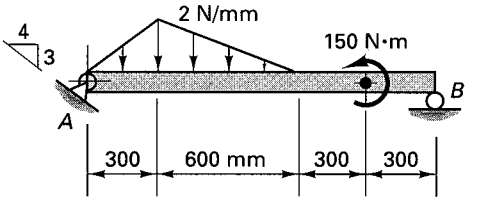


Fig. P7-2

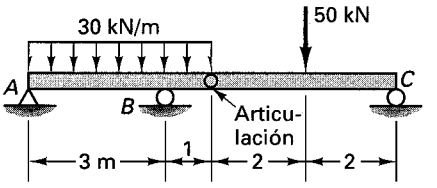


Fig. P7-3

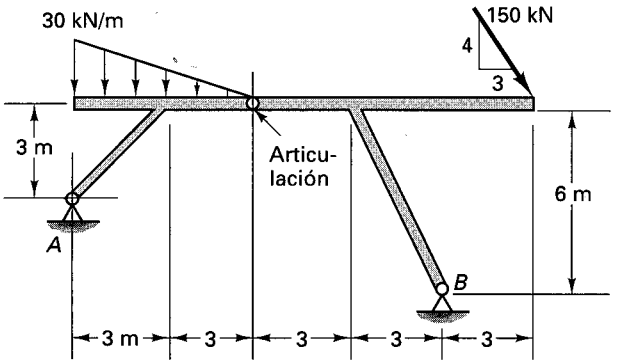


Fig. P7-4

Secciones 7-5 a 7-7

7-5 al 7-19. En las estructuras en el plano mostradas en las figuras, encuentre las reacciones y determine las fuerzas axiales P, las fuerzas cortantes V y los momentos flexionantes M causados por las cargas aplicadas en las secciones a-a, b-b, etc., según se especifiquen. La magnitud y sentido de las cantidades calculadas deben mostrarse en diagramas separados de cuerpo libre. Por simplicidad, suponga que los miembros pueden representarse por líneas. Cuando secciones como las a-a y b-b se muestran muy juntas, una sección está justamente a la izquierda de una dimensión dada y la otra está justamente a la derecha.

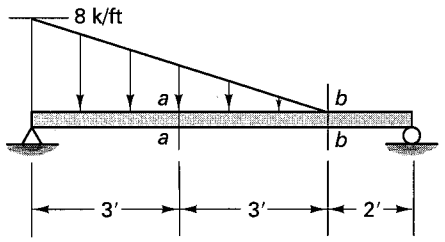


Fig. P7-5

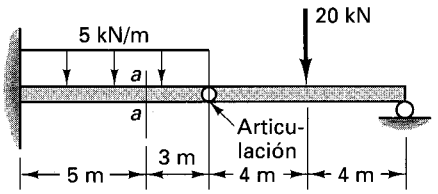


Fig. P7-6

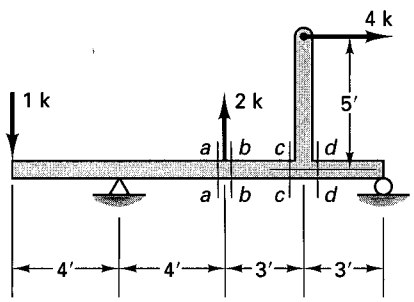


Fig. P7-7

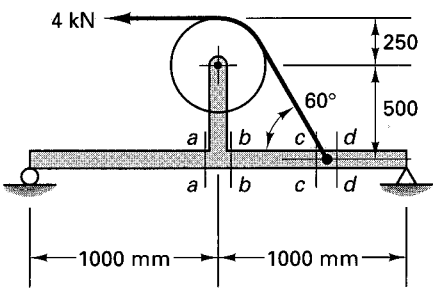


Fig. P7-8

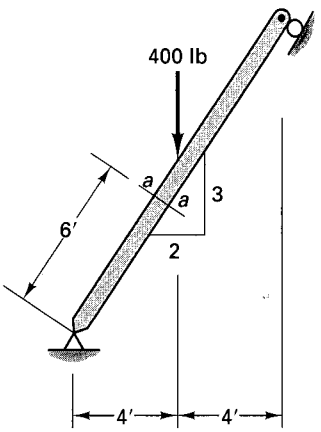


Fig. P7-9

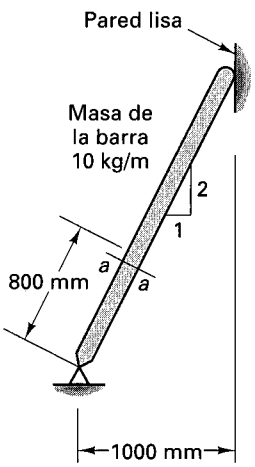


Fig. P7-10

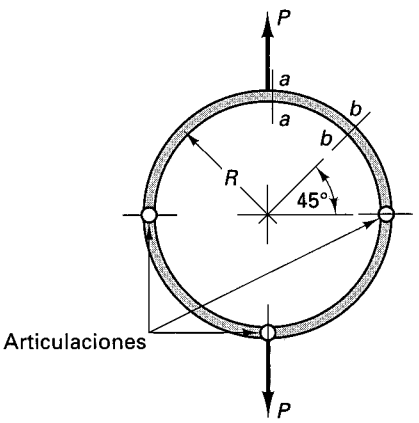


Fig. P7-11

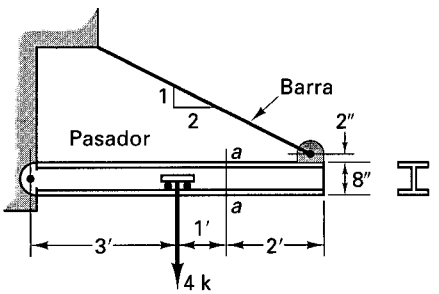


Fig. P7-12

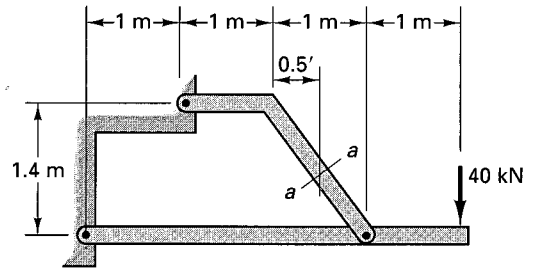


Fig. P7-13

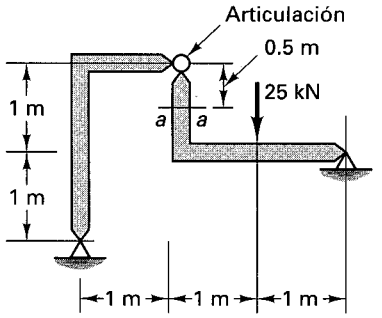


Fig. P7-14

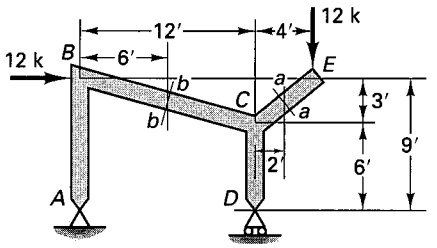


Fig. P7-15

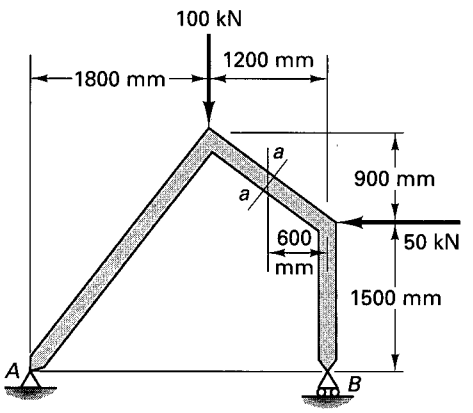


Fig. P7-16

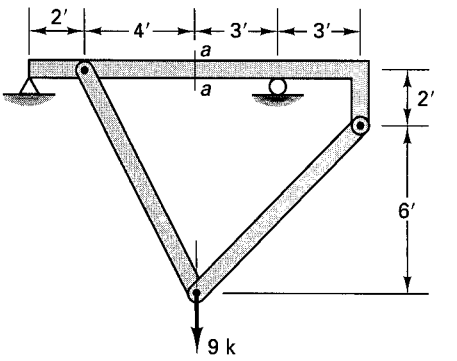


Fig. P7-17

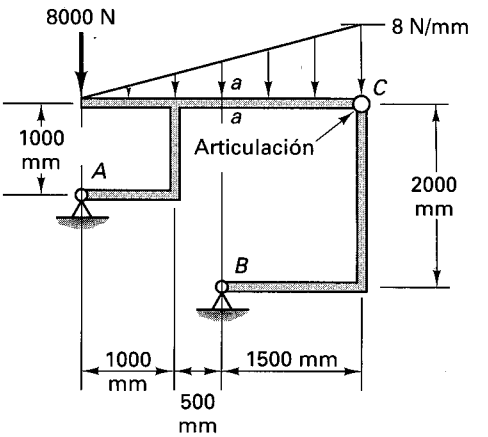


Fig. P7-18

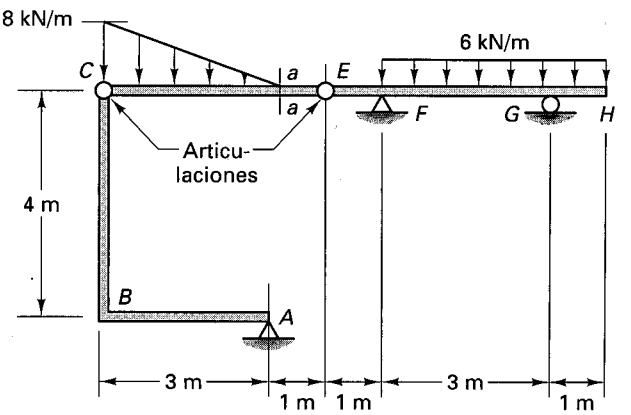


Fig. P7-19

Sección 7-8

7-20 al 7-24. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas mostradas en las figuras.

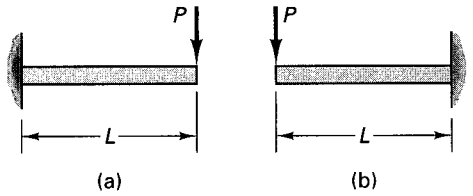


Fig. P7-20

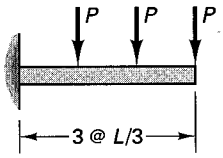


Fig. P7-21

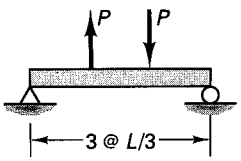


Fig. P7-22

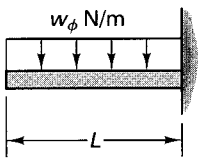


Fig. P7-23

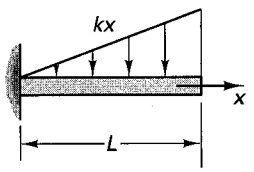


Fig. P7-24

7-25. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga mostrada en la figura 7-15.

7-26 al 7-28. Para las vigas cargadas como se muestra en las figuras, escriba expresiones explícitas para $M(x)$ a lo largo de los claros. Suponga los orígenes de x en A. Como las cargas aplicadas son discontinuas, se tendrán funciones diferentes para las regiones AC y CB.

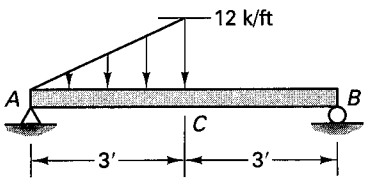


Fig. P7-26

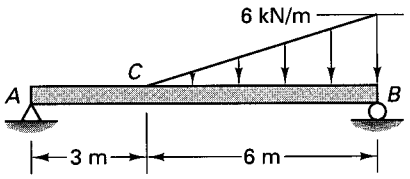


Fig. P7-27

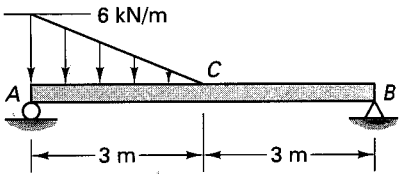


Fig. P7-28

7-29 al 7-31. Escriba expresiones explícitas para $M(x)$ a lo largo de los claros para las vigas estáticamente indeterminadas cargadas como se muestra en las figuras. Suponga los orígenes de x en A. Considere las reacciones a la izquierda como incógnitas. Aproveche la simetría en el problema 7-29.

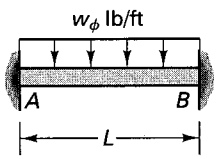


Fig. P7-29

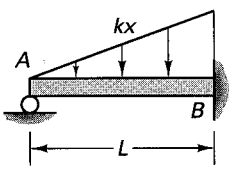


Fig. P7-30

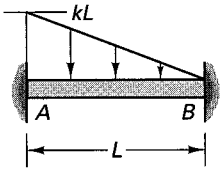


Fig. P7-31

7-32. Establezca expresiones generales para la fuerza axial $P(\theta)$, la fuerza cortante $V(\theta)$ y el momento flexionante $M(\theta)$ para la barra curva en el ejemplo 7-12, figura 7-23. El ángulo θ se mide en sentido antihorario desde el eje x positivo.

7-33. Establezca expresiones generales para la fuerza axial $P(\theta)$, la fuerza cortante $V(\theta)$ y el momento flexionante $M(\theta)$ para el anillo triarticulado del problema 7-11. El ángulo θ se mide en sentido antihorario desde el eje x positivo.

7-34. Una barra rectangular en forma de semicírculo está empotrada en un extremo y está sometida a una presión radial de p lb por unidad de longitud unitaria (véase la figura). Escriba las expresiones generales para $P(\theta)$, $V(\theta)$ y $M(\theta)$ y dibuje los resultados sobre un diagrama polar. Muestre las direcciones positivas supuestas para P, V y M sobre un diagrama de cuerpo libre.

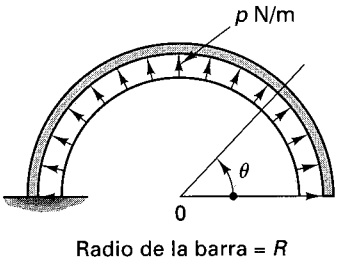


Fig. P7-34

7-35. Una barra en forma de ángulo recto, como se muestra en la figura, está empotrada en uno de sus extremos. (a) Escriba las expresiones generales para V, M y T (par de torsión) causadas por la aplicación de una fuerza F normal al plano de la barra flexionada. Dibuje los resultados. (b) Si además de la fuerza aplicada F, el peso de la barra de w lb por unidad de longitud debe también considerarse, ¿qué sistema de componentes de fuerza interna se desarrolla en el extremo empotrado?

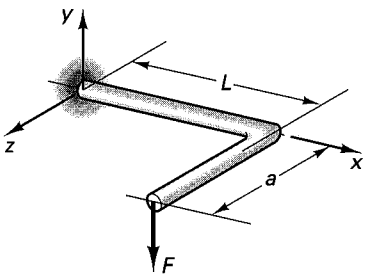


Fig. P7-35

Sección 7-9

7-36. Usando la ecuación diferencial 7-5, determine $V(x)$ y $M(x)$ para la viga cargada como se muestra en el problema 7-24. Verifique las reacciones usando estática convencional. [*Sugerencia:* Las constantes de integración pueden encontrarse de las condiciones de frontera $V(L) = 0$ y $M(L) = 0$.]

7-37 al 7-39. Usando la ecuación 7-5 para las vigas estáticamente determinadas mostradas en las figuras, encuentre $V(x)$ y $M(x)$ y las reacciones en los soportes. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. (*Sugerencia:* Las constantes de integración se encuentran de las condiciones de frontera para V y M. Este enfoque no puede extenderse a vigas estáticamente indeterminadas, que requieren el uso de una ecuación diferencial de orden superior, que se verá en el capítulo 10.)

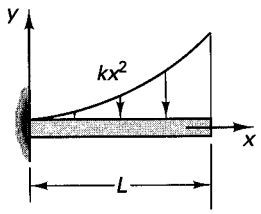


Fig. P7-37

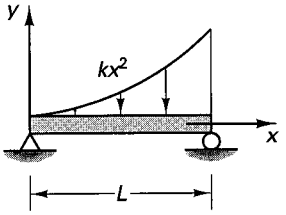


Fig. P7-38

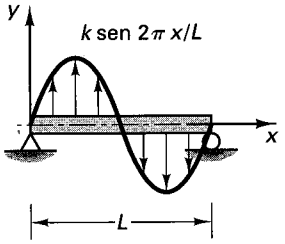


Fig. P7-39

Secciones 7-10 y 7-11

Los problemas 7-20 al 7-31 pueden también asignarse para ser resueltos usando los métodos desarrollados en esas dos secciones.

7-40 al 7-66. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas mostradas en las figuras usando los métodos de las secciones 7-10 y 7-11. Dibuje también las formas deflexionadas de las vigas aplicando los criterios dados en la figura 7-14. (Un análisis más detallado para dibujar tales formas se da en la sección 7-13.)

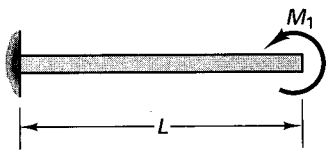


Fig. P7-40

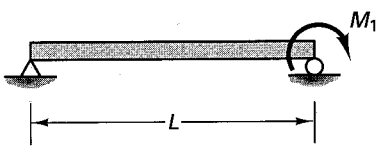


Fig. P7-41

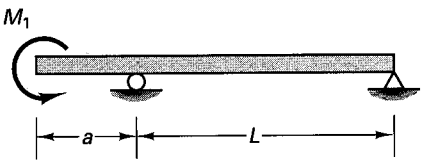


Fig. P7-42

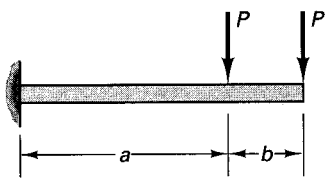


Fig. P7-43

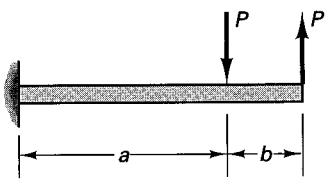


Fig. P7-44

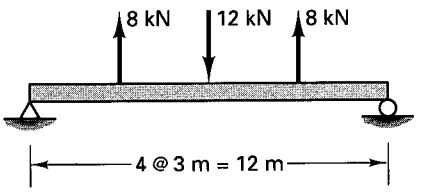


Fig. P7-45

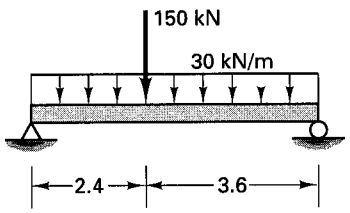


Fig. P7-46

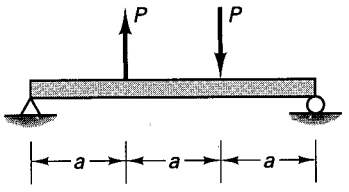


Fig. P7-47

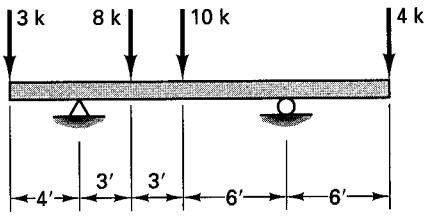


Fig. P7-48

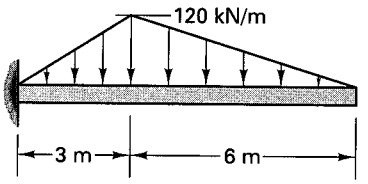


Fig. P7-49

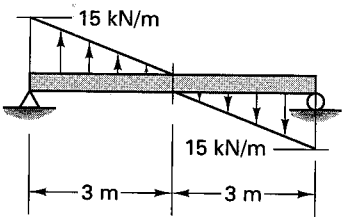


Fig. P7-50

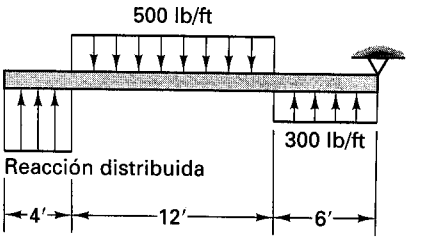


Fig. P7-51

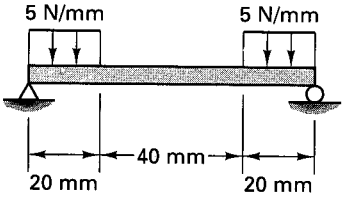


Fig. P7-52

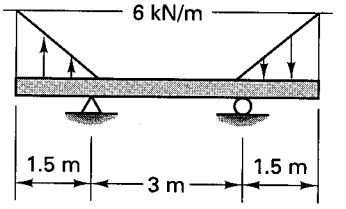


Fig. P7-53

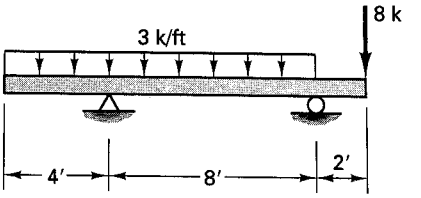


Fig. P7-54

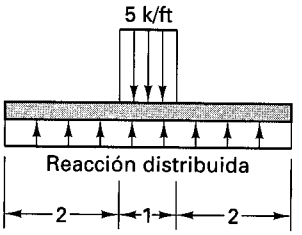


Fig. P7-55

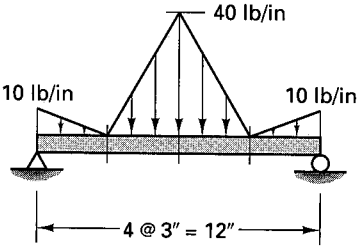


Fig. P7-56

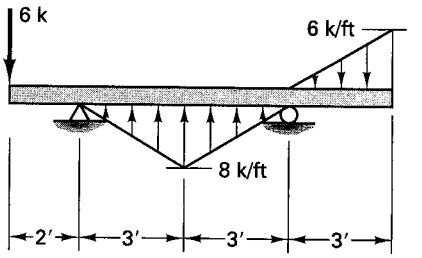


Fig. P7-57

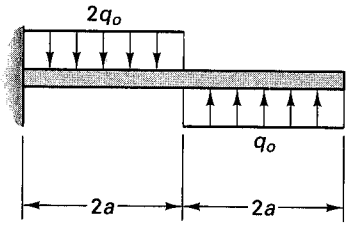


Fig. P7-58

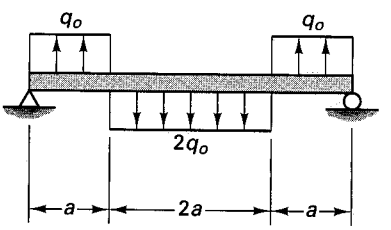


Fig. P7-59

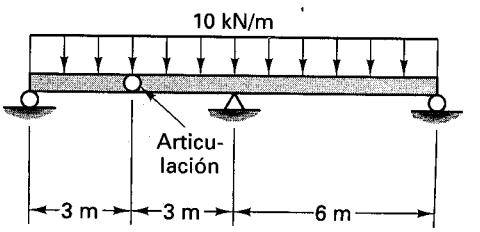


Fig. P7-60

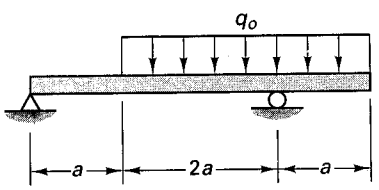


Fig. P7-61

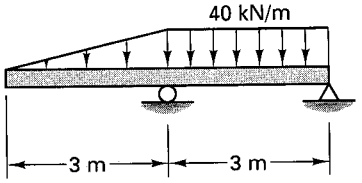


Fig. P7-62

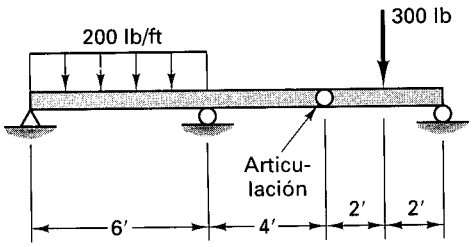


Fig. P7-63

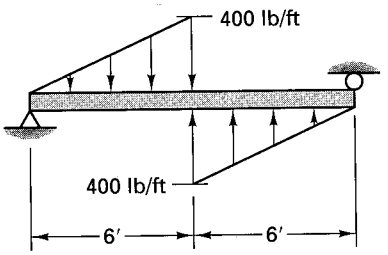


Fig. P7-64

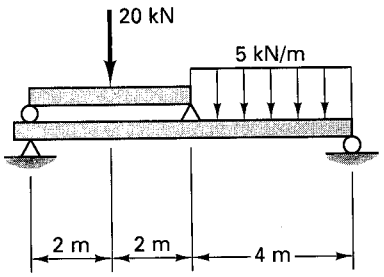


Fig. P7-65

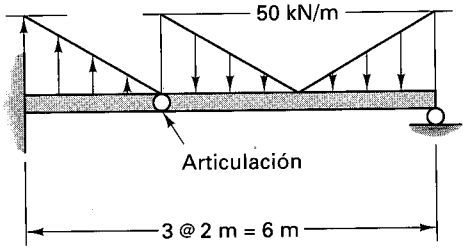


Fig. P7-66

7-67. Una pequeña barca angosta está cargada como se muestra en la figura. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la carga aplicada.

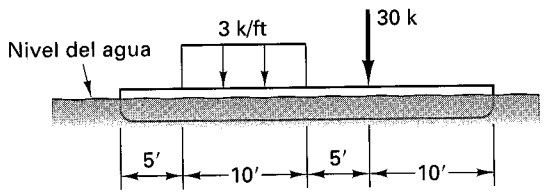


Fig. P7-67

7-68. La distribución de carga para un pequeño aeroplano en vuelo puede idealizarse como se muestra en la figura. En este diagrama, el vector A representa el peso del motor; B, el peso uniformemente distribuido de la cabina; C, el peso del fuselaje trasero; y D, las fuerzas de las superficies de control en la cola. Las fuerzas hacia arriba E son desarrolladas por los dos largueros de las alas. Usando estos datos, dibuje diagramas cualitativos, plausibles, de fuerza cortante y momento flexionante para el fuselaje.

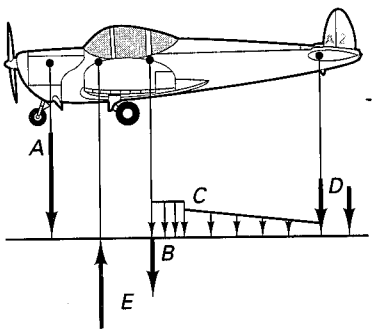


Fig. P7-68

7-69. El diagrama de momento flexionante para una viga soportada en A y B se muestra en la figura. ¿Cómo está cargada la viga?

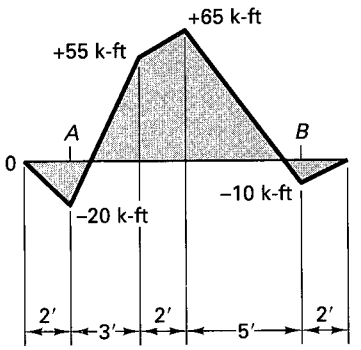


Fig. P7-69

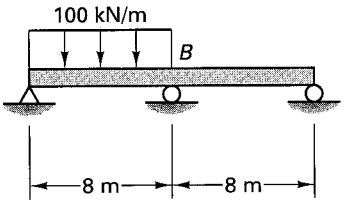


Fig. P7-70

7-70. Puede demostrarse por los métodos vistos en el capítulo 4 que el momento redundante sobre el soporte B de la viga mostrada en la figura es de -400 kN · m. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.

7-71 al 7-73. Para los sistemas estructurales mostrados en las figuras, dibuje los diagramas de fuerza axial P, fuerza cortante V y momento flexionante M. Note que la fuerza axial y la fuerza cortante contribuyen al equilibrio de fuerzas en un nudo en miembros quebrados (véase la figura 7-22).

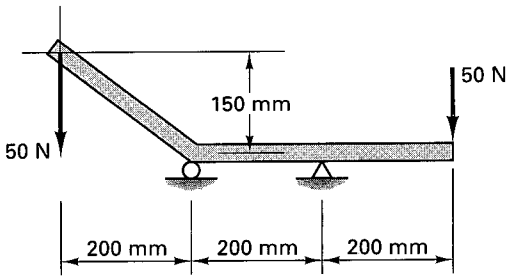


Fig. P7-71

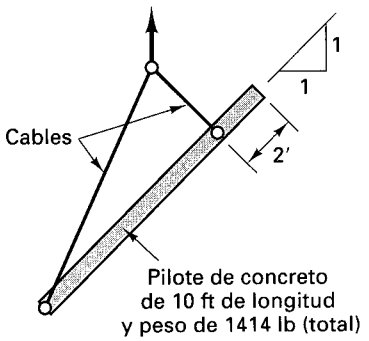


Fig. P7-72

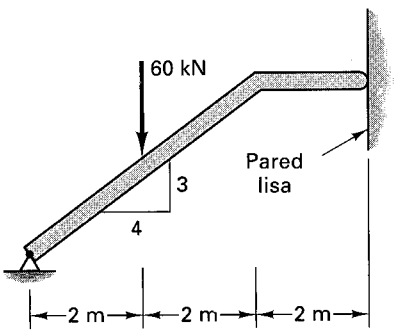


Fig. P7-73

7-74. Para el miembro *DF* de la estructura en el problema 1-56, dibuje los diagramas de fuerza axial, fuerza cortante y momento flexionante causados por la fuerza aplicada.

7-75 y 7-76. Es costumbre idealizar las fuerzas de soporte como fuerzas concentradas en un punto. En algunos casos las fuerzas distribuidas son también tratadas como fuerzas concentradas. Estas son simplificaciones de problemas complejos. En estos dos problemas, (a) determine las reacciones de acuerdo con el patrón de carga mostrado, (b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esos casos, (c) trate las reacciones en el problema 7-75 y la fuerza distribuida en el problema 7-76 como fuerzas concentradas y dibuje los correspondientes diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, y (d) establezca en porcentaje la discrepancia en los momentos máximos de las dos soluciones. Considere si el claro libre o la distancia centro a centro de las reacciones dan un resultado más exacto.

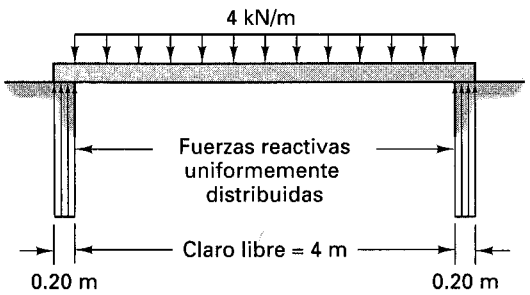


Fig. P7-75

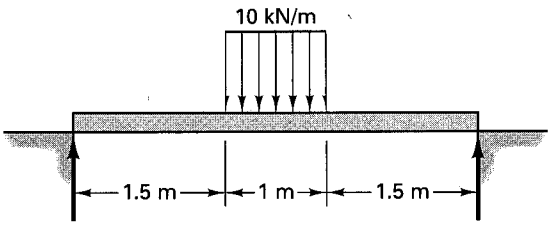


Fig. P7-76

Secciones 7-12 y 7-13

7-77 al 7-83. Para los sistemas estructurales mostrados en las figuras, dibuje los diagramas de fuerza axial *P*, fuerza cortante *V* y momento flexionante *M* debidos a las cargas aplicadas. Esos diagramas deben confinarse sólo a los miembros horizontales principales. Note que las vigas en los últimos cuatro problemas tienen un peralte finito.

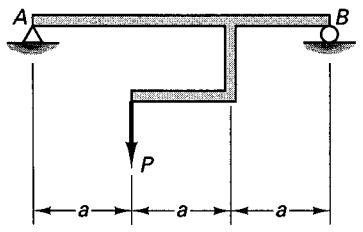


Fig. P7-77

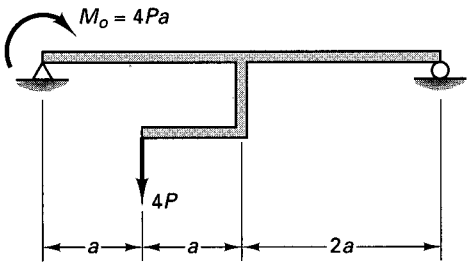


Fig. P7-78

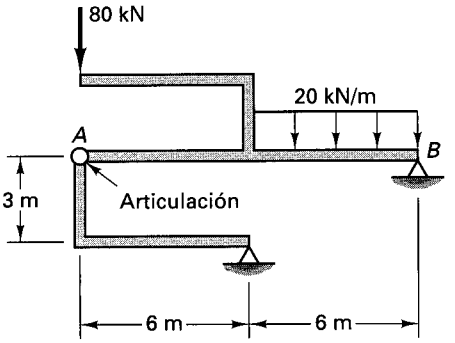


Fig. P7-79

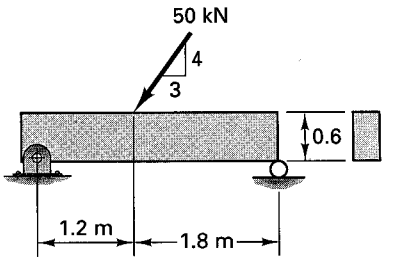


Fig. P7-80

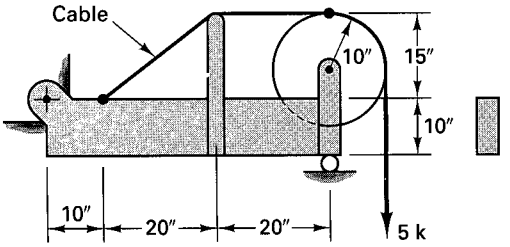


Fig. P7-81

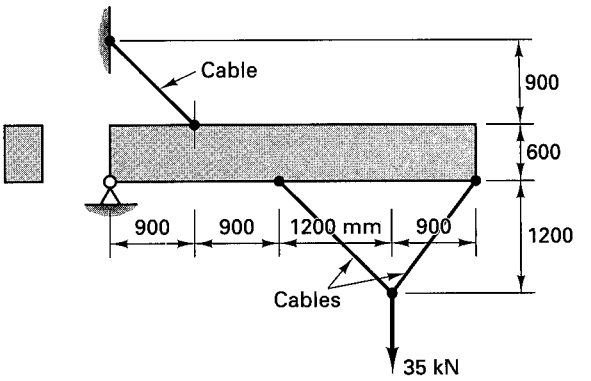


Fig. P7-82

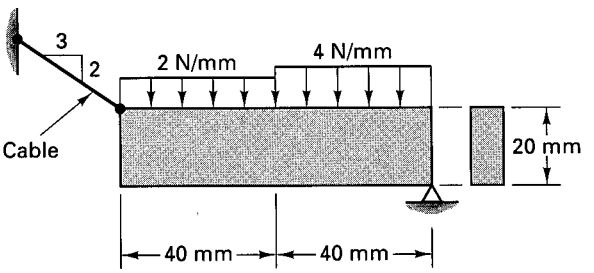


Fig. P7-83

7-84. Esboce la curva elástica para la viga cargada como se muestra en el problema 7-42.

7-85. Esboce la curva elástica para la viga cargada como se muestra en el problema 7-54.

7-86. Esboce la curva elástica para la viga cargada como se muestra en el problema 7-60.

7-87. Esboce la curva elástica para la viga cargada como se muestra en el problema 7-73.

Sección 7-14

7-88 al 7-93. Para las vigas cargadas como se muestra en las figuras, (a) encuentre $V(x)$ y $M(x)$ usando funciones de singularidad y la ecuación 7-5. Compruebe las reacciones por estática convencional. (b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

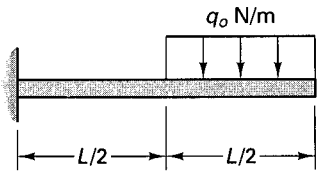


Fig. P7-88

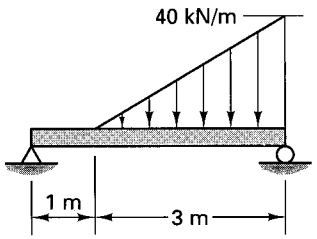


Fig. P7-89

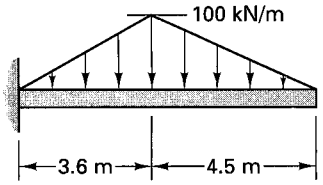


Fig. P7-90

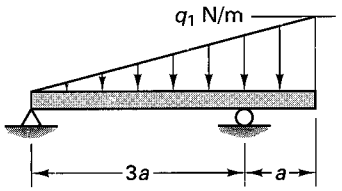


Fig. P7-91

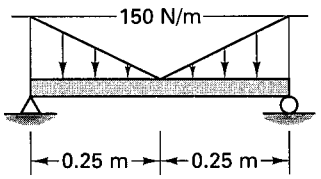


Fig. P7-92

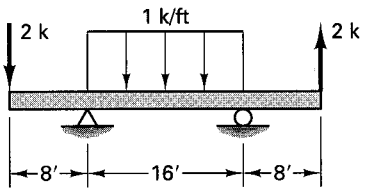


Fig. P7-93

8

Flexión simétrica en vigas

8-1. Introducción

En el capítulo previo se mostró que un sistema de fuerzas internas consistente en una fuerza axial, una fuerza cortante y un momento flexionante, puede desarrollarse en marcos planos y vigas. Los esfuerzos causados por una fuerza axial fueron analizados en los capítulos 1 y 3. En este capítulo serán considerados los esfuerzos debidos a la flexión de miembros con secciones transversales *simétricas* y sometidos a flexión en el plano de simetría. Se analizarán las distribuciones tanto elásticas como inelásticas de los esfuerzos causados por flexión. Se verá también la distribución de los esfuerzos en barras curvas. En el siguiente capítulo, el problema se generalizará para incluir la flexión *asimétrica* de miembros con secciones transversales simétricas, así como la flexión de miembros con sección transversal arbitraria. Se considerarán también problemas en los que la flexión ocurre acompañada de fuerzas axiales.

Por simplicidad, los miembros se mostrarán por lo general como vigas en posición horizontal. Cuando un segmento de viga está en equilibrio bajo la acción sólo de momentos flexionantes, tal condición se llama *flexión pura*. Un voladizo cargado con un momento concentrado en su extremo o un segmento de viga entre fuerzas concentradas, como se muestra en la figura 7-18, son ejemplos de flexión pura. En los capítulos subsecuentes se verá que usualmente los *esfuerzos de flexión* en vigas esbeltas son domi-

nantes. Por tanto, las fórmulas deducidas en este capítulo para flexión pura son directamente aplicables en numerosas situaciones de diseño.

Es importante notar que algunas vigas en virtud de sus esbelteces o falta de soporte lateral pueden volverse inestables bajo una carga aplicada y pueden entonces pandearse lateralmente y colapsarse. Tales vigas no serán estudiadas en este capítulo. Una mejor apreciación del fenómeno de la inestabilidad se obtendrá después del estudio del pandeo de columnas en el capítulo 16.

8-2. Hipótesis cinemática básica

En la teoría simplificada de la flexión, con el fin de establecer la relación entre los momentos flexionantes aplicados, las propiedades transversales de un miembro y las deformaciones y esfuerzos internos, se usa de nuevo el enfoque aplicado antes en el problema de la torsión. Este requiere primero que una hipótesis plausible sobre la deformación reduzca el problema estáticamente indeterminado internamente a uno determinado; en segundo lugar, que las deformaciones que causan deformaciones unitarias se relacionen con los esfuerzos a través de relaciones apropiadas esfuerzo-deformación unitaria; y finalmente, que se cumplan los requisitos de equilibrio entre las fuerzas externas e internas. La hipótesis cinemática clave para la deformación de una viga que se usa en la teoría simplificada, es analizada en esta sección. Una generalización de esta hipótesis forma la base para las teorías de placas y cascarones.

Para los fines presentes, considere una viga horizontal prismática cuya sección transversal tenga un eje vertical de simetría; véase la figura 8-1(a). Una línea horizontal que pase por los centroides de las secciones transversales será considerada como el eje de la viga. A continuación, considere un elemento típico de la viga entre dos planos perpendiculares al eje de la viga. En una vista lateral, tal elemento es identificado en la figura por la porción *abcd*. Cuando la viga es sometida a momentos iguales M_z actuando alrededor del eje z, figura 8-1(b), esta viga se flexiona en el plano de simetría y los planos inicialmente perpendiculares al eje de la viga se inclinan ligeramente. Sin embargo, las líneas *ad* y *bc* al convertirse en *a'd'* y *b'c'*, permanecen rectas.[1] Esta observación forma la base de la hipótesis[2] fundamental de la teoría de la flexión. Puede enunciarse de la siguiente manera: *Las secciones planas normales al eje de una viga permanecen planas después de que ésta es sometida a flexión.*

[1]Esto puede demostrarse usando un modelo de hule con una retícula dibujada sobre él. Alternativamente, pueden usarse barras verticales delgadas que pasen por el bloque de hule. En la vecindad inmediata de los momentos aplicados, la deformación es más compleja. Sin embargo, de acuerdo con el principio de Saint-Venant (Sección 3-3), éste es sólo un fenómeno local que rápidamente se disipa.

[2]Esta hipótesis con una inexactitud fue primero introducida por el matemático suizo Jacob Bernoulli (1645-1705). Posteriormente, otro gran matemático suizo, Leonard Euler (1707-1783), quien trabajó principalmente en Rusia y Alemania, hizo uso importante de este concepto. Esta suposición se llama a menudo la hipótesis de Bernoulli-Euler. En su forma correcta final, proviene de los trabajos del ingeniero y educador francés M. Navier (1785-1836).

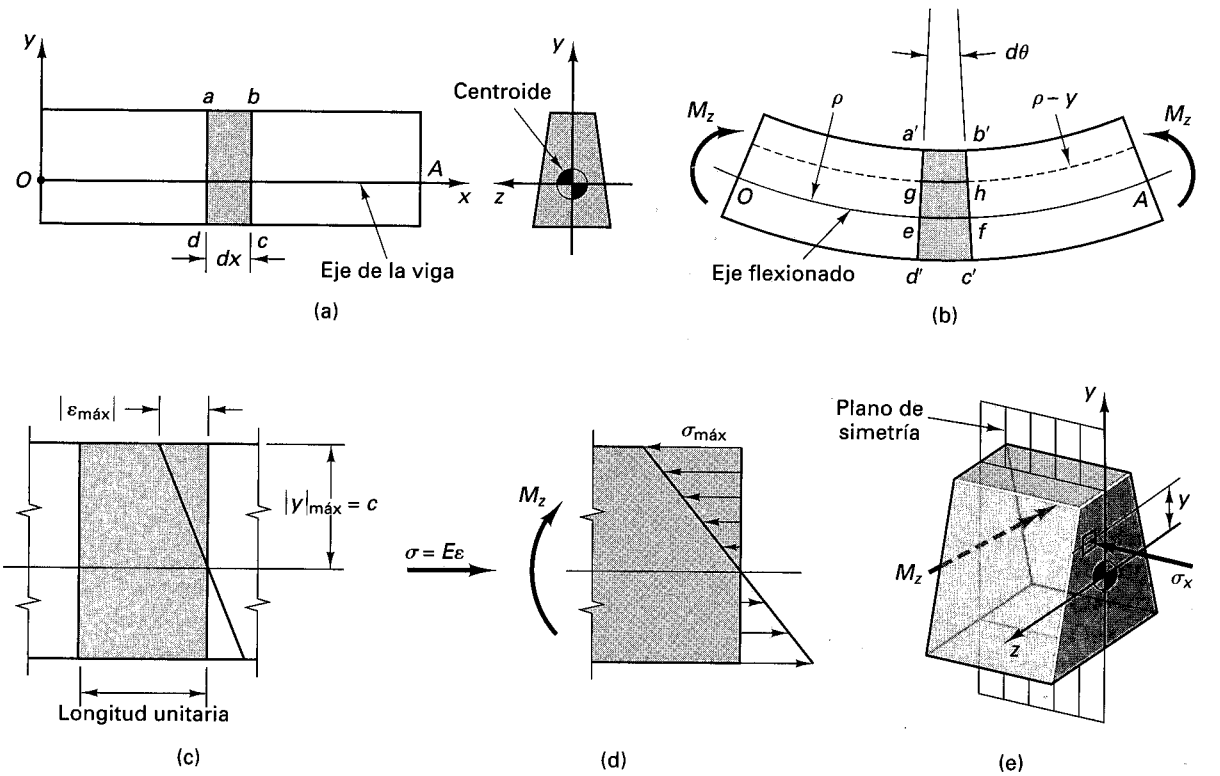


Fig. 8-1 Comportamiento supuesto de una viga elástica en flexión.

Como se demuestra en textos sobre teoría de la elasticidad, esta hipótesis es completamente verdadera para miembros rectangulares elásticos en flexión pura. Si se tienen también fuerzas cortantes, se introduce un pequeño error.[3] Sin embargo, prácticamente esta hipótesis es en general aplicable con un alto grado de exactitud si el material se comporta elástica o plásticamente, siempre que el peralte de la viga sea pequeño en relación al claro. En este capítulo, el análisis de esfuerzos en todas las vigas se basa en esta hipótesis.

En la flexión pura de una viga prismática, el eje de la viga se deforma según un círculo de radio ρ, como se muestra en la figura 8-1(b). Para un elemento definido por un ángulo infinitesimal $d\theta$, la longitud de la fibra *ef* del eje de la viga está dada por $ds = \rho\, d\theta$. Por consiguiente,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \kappa \tag{8-1}$$

donde el recíproco de ρ define el eje de *curvatura* κ. En la flexión pura de vigas prismáticas, tanto ρ como κ son constantes.

[3]Véase el análisis en la Sección 10-5.

La longitud de la fibra *gh* localizada sobre un radio $\rho - y$ puede encontrarse similarmente. Por tanto, la diferencia entre las longitudes de las fibras *gh* y *ef*, identificada aquí por $d\hat{u}$, puede expresarse como sigue:

$$d\hat{u} = (\rho - y)\, d\theta - \rho\, d\theta = -y\, d\theta \tag{8-2}$$

Dividiendo entre *ds* y usando la ecuación 8-1, el último término se vuelve κ. Además, como la deflexión y las rotaciones del eje de la viga son muy pequeñas, los cosenos de los ángulos implicados al formar las proyecciones de $d\hat{u}$ y *ds* sobre el eje horizontal, son casi igual a la unidad. Por tanto, en el desarrollo de la teoría simplificada de vigas, es posible reemplazar la deformación axial de la fibra $d\hat{u}$ por *du* y *ds* por *dx*.[4] Por tanto, dividiendo la ecuación 8-2 entre *ds* y aproximando $d\hat{u}/ds$ por du/dx, que de acuerdo con la ecuación 3-1 es la deformación unitaria ε_x, se tiene

$$\boxed{\varepsilon_x = -\kappa y} \tag{8-3}$$

Esta ecuación establece la expresión para la hipótesis cinemática básica de la teoría de la flexión. Sin embargo, aunque es claro que la deformación unitaria en una viga flexionada varía a lo largo del peralte de la viga linealmente con *y*, nos falta aún información para localizar el origen del eje *y*. Con ayuda de la ley de Hooke y de una ecuación de equilibrio, este problema será resuelto en la próxima sección.

8-3. La fórmula de la flexión elástica

Usando la ley de Hooke, la expresión para la deformación unitaria dada por la ecuación 8-3 puede reescribirse como una relación para el esfuerzo normal longitudinal σ_x:

$$\boxed{\sigma_x = E\varepsilon_x = -E\kappa y} \tag{8-4}$$

En esta ecuación, la variable *y* puede tomar valores tanto positivos como negativos.

Se dispone de dos ecuaciones no triviales de equilibrio para resolver el problema de la flexión en vigas. Una de ellas determina el origen de *y*; la otra completa la solución para la fórmula de la flexión. Usando la primera de esas ecuaciones, al requerir que en flexión pura la suma de todas las fuerzas en una sección en la dirección *x* sea cero, se tiene

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \int_A \sigma_x\, dA = 0 \tag{8-5}$$

[4]Un análisis adicional de las aproximaciones implicadas se encuentra en la Sección 14-3.

donde el subíndice A indica que la sumatoria de las fuerzas infinitesimales debe tomarse sobre toda el área transversal A de la viga. Esta ecuación, con ayuda de la ecuación 8-4 puede reescribirse como

$$\int_A -E\kappa y\, dA = -E\kappa \int_A y\, dA = 0 \qquad (8\text{-}6)$$

donde las constantes E y κ se sacan fuera de la segunda integral. Por definición, esta integral $\int y\, dA = \bar{y}A$, donde $\bar{y}$ es la distancia del origen al centroide de un área A. Como aquí esta integral es igual a cero y el área A no es cero, la distancia $\bar{y}$ debe hacerse igual a cero. Por tanto, el eje z debe pasar por el *centroide* de una sección. De acuerdo con las ecuaciones 8-3 y 8-4, esto significa que a lo largo del eje z así escogido, tanto la deformación unitaria normal ε_x como el esfuerzo normal σ_x son cero. En la teoría de la flexión, este eje se llama *eje neutro* de una viga. El eje neutro para cualquier viga *elástica* de material homogéneo puede determinarse fácilmente encontrando el centroide del área de una sección transversal.

Con base en este resultado, se muestra esquemáticamente en la figura 8-1(c) la variación lineal de deformación unitaria. La distribución correspondiente del esfuerzo *elástico* de acuerdo con la ecuación 8-4 se muestra en la figura 8-1(d). Tanto la deformación máxima absoluta ε_x como el esfuerzo máximo absoluto $\sigma_{máx}$ ocurren donde y alcanza su *mayor* valor.

Representaciones alternativas de la distribución del esfuerzo elástico de flexión en una viga están ilustradas en la figura 8-2. Note que el problema es *tridimensional* aunque por simplicidad se usan generalmente representaciones bidimensionales. El lugar geométrico de un eje neutro a lo largo de la longitud de una viga define la *superficie neutra*, como se indica en la figura 8-3.

Para completar la deducción de la fórmula de la flexión elástica, debemos emplear la segunda ecuación de equilibrio: La suma de los momentos aplicados externamente y de los momentos resistentes internos debe ser

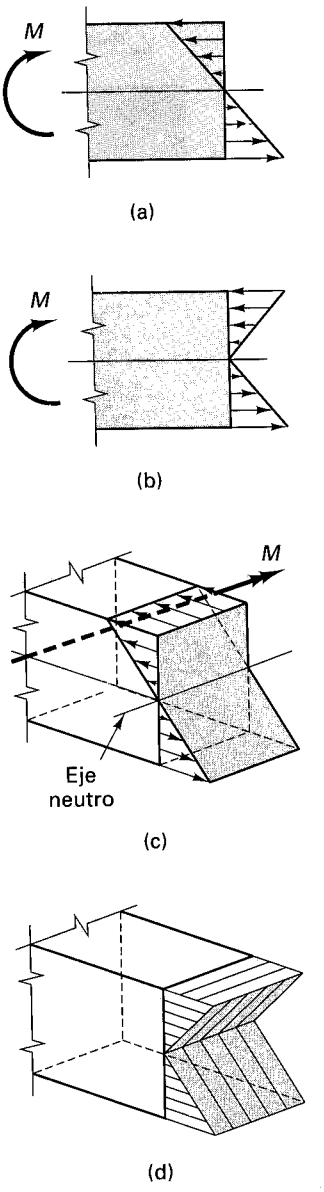


Fig. 8-2 Representaciones alternativas del momento flexionante.

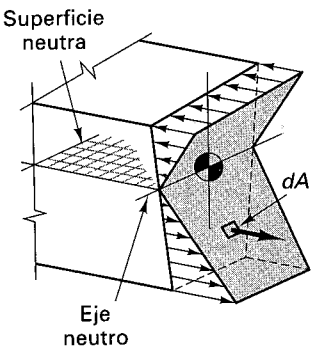


Fig. 8-3

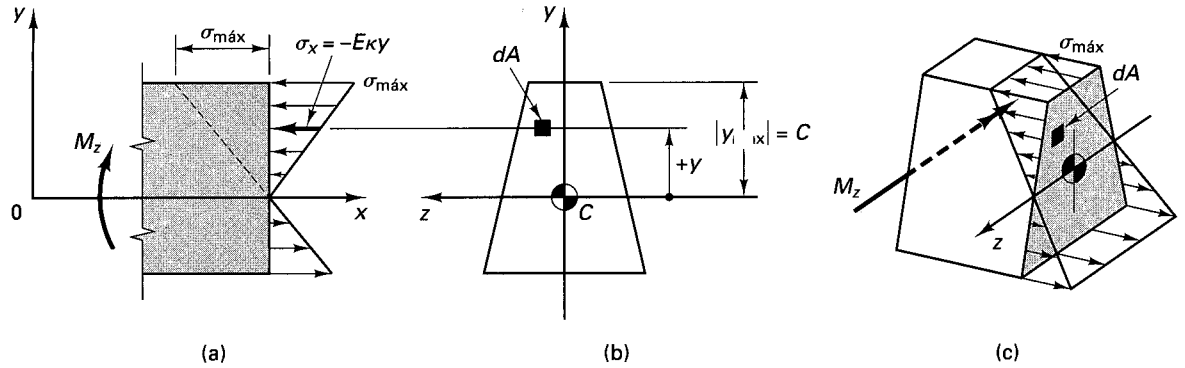


Fig. 8-4 Segmento de una viga en flexión pura.

cero (es decir, deben estar en equilibrio). Para el segmento de viga en la figura 8-4(a), esto da

$$\Sigma M_O = 0 \curvearrowright + \qquad M_z - \underbrace{\int_A \underbrace{E\kappa y}_{\text{esfuerzo}} \underbrace{dA}_{\text{área}}}_{\text{fuerza}} \underbrace{y}_{\text{brazo}} = 0 \qquad (8\text{-}7)$$

Un signo negativo enfrente de la integral es necesario porque los esfuerzos de *compresión* σ_x desarrollan un momento antihorario respecto al eje z. Los esfuerzos de *tensión* debajo del eje neutro, donde las y tienen un signo negativo, contribuyen a este momento de la misma manera. Este signo también se obtiene directamente de la ecuación 8-4. Desde un punto de vista ligeramente diferente, la ecuación 8-7 establece que el momento externo en sentido horario M_z es equilibrado por el momento antihorario desarrollado por los esfuerzos internos en una sección. Reescribiendo la ecuación 8-7 en esta forma y como E y κ son constantes,

$$M_z = E\kappa \int_A y^2\, dA \qquad (8\text{-}8)$$

En mecánica, la última integral, que depende sólo de las propiedades geométricas del área transversal, se llama *momento de inercia* o *segundo momento del área* A y en este texto se usará la letra I para designarlo. Debe calcularse con respecto al eje neutro (centroidal) de la sección transversal. Como I debe siempre ser determinado con respecto a un eje particular, es a menudo identificado con un subíndice correspondiente a un eje. Para el caso considerado, este subíndice es z; es decir,

$$\boxed{I_z = \int_A y^2\, dA} \qquad (8\text{-}9)$$

Con esta notación, la ecuación 8-8 da el siguiente resultado:

$$\kappa = \frac{M_z}{EI_z} \tag{8-10}$$

Ésta es la relación básica que da la curvatura de una viga elástica sometida a un momento específico. Sustituyendo la ecuación 8-10 en la ecuación 8-4, se obtiene la *fórmula de la flexión*[5] elástica para vigas:

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y \tag{8-11}$$

Esta fórmula se dedujo con los ejes coordenados mostrados en la figura 8-5(a). Si la deducción para un miembro con sección transversal de doble simetría se hiciese con las coordenadas mostradas en la figura 8-5(b), la expresión para el esfuerzo longitudinal σ_x sería

$$\sigma_x = +\frac{M_y}{I_y} z \tag{8-12}$$

La inversión del signo respecto a la ecuación 8-11 es necesaria porque un M_y positivo causa esfuerzos de tensión para una z positiva. La aplicación de esas ecuaciones a la flexión biaxial así como una extensión de la teoría de la flexión a vigas con secciones transversales asimétricas, es considerada en las secciones 9-2 y 9-5. En esta sección veremos vigas con secciones transversales simétricas flexionadas en el plano de simetría. Para tales aplicaciones es usual reescribir la fórmula de la flexión de manera que dé directamente el esfuerzo normal *máximo* $\sigma_{máx}$; el valor de $|y|_{máx}$ se designa entonces por c. Es también práctica común no escribir el signo, como en la ecuación 8-11, ni tampoco los subíndices de M e I. Como los esfuerzos normales deben desarrollar un par estáticamente equivalente al momento flexionante interno, su sentido puede determinarse por inspección. Según esto, la fórmula de la flexión toma la forma

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} \tag{8-13}$$

[5]Tomó casi dos siglos desarrollar esta aparentemente simple expresión. Los primeros intentos para resolver el problema de la flexión fueron hechos por Galileo en el siglo XVII. En la forma en que se usa hoy en día, el problema fue resuelto en la primera parte del siglo XIX. Por lo general, se le acredita a Navier este logro. Sin embargo, hay quienes sostienen que el crédito debería ser para Coulomb, quien también dedujo la fórmula de la torsión.

En conformidad con la práctica precedente, al tratar con la flexión de secciones *simétricas*, se empleará a menudo en este texto la notación simplificada consistente en dejar de escribir en la ecuación 8-11 los subíndices z para M e I.

La fórmula de la flexión y sus variantes vistas antes son de gran importancia en las aplicaciones del diseño estructural y de máquinas. Al aplicar esas fórmulas, el momento flexionante interno puede expresarse en newton-metros (N · m) o en libras-pulgadas (lb-in), c en metros [m] o en pulgadas [in] e I en m^4 o en in^4. El uso de unidades consistentes da para las unidades de σ: $(N \cdot M)(m)/(m^4) = N/m^2 = Pa$, o $[\text{in-lb}][\text{in}]/[\text{in}^4] = [\text{lb/in}^2] = \text{psi}$.

Debe notarse que σ_x, tal como es dado por las ecuaciones 8-11 y 8-12, es el único esfuerzo que resulta de la flexión pura de una viga. Por tanto, en la representación matricial del tensor esfuerzo, se tiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se verá en el capítulo 11, este esfuerzo puede transformarse o ser resuelto en esfuerzos actuando a lo largo de conjuntos diferentes de ejes coordenados.

Para concluir este análisis, es interesante notar que debido a la razón de Poisson, la zona comprimida de una viga se expande lateralmente;[6] la zona de tensión se contrae. Las deformaciones unitarias en las direcciones y y z son $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\varepsilon_x$, donde $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ y σ_x está dado por la ecuación 8-11. Esto está en completo acuerdo con la solución rigurosa. El efecto de Poisson, como lo muestra la teoría de la elasticidad, deforma el eje neutro en una curva de gran radio y la superficie neutra se curva en dos direcciones opuestas; véase la figura 8-6. En el tratamiento previo se supuso que la superficie neutra se curva en sólo una dirección. Estos interesantes detalles no son de importancia en la mayor parte de los problemas prácticos.

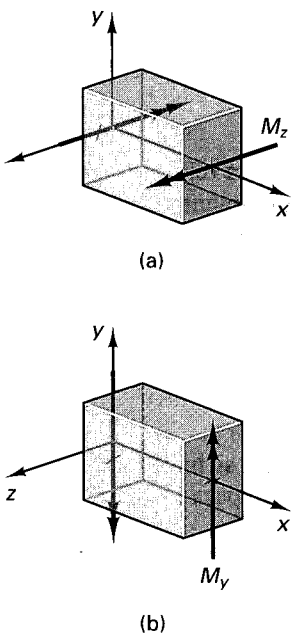


Fig. 8-5 Definiciones de momentos positivos.

Resumen del procedimiento y extensiones Los mismos *tres conceptos básicos* de la mecánica de sólidos que se usaron para desarrollar las teorías de barras cargadas axialmente y de flechas circulares en torsión, se usan en la deducción precedente de las fórmulas de la flexión. Éstos pueden resumirse como sigue:

1. *Las condiciones de equilibrio* (estática) se usan para determinar el momento flexionante resistente interno en una sección.
2. *La geometría de deformación* (cinemática) se usa suponiendo que las secciones planas de una viga permanecen planas después de la deformación. Esto conduce a la conclusión de que las deformaciones unitarias normales a lo largo de una sección de viga varían linealmente desde el eje neutro.

[6]Se recomienda efectuar un experimento con una goma de borrar ordinaria.

3. *Las propiedades de los materiales* (relaciones constitutivas) en la forma de la ley de Hooke son supuestamente aplicables a las deformaciones unitarias normales longitudinales. Se ignora el efecto de Poisson relativo a la contracción y expansión transversal del material.

Al ampliar este enfoque a la flexión de vigas de dos o más materiales (Sección 8-9), así como a la flexión inelástica de vigas (Sección 8-8), los primeros dos conceptos enumerados siguen siendo aplicables. Sólo el tercero, que trata de las propiedades mecánicas de los materiales, debe ser modificado. Como ejemplo de un cambio necesario para tales casos, considere la viga que tiene la sección transversal mostrada en la figura 8-7(a). Esta viga está hecha de los dos materiales 1 y 2, unidos entre sí en su interfaz. Los módulos elásticos de los dos materiales son E_1 y E_2, donde los subíndices identifican el material. Para los fines del análisis suponga que $E_2 > E_1$.

Cuando dicha viga compuesta se flexiona, igual que en una viga de un sólo material, los diferentes materiales varían linealmente como se muestra en la figura 8-7(b). Sin embargo, los esfuerzos longitudinales dependen de los módulos elásticos y se muestran en la figura 8-7(c). En la interfaz entre los dos materiales, mientras que la deformación unitaria de ambos materiales es la misma, los esfuerzos son diferentes y dependen de las magnitudes de E_1 y E_2. El asunto restante en tales problemas consiste en localizar el eje o superficie neutros. Esto puede hacerse fácilmente para vigas con secciones transversales con un eje de simetría vertical.

Para vigas de varios materiales diferentes, los módulos elásticos de cada material deben ser identificados. Sea E_i un módulo elástico para el i-ésimo material en la sección transversal compuesta. La ecuación 8-4 puede entonces escribirse como

$$\sigma_x = E_i \varepsilon_x = -E_i \kappa y \tag{8-14}$$

donde, en la figura 8-7(a), $y = y_b - \bar{y}_b$. En esta relación, y_b es arbitrariamente medida desde el fondo de la sección y $\bar{y}_b$ localiza el eje neutro como se muestra.

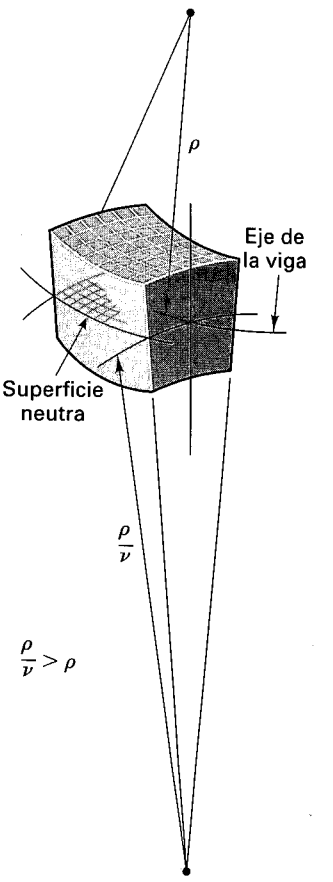


Fig. 8-6 Segmento de una viga flexionada.

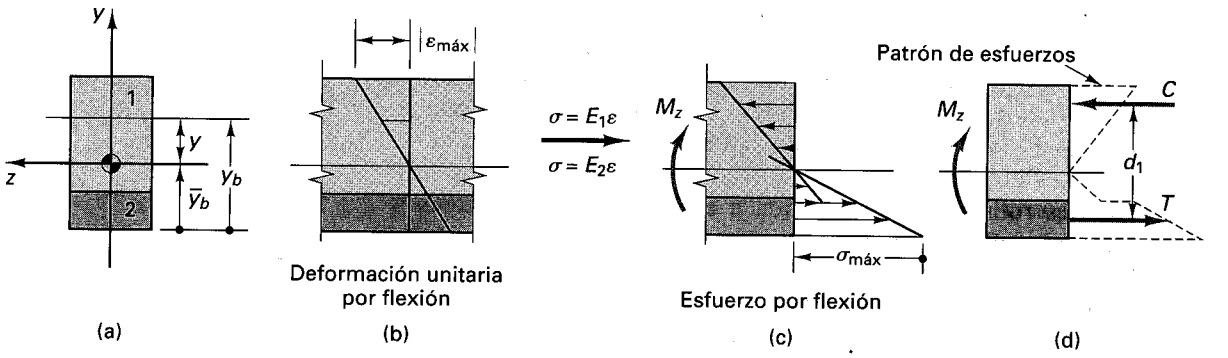


Fig. 8-7 Viga de dos materiales elásticos en flexión donde $E_2 > E_1$.

Como en flexión pura la fuerza F_x en una sección en la dirección x debe desaparecer, siguiendo el mismo procedimiento que antes y sustituyendo la ecuación 8-14 en la ecuación 8-5,

$$F_x = \int_A \sigma_x \, dA = -\kappa \int_A E_i y \, dA = 0 \tag{8-15}$$

La última expresión difiere de la ecuación 8-6 sólo en que E_i no se coloca fuera de la integral. Sustituyendo $y = y_b - \bar{y}_b$ en la ecuación 8-15 y como $\bar{y}_b$ es constante,

$$-\kappa \int_A E_i y_b \, dA + \kappa \bar{y}_b \int_A E_i \, dA = 0$$

y

$$\bar{y}_b = \frac{\int_A E_i y_b \, dA}{\int_A E_i \, dA} \tag{8-16}$$

donde la integración debe efectuarse con las apropiadas E_i de cada material. Esta ecuación define el *centroide de módulo ponderado* y localiza el eje neutro.

Esencialmente se usa el mismo proceso para el análisis de la flexión inelástica de vigas, cambiando las relaciones esfuerzo-deformación unitaria. Los primeros dos de los conceptos básicos enumerados siguen siendo aplicables.

La teoría desarrollada para vigas elásticas de *un* material está en completo acuerdo con la solución[7] matemáticamente exacta basada en la teoría de la elasticidad para flexión pura de una barra rectangular elástica. Sin embargo, aun para este caso limitado, las condiciones de frontera en los extremos requieren que los esfuerzos superficiales σ_x estén distribuidos sobre los extremos de acuerdo con la ecuación 8-11. Para este caso, las secciones planas permanecen precisamente planas durante la flexión. Sin embargo, en las aplicaciones usuales, por el *principio de Saint-Venant*, se supone por lo general que los esfuerzos a una distancia aproximadamente igual al peralte de un miembro desde la posición del momento aplicado, son esencialmente uniformes y están dados por la ecuación 8-11. Los esfuerzos locales en puntos de aplicación de fuerzas o de cambios en la sección transversal, se calculan usando factores de concentración de esfuerzos. En aplicaciones, la teoría estudiada es rutinariamente aplicada a cualquier tipo de sección transversal, sea el material elástico o plástico.

En conclusión, debe notarse que de todos los casos de flexión pura, los esfuerzos que actúan sobre el área arriba del eje neutro desarrollan una fuerza en un sentido mientras que aquellos debajo del eje neutro desarro-

[7] S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1970, pág. 284.

llan una fuerza que actúa en el sentido opuesto. Un ejemplo se muestra en la figura 8-7(d), donde la tensión T es igual a la compresión C y el par $T - C$ es igual al momento M_z. Puede emplearse en forma conveniente en algunos problemas este método de reducir los esfuerzos a fuerzas y un par.

8-4. Cálculo del momento de inercia

Al aplicar la fórmula de la flexión debe determinarse el momento de inercia I del área de la sección transversal respecto al eje neutro. Su valor está definido por la integral de $y^2\,dA$ sobre toda el área de la sección transversal de un miembro y debe recalcarse que para la fórmula de la flexión, el momento de inercia debe calcularse respecto al eje neutro. Este eje pasa por el centroide del área de la sección transversal. Se muestra en las secciones 9-6 y 9-7 que para secciones transversales simétricas, el eje neutro es perpendicular al eje de simetría. El momento de inercia respecto a tal eje es un máximo o bien un mínimo, y por esta razón, este eje es uno de los ejes *principales* de un área. Los procedimientos para determinar centroides y momentos de inercia de áreas son analizados en textos sobre estática.[8] Sin embargo, tales procedimientos serán repasados a continuación.

El primer paso para evaluar la I de un área es encontrar su centroide. Se lleva a cabo entonces una integración de $y^2\,dA$ con respecto al eje horizontal que pasa por el centroide del área. En aplicaciones de la fórmula de la flexión, la integración sobre áreas es necesaria para sólo unas cuantas formas elementales como rectángulos y triángulos. Los valores del momento de inercia para algunas formas simples pueden encontrarse en textos sobre estática así como en cualquier manual estándar de ingeniería civil o de ingeniería mecánica (véase también la Tabla 2 del apéndice). La mayoría de las áreas transversales usadas pueden dividirse en una combinación de esas formas simples. Para encontrar la I de un área compuesta de varias formas simples, es necesario usar el *teorema de los ejes paralelos*; vemos a continuación su deducción.

Consideremos que el área A mostrada en la figura 8-8 es una *parte* del área de la sección transversal de una viga en flexión. El eje centroidal z_c para *esta* área está a una distancia d_z del eje centroidal z de *toda* el área transversal. Entonces, por definición, el momento de inercia I_{z_c} del área A respecto a su eje z_c es

$$I_{z_c} = \int_A y_c^2\,dA \tag{8-17}$$

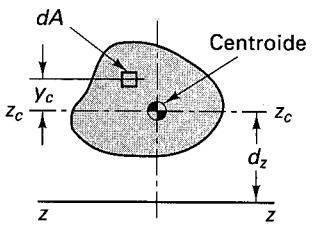


Fig. 8-8 Área para deducir el teorema de los ejes paralelos.

[8]Por ejemplo, véase J. L. Meriam y L. G. Kraige, *Engineering Mechanics*, vol. 1, Statics, 2a. ed., Nueva York, Wiley, 1986.

Por otra parte, el momento de inercia I_z de la *misma* área A respecto al eje z es

$$I_z = \int_A (y_c + d_z)^2 \, dA$$

Elevando al cuadrado las cantidades en paréntesis y sacando las constantes fuera del signo de integración, se tiene

$$I_z = \int_A y_c^2 \, dA + 2d_z \int_A y_c \, dA + d_z^2 \int_A dA$$

La primera integral, de acuerdo con la ecuación 8-17, es igual a I_{z_c}, la segunda es igual a cero ya que y_c pasa por el centroide de A y la última integral se reduce a Ad_z^2. Por consiguiente,

$$\boxed{I_z = I_{z_c} + Ad_z^2} \tag{8-18}$$

Este es el *teorema de los ejes paralelos*. Puede enunciarse como sigue: El momento de inercia de un área respecto a cualquier eje es igual al momento de inercia de la misma área respecto a un eje paralelo que pase por el centroide del área, más el producto de la misma área y el cuadrado de la distancia entre los dos ejes.

En los cálculos, la ecuación 8-18 debe aplicarse a *cada* parte en que un área transversal se ha subdividido y sumarse los resultados para obtener I_z para toda la sección; es decir,

$$I_z \text{ (toda la sección)} = \Sigma(I_{z_c} + Ad_z^2) \tag{8-18a}$$

Después de terminado este proceso, el subíndice z puede cancelarse al tratar la flexión de secciones transversales *simétricas*.

Los siguientes ejemplos ilustran el método de calcular I directamente por integración de dos áreas simples. Luego se aplica el teorema de los ejes paralelos a un área compuesta. En las Tablas 3 a la 8 del apéndice se dan valores de I para perfiles de acero comerciales como perfiles W, ángulos y tubos.

Ejemplo 8-1

Encuentre el momento de inercia respecto al eje horizontal que pasa por el centroide del área rectangular mostrada en la figura 8-9.

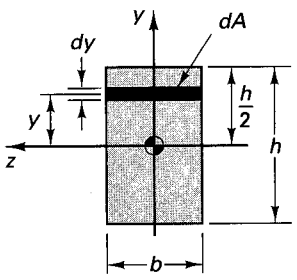


Fig. 8-9

SOLUCIÓN

El centroide de esta sección se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría. Aquí es conveniente tomar dA igual a $b\,dy$. Por consiguiente,

$$I_z = I_o = \int_A y^2 \, dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b \, dy = b\left|\frac{y^3}{3}\right|_{-h/2}^{+h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

Por tanto,

$$\boxed{I_z = \frac{bh^3}{12}} \quad \text{y} \quad \boxed{I_y = \frac{b^3h}{12}} \tag{8-19}$$

Estas expresiones se usan con frecuencia ya que las vigas rectangulares son muy comunes.

Ejemplo 8-2

Encuentre el momento de inercia respecto a un diámetro para un área circular de radio c; véase la figura 8-10.

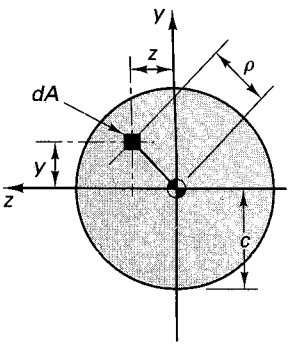


Fig. 8-10

SOLUCIÓN

Para encontrar I para un círculo, note primero que $\rho^2 = z^2 + y^2$, como puede verse en la figura. Luego, usando la definición de I_p y notando la simetría respecto a ambos ejes, se tiene por la ecuación 6-2,

$$I_p = \int_A \rho^2\, dA = \int_A (y^2 + z^2)\, dA = \int_A y^2\, dA + \int_A z^2\, dA$$
$$= I_z + I_y = 2I_z$$

$$\boxed{I_z = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi c^4}{4}} \tag{8-20}$$

En aplicaciones mecánicas, las flechas circulares a menudo actúan como vigas; por consiguiente, la ecuación 8-20 será de utilidad. Para una flecha tubular, el momento de inercia del interior hueco debe restarse de la última expresión.

Ejemplo 8-3

Determine el momento de inercia I respecto al eje horizontal del área mostrada en la figura 8-11, para usarse en la fórmula de la flexión.

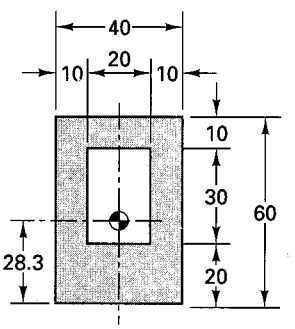


Fig. 8-11

SOLUCIÓN

Como el momento de inercia va a usarse en la fórmula de la flexión, él debe obtenerse respecto al eje que pasa por el centroide del área. Por consiguiente, debe encontrarse primero el centroide del área. La mejor manera de hacer esto es considerar toda la sección exterior y restar de ella el hueco interior. Por conveniencia, el trabajo se lleva a cabo en forma tabular. Luego se usa el teorema de los ejes paralelos para obtener I

Área	A (mm^2)	y (mm) *(desde el fondo)*	Ay
Área total	$40 \times 60 = 2400$	30	72 000
Hueco interior	$-20 \times 30 = -600$	35	−21 000
	$\Sigma A = 1800$ mm^2		$\Sigma Ay = 51\,000$ mm^3

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{51\,000}{1800} = 28.3 \text{ mm desde el fondo}$$

Para el área total:

$$I_{z_c} = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \times 60^3}{12} = 72 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Ad^2 = 2400(30 - 28.3)^2 = \underline{0.69 \times 10^4 \text{mm}^4}$$

$$I_z = 72.69 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Para el hueco interior:

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \times 30^3}{12} = 4.50 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Ad^2 = 600(35 - 28.3)^2 = \underline{2.69 \times 10^4 \text{ mm}^4}$$

$$I_z = 7.19 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Para la sección compuesta:

$$I_z = (72.69 - 7.19)10^4 = 65.50 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Nótese en particular que al aplicar el teorema de los ejes paralelos, cada elemento del área compuesta contribuye con dos términos a la I total. Un término es el momento de inercia de un área respecto a su propio eje centroidal y el otro término es debido a la transferencia de su eje al centroide de toda el área. Un trabajo metódico es un requisito para resolver tales problemas correctamente.

8-5. Aplicaciones de la fórmula de la flexión elástica

El esfuerzo máximo en una sección de una viga está dado por la ecuación 8-13, $\sigma_{máx} = Mc/I$, y en la mayor parte de los problemas prácticos, es este esfuerzo máximo el que tiene que ser determinado. Por tanto, es conveniente hacer este proceso de determinar $\sigma_{máx}$ tan sencillo como sea posible.

Esto puede lograrse notando que I y c son constantes para una sección dada de una viga. Por consiguiente, I/c es una constante. Además, como esta razón es sólo función de las dimensiones transversales de una viga, ella puede determinarse en forma única para cualquier área transversal. Esta razón se llama *módulo de sección elástico* de una sección y se designa con la letra S. Con esta notación, la ecuación 8-13 toma la forma

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c} = \frac{M}{S} \tag{8-21}$$

o, expresado de otra manera,

$$\text{esfuerzo máximo de flexión} = \frac{\text{momento flexionante}}{\text{módulo de sección}}$$

Si el momento de inercia I se mide en in^4 (o en m^4) y c en in (o en m), S se mide en in^3 (o en m^3). Igualmente, si M se mide en lb-in (o en $N \cdot m$), las unidades de esfuerzo son psi (o N/m^2). Vale la pena repetir que la distancia c se mide desde el eje neutro hasta la fibra más remota de la viga. Esto hace $I/c = S$ un mínimo y consecuentemente M/S da el esfuerzo máximo. Las secciones eficientes para resistir flexión elástica tienen una S tan grande como es posible para una cantidad dada de material. Esto se logra situando tanto material como es posible lejos del eje neutro.

El uso del *módulo de sección elástico* en la ecuación 8-21 corresponde de alguna manera al uso del término de área A en la ecuación 1-5 ($\sigma = P/A$). Sin embargo, sólo el esfuerzo máximo de flexión sobre una sección se obtiene con la ecuación 8-21, mientras que el esfuerzo calculado con la ecuación 1-5 es para cualquier punto sobre la sección del miembro.

La ecuación 8-21 es ampliamente usada en la práctica debido a su simplicidad. Para facilitar su uso, en los manuales se tabulan los módulos de sección de varias secciones transversales de perfiles comerciales. En la Tablas 3 a la 9 del apéndice se dan los valores de unas cuantas secciones de acero. La ecuación 8-21 es particularmente conveniente para el diseño de vigas. Una vez que se ha determinado el momento flexionante máximo en una viga y se ha escogido un esfuerzo permisible, el módulo de sección puede despejarse de la ecuación 8-21. Esta información es suficiente para seleccionar una viga. Sin embargo, una consideración detallada del diseño de una viga será demorada hasta el capítulo 13. Esto es necesario ya que una fuerza cortante, que también genera esfuerzos, usualmente también actúa en la sección de una viga. La interacción de los diversos tipos de esfuerzos debe ser considerada primero para tener una mejor idea del problema.

Los siguientes dos ejemplos ilustran los cálculos de los esfuerzos de flexión en secciones específicas, donde, además de los momentos flexionantes, son también requeridas por equilibrio las fuerzas cortantes. Como se mostrará en el siguiente capítulo, la presencia de pequeñas o moderadas fuerzas cortantes no afecta considerablemente a los esfuerzos de flexión en vigas esbeltas. Tanto momentos como fuerzas cortantes ocurren simultáneamente en la misma sección.

Ejemplo 8-4

Una viga en voladizo de madera que pesa 0.75 kN/m soporta una fuerza concentrada hacia arriba de 20 kN en su extremo, como se muestra en la figura 8-12(a). Determine los esfuerzos máximos de flexión en una sección a 2 m desde el extremo libre.

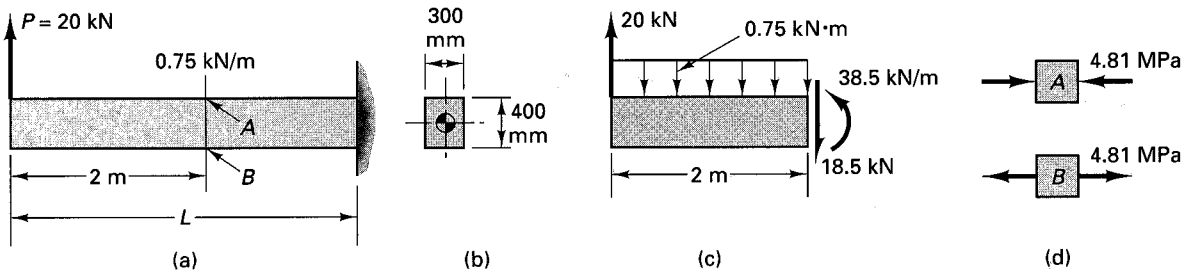


Fig. 8-12

SOLUCIÓN

Un diagrama de cuerpo libre para un segmento de 2 m de la viga se muestra en la figura 8-12(c). Para mantener este segmento en equilibrio se requiere una fuerza cortante de $20 - (0.75 \times 2) = 18.5$ kN y un momento flexionante de $(20 \times 2) - (0.75 \times 2 \times 1) = 38.5$ kN · m en la sección. Estas dos cantidades se muestran con su sentido correcto en la figura 8-12(c). La distancia del eje neutro a las fibras extremas es $c = 200$ mm, que es la misma para las fibras a tensión y a compresión.

De la ecuación 8-19,

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{300 \times 400^3}{12} = 16 \times 10^8 \text{ mm}$$

De la ecuación 8-13,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{38.5 \times 10^6 \times 200}{16 \times 10^8} = \pm 4.81 \text{ MPa}$$

Del sentido del momento flexionante mostrado en la figura 8-12(c), se ve que las fibras superiores de la viga están en compresión y que las fibras inferiores están en tensión. En la respuesta dada, el signo positivo se aplica al esfuerzo de tensión y el signo negativo se aplica al esfuerzo de compresión. Ambos esfuerzos decrecen linealmente hacia el eje neutro donde el esfuerzo por flexión es cero. Los esfuerzos normales que actúan sobre los elementos infinitesimales en A y B se muestran en la figura 8-12(d). Es importante aprender a hacer tal representación de un elemento ya que se usará frecuentemente en los capítulos 11 y 13.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Si sólo se busca el esfuerzo máximo, puede usarse la ecuación que contiene al módulo de sección. El módulo de sección para una sección rectangular en forma algebraica es

$$S = \frac{I}{c} = \frac{bh^3}{12}\frac{2}{h} = \frac{bh^2}{6} \tag{8-22}$$

En este problema, $S = 300 \times 400^2/6 = 8 \times 10^6\ \text{mm}^3$, y por la ecuación 6-21,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{M}{S} = \frac{38.5 \times 10^6}{8 \times 10^6} = 4.81\ \text{MPa}$$

Ambas soluciones conducen a los mismos resultados

Ejemplo 8-5

Encuentre los esfuerzos máximos de tensión y compresión que actúan normalmente a la sección *A*—*A* de la ménsula mostrada en la figura 8-13(a) causados por la fuerza aplicada de 8 kips.

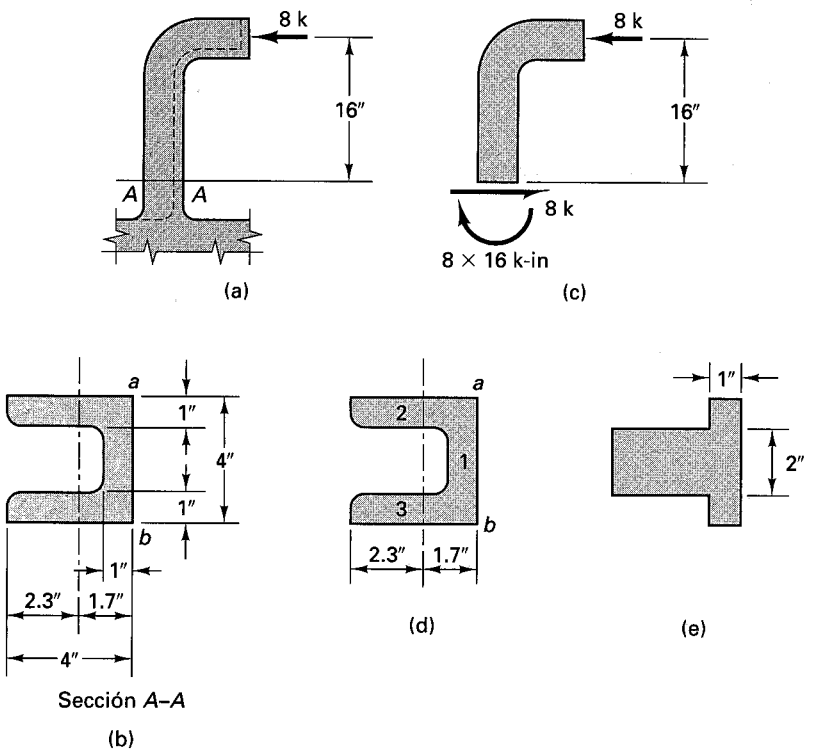


Fig. 8-13

SOLUCIÓN

La fuerza cortante y el momento flexionante de magnitud y sentido apropiados para mantener el segmento del miembro en equilibrio se muestran en la figura 8-13(c). A continuación debe localizarse el eje neutro de la viga. Esto se hace localizando el centroide del área mostrada en la figura 8-13(b); véase también la figura 8-13(d). Luego se calcula el momento de inercia respecto al eje neutro. En ambos cálculos se supone que los lados de la sección transversal son rectangulares, es decir, se desprecian los filetes. Entonces, teniendo en cuenta el sentido del momento flexionante resistente y aplicando la ecuación 8-13, se obtienen los valores buscados.

Número de área	A (in^2)	y (in) (desde ab)	Ay
1	4.0	0.5	2.0
2	3.0	2.5	7.5
3	3.0	2.5	7.5
	$\Sigma A = 10.0$ in^2		$\Sigma Ay = 17.0$ in^3

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A} = \frac{17.0}{10.0} = 1.70 \text{ in} \quad \text{desde la línea } ab$$

$$I = \Sigma (I_o + Ad^2) = \frac{4 \times 1^3}{12} + 4 \times 1.2^2 + \frac{2 \times 1 \times 3^3}{12} + 2 \times 3 \times 0.8^2 = 14.43 \text{ in}^4$$

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{8 \times 16 \times 2.3}{14.43} = 20.4 \text{ ksi} \quad \text{(compresión)}$$

$$\sigma_{máx} = \frac{Mc}{I} = \frac{8 \times 16 \times 1.7}{14.43} = 15.1 \text{ ksi} \quad \text{(tensión)}$$

Estos esfuerzos varían linealmente hacia el eje neutro y desaparecen ahí. Los resultados obtenidos serían los mismos si el área transversal de la ménsula tuviese forma de T, como se muestra en la figura 8-13(e). Las propiedades de esta sección respecto al eje considerado son las mismas que las de la canal. Ambas secciones tienen un eje de simetría.

El ejemplo previo muestra que los miembros que resisten flexión pueden dimensionarse para tener esfuerzos máximos diferentes en tensión y en compresión. Esto es importante para materiales con resistencias diferentes en tensión y en compresión. Por ejemplo, el hierro fundido es fuerte en compresión y débil en tensión. Así entonces, las dimensiones de un miembro de hierro fundido pueden fijarse para que se tenga un esfuerzo máximo de tensión de pequeño valor. La capacidad potencial del material puede ser entonces utilizada mejor.

Ejemplo 8-6

Considere una viga rectangular de dos materiales unidos entre sí como se muestra en la figura 8-14(a). La parte superior de 150 × 250 mm es de madera con E_w = 10 GPa; la parte inferior de 10 × 150 mm es de acero con E_s = 200 GPa. Si esta viga está sometida a un momento flexionante de 30 kN · m respecto a un eje horizontal, usando el enfoque mostrado en la figura 8-7, determine los esfuerzos máximos en la madera y en el acero.

SOLUCIÓN

Aplicando la ecuación 8-16, se encuentra la posición del eje neutro respecto al fondo:

$$\bar{y}_b = \frac{\int_0^{10} E_s y_b b\, dy_b + \int_{10}^{260} E_w y_b b\, dy_b}{\int_0^{10} E_s b\, dy_b + \int_{10}^{260} E_w b\, dy_b}$$

$$= \frac{200 \times 10^2/2 + 10 \times (260^2 - 10^2)/2}{200 \times 10 + 10 \times 250} = 77.2 \text{ mm}$$

Como el ancho de la viga se cancela, el resto de los cálculos se llevan a cabo para un ancho unitario de la viga. Dejando de lado el diagrama de deformación unitaria de la viga, ya que es el mismo que el mostrado en la figura 8-7(b), la distribución del esfuerzo de flexión elástico se muestra en la figura 8-14(b). La posición de la superficie neutra se identifica por las dimensiones 77.2 y 182.8 mm. Entonces, designando el esfuerzo máximo de compresión en la madera por $\sigma^c{}_w$, se calculan varias cantidades auxiliares:

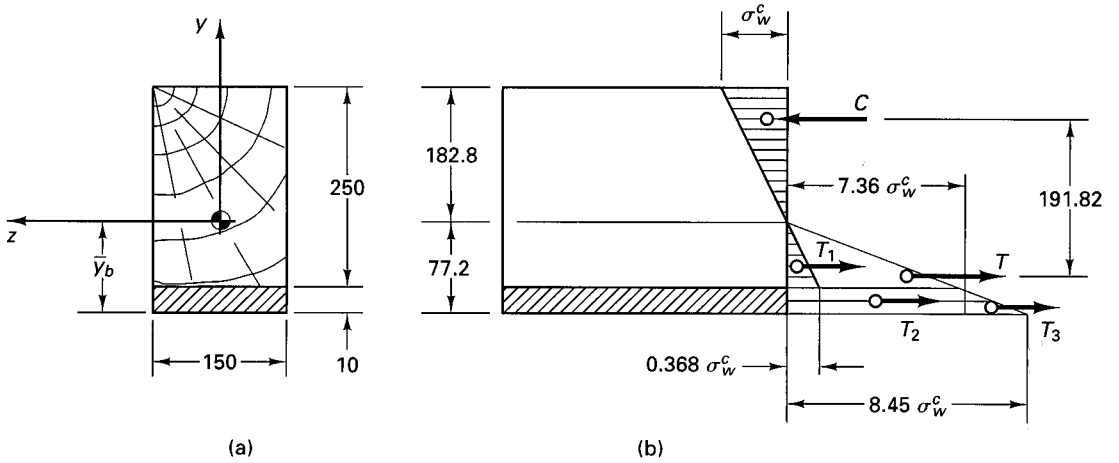


Fig. 8-14

Esfuerzo máximo de tensión en la madera:

$$\sigma_w^t = \sigma_w^c \times (77.2 - 10)/182.8 = 0.368\sigma_w^c$$

Notando que $E_s = 20 \times E_w$, *el esfuerzo máximo de tensión en el acero es*:

$$\sigma_s^t = 20(77.2/182.8) \times \sigma_w^c = 8.45\sigma_w^c$$

Esfuerzo en el acero en la superficie de contacto con la madera:

$$\sigma_s = (67.2/77.2) \times \sigma_s^t = 7.36\sigma_w^c$$

Con base en esos esfuerzos, se determinan las fuerzas de tensión T_1, T_2, T_3 y la fuerza C de compresión [véase la figura 8-14(b)]:

$$T_1 = \frac{1}{2} \times 67.2 \times 0.368 \times \sigma_w^c = 12.36\sigma_w^c$$

$$T_2 = 10 \times 7.36 \times \sigma_w^c = 73.6\sigma_w^c$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \times 10 \times (8.45 - 7.36) \times \sigma_w^c = 5.45\sigma_w^c$$

Por consiguiente, $T = T_1 + T_2 + T_3 = 91.4\sigma_w^c$, y $C = \frac{1}{2} \times 182.8 \times \sigma_w^c = 91.4\sigma_w^c$. por lo tanto, $T = |C|$, tal como era de esperarse.

Puede demostrarse que la fuerza resultante de tensión está a 7.25 mm del fondo de la viga y que la fuerza resultante de compresión C está a $182.8/3 = 60.93$ mm desde la parte superior de la viga. Por lo tanto, la distancia entre T y C es $260 - 7.25 - 60.93 = 191.82$ mm.

Dividiendo el momento aplicado entre el ancho de la viga, se obtiene el momento aplicado por ancho unitario de la viga (es decir, $30 \times 10^6/150 = 200 \times 10^3$ N · mm/mm). Entonces, dividiendo este momento entre la distancia entre T y C,

$$T = |C| = 200 \times 10^3/191.82 = 1040 \text{ N/mm}$$

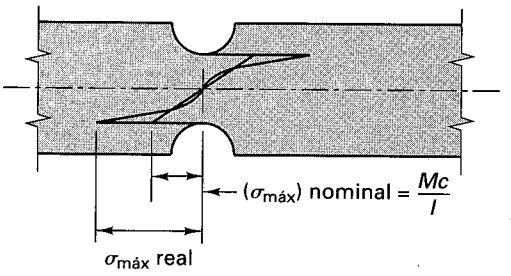
El esfuerzo máximo de compresión en la madera se obtiene de

$$C = \frac{1}{2} 182.8\sigma_w^c = 1040 \text{ N/mm}$$

Por consiguiente, $\sigma_w^c = 11.38$ Mpa, y el esfuerzo máximo de tensión en el acero $\sigma_s^t = 8.45 \times \sigma_w^c = 96.2$ MPa.

8-6. Concentraciones de esfuerzos

La teoría de la flexión desarrollada en las secciones precedentes se aplica sólo a vigas de sección transversal constante (es decir, vigas *prismáticas*). Si el área transversal de la viga varía gradualmente, no tiene lugar ninguna desviación significativa del patrón de esfuerzos visto antes. Sin embargo, si



$$K = \frac{(\sigma_{máx}) \text{ real}}{(\sigma_{máx}) \text{ nominal}}$$

Fig. 8-15 Significado del factor de concentración de esfuerzos en flexión.

se tienen muescas, ranuras, agujeros para pernos o un cambio abrupto en el área transversal de la viga, se presentarán altos esfuerzos *locales*. Esta situación es análoga a la estudiada antes para miembros cargados axialmente o a torsión. Nuevamente es muy difícil obtener expresiones analíticas para el esfuerzo real. En el pasado, la mayor parte de la información relativa a la distribución real del esfuerzo provenía de experimentos fotoelásticos exactos. Los métodos numéricos que emplean elementos finitos son ahora ampliamente usados con el mismo fin.

Afortunadamente, como en los otros casos analizados, sólo las proporciones geométricas del miembro afectan el patrón de esfuerzos locales. Además, como el interés es por lo general en el esfuerzo máximo, los factores de concentraciones de esfuerzos pueden usarse convenientemente. La razón K del esfuerzo máximo real al esfuerzo máximo nominal en la sección *mínima*, como es dada por la ecuación 8-13, se define como el factor de concentración de esfuerzos en flexión. Este concepto se ilustra en la figura 8-15. Por consiguiente, en general

$$(\sigma_{máx})_{real} = K\frac{Mc}{I} \tag{8-23}$$

En esta ecuación Mc/I es para el menor ancho de una barra.

Las figuras 8-16 y 8-17 son gráficas de factores de concentraciones de esfuerzos para dos casos representativos.[9] El factor K, que depende de las proporciones del miembro, puede obtenerse de esos diagramas. Un estudio de esas gráficas indica la conveniencia de usar filetes de buen tamaño y la eliminación de muescas agudas para reducir las concentraciones locales de esfuerzos. Esos remedios son altamente deseables en el diseño de máquinas. Para materiales dúctiles, donde las fuerzas aplicadas son estáticas, las concentraciones de esfuerzos son menos importantes.

[9] Estas figuras están adaptadas de un artículo por M. M. Frocht, "Factors of stress concentration photoelastically determined", *Trans. ASME*, **57**, 1935, A-67.

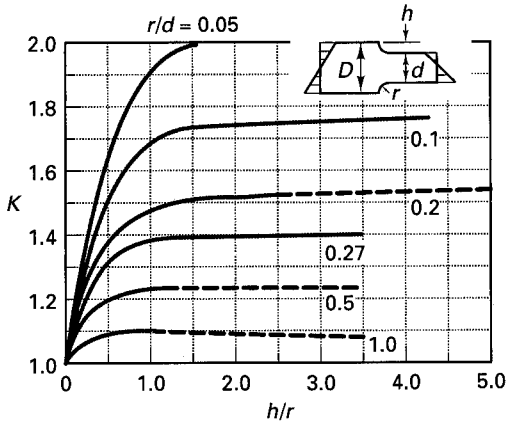


Fig. 8-16 Factores de concentración de esfuerzos en flexión pura para barras planas con diversos filetes.

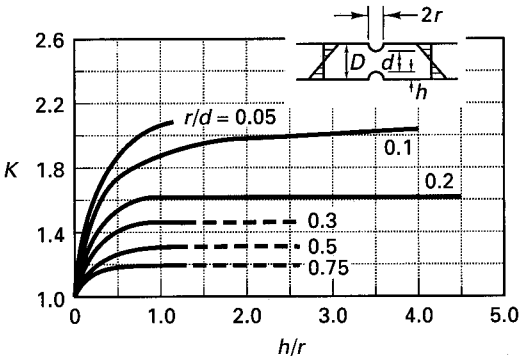


Fig. 8-17 Factores de concentración de esfuerzos en flexión para barras planas ranuradas.

Las concentraciones de esfuerzos se vuelven particularmente importantes si el área transversal tiene ángulos reentrantes. Por ejemplo, esfuerzos altamente localizados pueden ocurrir en el punto en que el patín[10] y el alma de una viga I se encuentran. Para minimizar esos esfuerzos concentrados, los perfiles comerciales rolados o extruidos tienen filetes en todos esos puntos.

Además de las concentraciones de esfuerzos causadas por los cambios del área transversal de una viga, otro efecto es importante. Las fuerzas son a menudo aplicadas sobre un área limitada de una viga. Además, las reacciones actúan sólo localmente sobre una viga en los puntos de soporte. En el tratamiento previo, todas esas fuerzas fueron idealizadas como fuerzas concentradas. En la práctica, la presión promedio de apoyo entre el miembro que transmite tal fuerza y la viga, se calculan en el punto de contacto de tales fuerzas con la viga. Esta presión de apoyo o esfuerzo, actúa normalmente a la superficie neutra de una viga y está en *ángulo recto con los esfuerzos de flexión vistos en este capítulo*. Un estudio más detallado del efecto de tales fuerzas muestra que ellas causan una perturbación de todos los esfuerzos en una escala local y que la presión de apoyo como se calcula normalmente es una cruda aproximación. Los esfuerzos a ángulos rectos con los esfuerzos de flexión se comportan más bien como se muestra en la figura 3-9.

El lector debe recordar que los factores de concentraciones de esfuerzos son aplicables sólo mientras el material se comporta elásticamente. El comportamiento inelástico del material tiende a reducir esos factores.

[10]El *alma* es una parte vertical delgada de una viga. Las partes horizontales delgadas de una viga se llaman *patines*.

8-7. Energía de deformación elástica en flexión pura

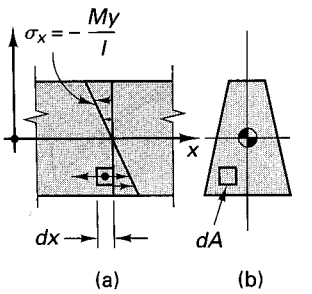


Fig. 8-18 Segmento de viga para deducir la energía de deformación por flexión.

En la Sección 3-5 fue formulada la energía de deformación elástica para un elemento infinitesimal sometido a esfuerzos normales. Usando esto como base, puede encontrarse la energía de deformación elástica para vigas en flexión pura. Para este caso, el esfuerzo normal varía linealmente desde el eje neutro como se muestra en la figura 8-18, y de acuerdo con la ecuación 8-11, este esfuerzo es, en notación simplificada, $\sigma = -My/I$. El volumen de un elemento típico infinitesimal de viga es $dx\,dA$, donde dx es su longitud y dA es su área transversal. Sustituyendo esas expresiones en la ecuación 3-15 e integrando sobre el volumen V de la viga, se obtiene la expresión para la energía de deformación elástica U en una viga en flexión pura:

$$U = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \int_V \frac{1}{2E}\left(-\frac{My}{I}\right)^2 dx\,dA$$

Reordenando términos y recordando que M en una sección de una viga es constante y que el orden de efectuar la integración es arbitrario,

$$U = \int_{\text{longitud}} \frac{M^2}{2EI^2}\,dx \int_{\text{área}} y^2\,dA = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} \qquad (8\text{-}24)$$

donde la última simplificación es posible ya que, por definición, $I = \int y^2\,dA$. La ecuación 8-24 reduce la integral de volumen para la energía elástica de vigas prismáticas en flexión pura a una integral simple tomada sobre la longitud L de una viga.

Alternativamente, la ecuación 8-24 puede deducirse desde un punto de vista diferente, considerando un segmento elemental de una viga de dx de largo, como se muestra en la figura 8-19. Antes de la aplicación de los momentos flexionantes M, los dos planos perpendiculares al eje de la viga son paralelos. Después de la aplicación de los momentos flexionantes, las extensiones de los mismos dos planos, que permanecen planos, se intersecan en O, y el ángulo incluido entre esos dos planos es $d\theta$. Además, como el valor pleno del momento M se alcanza *gradualmente*, el momento *promedio* que recorre un ángulo $d\theta$ es $\frac{1}{2}M\,d\theta$. Por consiguiente, el trabajo externo W_e hecho sobre un segmento de una viga es $dW_e = \frac{1}{2}M\,d\theta$. Además, como para deflexiones pequeñas $dx \approx \rho\,d\theta$, donde ρ es el radio de curvatura de la curva elástica, por la ecuación 8-10, $1/\rho = M/EI$. Por lo tanto, del principio de conservación de la energía, la energía de deformación unitaria interna de un elemento de una viga es

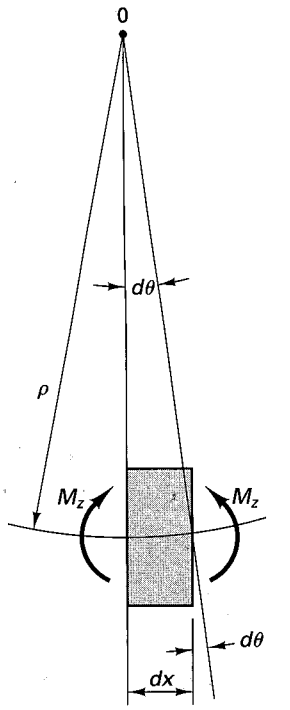


Fig. 8-19 Segmento de viga para la deducción alternativa de la energía de deformación por flexión.

$$dU = dW_e = \frac{1}{2}M\,d\theta = \frac{1}{2}M\frac{dx}{\rho} = \frac{M^2\,dx}{2EI}$$

que tiene el mismo significado que la ecuación 8-24.

Ejemplo 8-7

Encuentre la energía de deformación elástica almacenada en la viga rectangular en voladizo debido al momento flexionante M aplicado en el extremo; véase la figura 8-20.

SOLUCIÓN

El momento flexionante en toda sección de esta viga, así como la rigidez flexionante EI, es constante. Por aplicación directa de la ecuación 8-24,

$$U = \int_0^L \frac{M^2\,dx}{2EI} = \frac{M^2}{2EI}\int_0^L dx = \frac{M^2L}{2EI}$$

Es instructivo escribir este resultado en otra forma. Entonces, como $\sigma_{máx} = Mc/I$, $M = \sigma_{máx}I/c = 2\sigma_{máx}I/h$ e $I = bh^3/12$,

$$U = \frac{(2\sigma_{máx}I/h)^2L}{2EI} = \frac{\sigma_{máx}^2}{2E}\left(\frac{bh\,L}{3}\right) = \frac{\sigma_{máx}^2}{2E}\left(\frac{1}{3}\,\text{vol}\right)$$

Para un esfuerzo máximo dado, el volumen del material en esta viga es sólo un tercio tan efectivo para absorber energía como lo sería en una barra sometida a esfuerzo uniforme, donde $U = (\sigma^2/2E)(\text{vol})$. Esto resulta de los esfuerzos *variables* en una viga. Si el momento flexionante también varía a lo largo de una viga prismática, el volumen del material resulta aun menos efectivo.

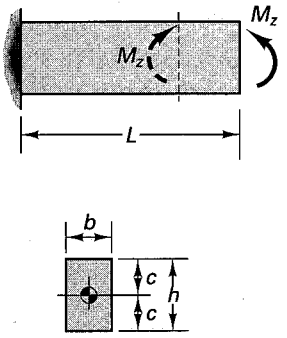


Fig. 8-20

8-8. Flexión inelástica de vigas

Por razones de economía, se ha vuelto muy importante determinar las resistencias de miembros más allá del límite elástico. En esta sección consideraremos la flexión inelástica de vigas en el rango poselástico del comportamiento del material. Aquí, como en el caso elástico, el análisis se limitará a la flexión pura de vigas respecto a un eje perpendicular al eje de simetría de la sección transversal de la viga. En el siguiente capítulo se considerará la flexión elástica de vigas con secciones transversales no simétricas.

La teoría de la flexión elástica de vigas puede ampliarse fácilmente a la flexión inelástica introduciendo una relación esfuerzo-deformación unitaria uniaxial no lineal para el material. Los requisitos básicos de estática y cinemática de la deformación siguen siendo los mismos que para el caso elástico.

Para ilustrar el procedimiento de análisis, consideremos una viga con la sección transversal mostrada en la figura 8-21(a). Suponiendo, igual que antes, que las secciones planas permanecen planas durante la flexión, las deformaciones unitarias normales longitudinales varían linealmente como en la figura 8-21(b). Para varias deformaciones unitarias $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$ seleccionadas en este diagrama, los correspondientes esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_5$ están definidos sobre el diagrama esfuerzo-deformación unitaria dado en la figura 8-21(c). Una gráfica de esos esfuerzos a lo largo de una sección establece una posible distribución de esfuerzos en la viga a lo largo de la línea curva AB, como se ilustra en la figura 8-21(d). (Excepto por la escala vertical, esta línea corresponde precisamente a la línea curva en el diagrama esfuerzo-deformación unitaria.) Estos esfuerzos, actuando sobre la correspondiente área de la sección transversal, desarrollan una fuerza de compresión C arri-

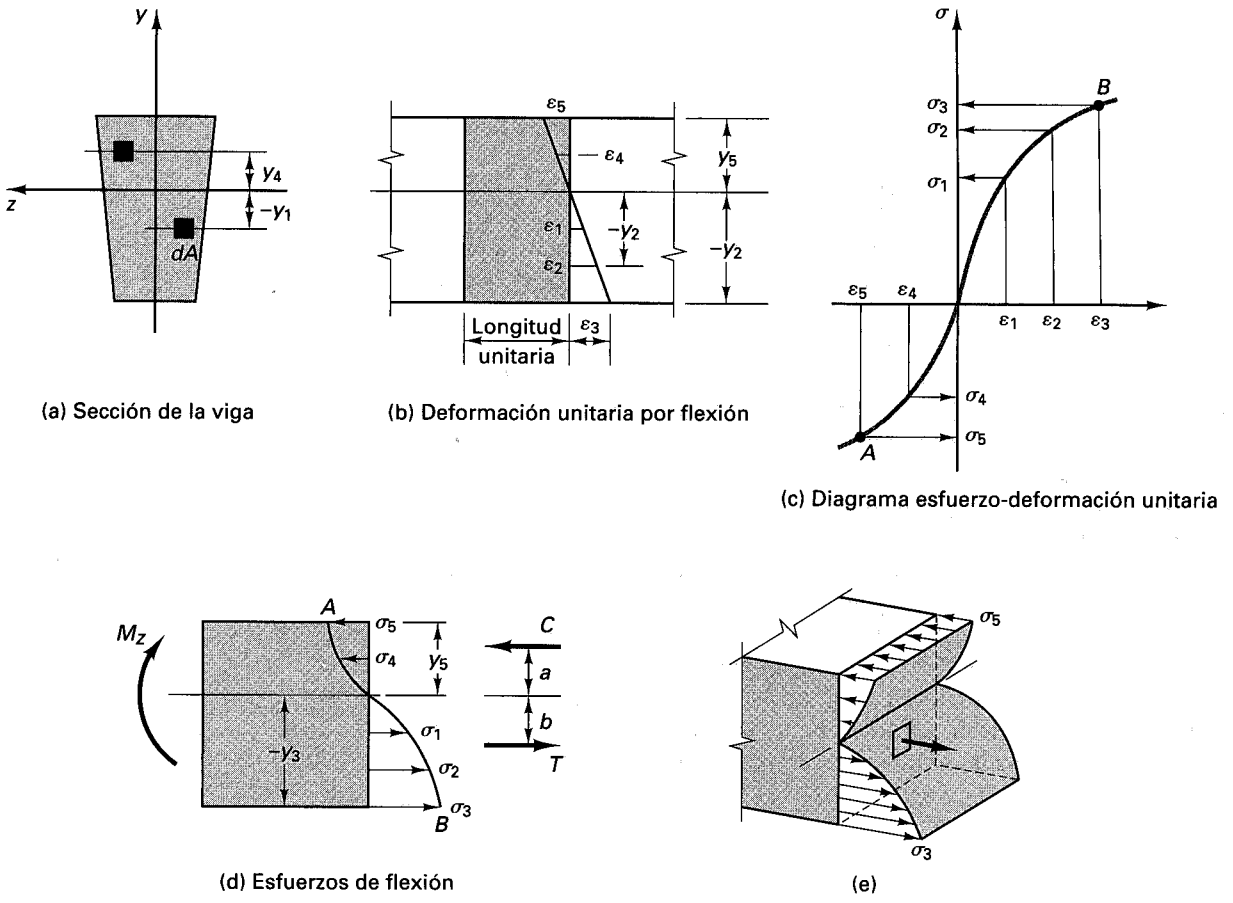


Fig. 8-21 Flexión inelástica de una viga.

ba del eje neutro y una fuerzas de tensión T abajo del mismo. Cuando $T = C$, se encuentra la posición correcta del eje neutro. Esta condición es equivalente a que en una sección

$$\int_A \sigma \, dA = 0 \tag{8-25}$$

donde σ es el esfuerzo normal de flexión que actúa sobre una sección.

Encontrar la localización del eje neutro tal que $T = C$, puede requerir un proceso de tanteos, aunque procedimientos directos han sido desarrollados para algunas secciones transversales.[11] Después de localizar correctamente el eje neutro, se sabe que el momento flexionante resistente M_z en

[11]A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. I, Nueva York, McGraw-Hill, 1950, pág. 356.

la misma sección es $C(a + b)$ o $T(a + b)$; véase la figura 8-21(d). Alternativamente, en forma de una ecuación general,

$$M_z = -\int \sigma y \, dA \tag{8-26}$$

El problema se simplifica mucho si la sección transversal de la viga es simétrica respecto al eje horizontal y si las propiedades del material son las mismas en tensión y en compresión. Para esas condiciones se sabe a priori que el eje neutro pasa por el centroide de la sección y la ecuación 8-26 puede ser directamente aplicada. El comportamiento de una viga en flexión se muestra cualitativamente en la figura 8-22. Una secuencia de deformaciones unitarias progresivamente crecientes asociadas con secciones planas se muestra en la figura 8-22(b). Esas deformaciones unitarias máximas definen los esfuerzos máximos en las fibras exteriores de la viga, figura 8-22(c), resultando esfuerzos de flexión progresivamente crecientes.

Como puede verse en las figuras 8-22(a) y (c), el esfuerzo máximo que se alcanza es σ_3. La distribución instantánea del esfuerzo en la viga asociada con σ_3, para este material frágil, está dada por la línea curva AB en la figura 8-22(c). Sin embargo, en experimentos rutinarios, el *esfuerzo nominal* en las fibras extremas es a menudo calculado aplicando la fórmula de la flexión elástica, ecuación 8-13, usando el momento flexionante último determinado experimentalmente. El esfuerzo así hallado se llama *módulo de ruptura* del material en flexión. Este esfuerzo está asociado con la línea CD en la figura 8-22(c) y es mayor que el esfuerzo realmente alcanzado.

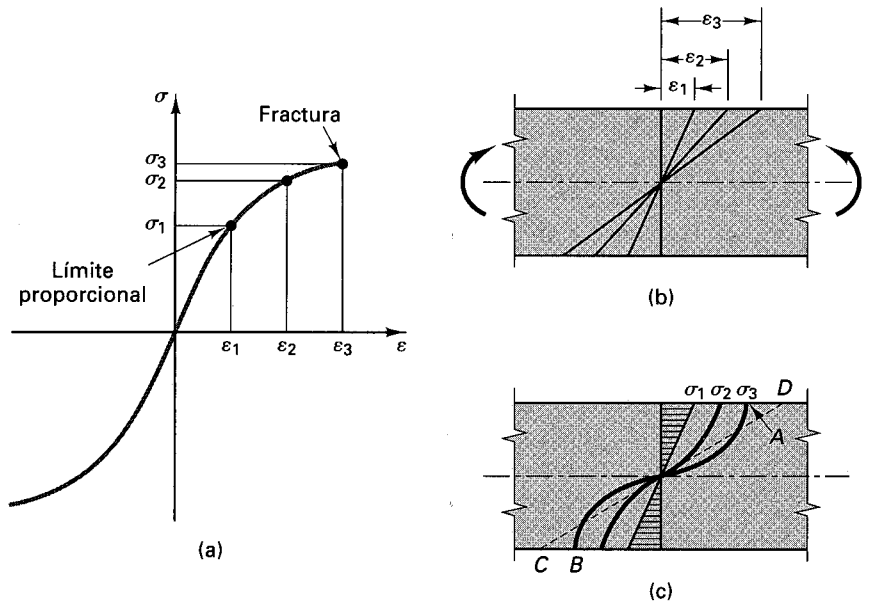


Fig. 8-22 Viga rectangular en flexión excediendo el límite proporcional del material.

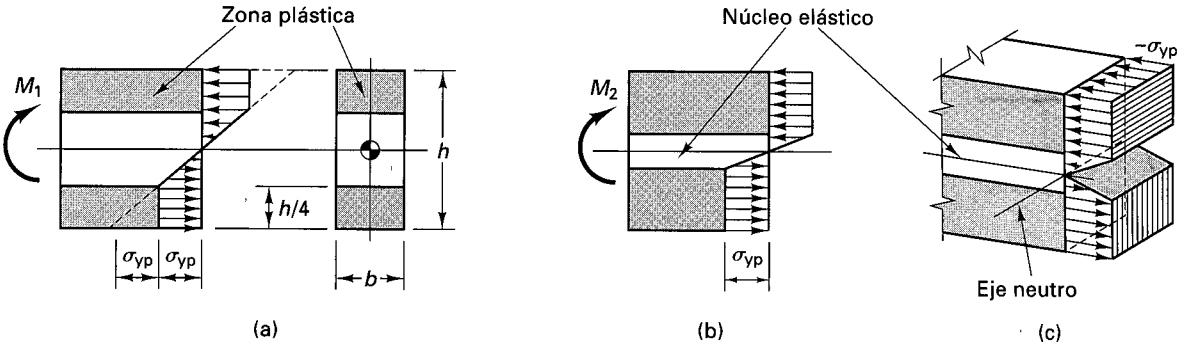


Fig. 8-23 Viga elastoplástica a grandes niveles de deformación unitaria.

La idealización elástica perfectamente plástica [figura 2-18(b)], por razones de simplicidad, es muy frecuentemente usada en vigas de material dúctil para determinar su comportamiento en flexión y como un ejemplo importante de flexión inelástica. Consideremos una viga rectangular de material elastoplástico; véase la figura 8-23. En tal idealización del comportamiento del material es posible hacer una clara separación del miembro en las zonas elástica y plástica. Por ejemplo, si la deformación unitaria en la fibras extremas es doble que al principio de la fluencia, sólo la mitad media de la viga permanece elástica; véase la figura 8-23(a). En este caso, los cuartos exteriores de la viga fluyen. La magnitud del momento M correspondiente a esta condición puede calcularse fácilmente. (Véase el ejemplo 8-10.) A mayores deformaciones unitarias, la zona elástica o núcleo disminuye. La distribución del esfuerzo correspondiente a esta situación se muestra en las figuras 8-23(b) y (c).

Ejemplo 8-8

Determine la capacidad plástica última en flexión de una viga de acero dulce de sección transversal rectangular. Considere que el material es idealmente elastoplástico.

SOLUCIÓN

El diagrama idealizado esfuerzo-deformación unitaria se muestra en la figura 8-24(a). Se supone que el material tiene las mismas propiedades en tensión y en compresión. Las deformaciones unitarias que pueden tener lugar en el acero durante la fluencia son mucho mayores que la deformación unitaria elástica máxima (15 o 20 veces la última cantidad). Como deformaciones inaceptablemente grandes de una viga ocurrirían bajo grandes deformaciones unitarias, el momento plástico puede considerarse como el momento último.

La distribución del esfuerzo mostrada en la figura 8-24(b) es aplicable después de que una gran cantidad de deformación tiene lugar. Al calcular el momento resistente, los esfuerzos correspondientes a las áreas triangulares *abc* y *bde* pueden despreciarse sin afectar seriamente la exactitud. Ellas contribuyen con poca resistencia al momento flexionante aplicado

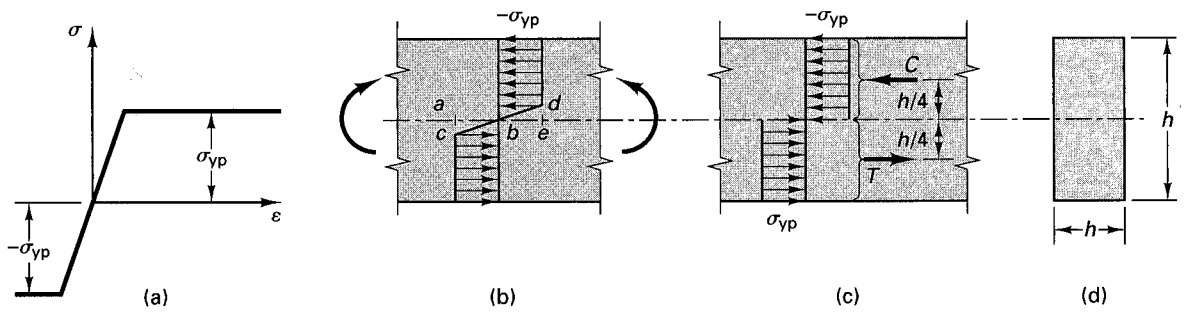


Fig. 8-24

debido a sus cortos brazos de momento. Por consiguiente, la idealización de la distribución del esfuerzo mostrada en la figura 8-24(c) es permisible y tiene una significación física simple. Toda la mitad superior de la viga está sometida a un esfuerzo *uniforme de compresión* $-\sigma_{yp}$, mientras que la mitad inferior está toda bajo un esfuerzo *uniforme de tensión* σ_{yp}. El hecho de que la viga se divida por parejo en una zona de tensión y en una zona de compresión se explica por la simetría. Numéricamente,

$$C = T = \sigma_{yp}(bh/2) \qquad \text{es decir, esfuerzo} \times \text{área} \quad .$$

Cada una de esas fuerzas actúa a una distancia $h/4$ del eje neutro. Por consiguiente, el momento *plástico* o momento resistente último de la viga es

$$M_p \equiv M_{\text{últ}} = C\left(\frac{h}{4} + \frac{h}{4}\right) = \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4}$$

donde b es el ancho de la viga y h su altura.

La misma solución puede obtenerse aplicando directamente las ecuaciones 8-25 y 8-26. Observando el signo de los esfuerzos, se puede concluir que la ecuación 8-25 es satisfecha si se toma el eje neutro pasando por la mitad de la viga. Si hacemos $dA = b\,dy$ y notamos la simetría respecto al eje neutro, la ecuación 8-26 toma la forma

$$M_p \equiv M_{\text{últ}} = -2\int_0^{h/2} (-\sigma_{yp})yb\,dy = \sigma_{yp}bh^2/4 \qquad (8\text{-}27)$$

El momento flexionante resistente de una viga de sección rectangular cuando sus fibras exteriores alcanzan justamente el esfuerzo σ_{yp}, tal como es dado por la fórmula de la flexión elástica, es

$$M_{yp} = \sigma_{yp}I/c = \sigma_{yp}(bh^2/6); \qquad \text{por lo tanto, } M_p/M_{yp} = 1.50$$

La razón M_p/M_{yp} depende sólo de las propiedades transversales de un miembro y se llama *factor de forma*. El factor de forma dado antes para la viga rectangular muestra que M_{yp} puede ser excedido en 50% antes de que se alcance la capacidad última plástica de una viga rectangular.

Para cargas estáticas como las que se presentan en edificios, las capacidades últimas pueden determinarse aproximadamente usando momentos plásticos. Los procedimientos basados en tales conceptos se denominan *métodos plásticos de análisis* o *diseño*. El *módulo plástico de sección* Z se define como:

$$M_p = \sigma_{yp}Z \qquad (8\text{-}28)$$

Para la viga rectangular antes analizada, $Z = bh^2/4$.

El *Manual de Construcción en acero*[12] proporciona una tabla de módulos plásticos de sección para muchos perfiles comunes de acero. Una lista abreviada de esos módulos para perfiles de acero se da en la Tabla 8 del apéndice. Para un M_p o σ_{yp} dado, la solución de la ecuación 8-28 para Z es muy simple.

El método del análisis al límite o plástico es inaceptable en el diseño de máquinas en situaciones en que las propiedades de fatiga del material son importantes.

Ejemplo 8-9

Encuentre los esfuerzos residuales en una viga rectangular al retirar el momento flexionante plástico último.

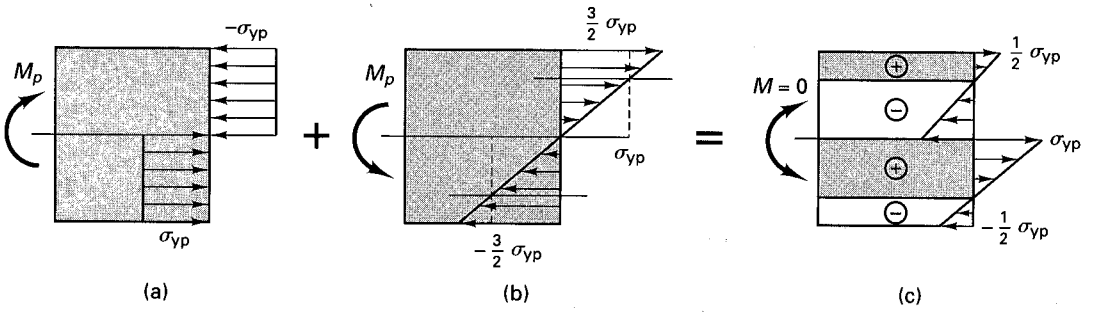


Fig. 8-25 Distribución del esfuerzo residual en una barra rectangular.

SOLUCIÓN

La distribución del esfuerzo asociada con un momento plástico último se muestra en la figura 8-25(a). La magnitud de este momento se determinó en el ejemplo anterior y es $M_p = \sigma_{yp} bh^2/4$. Al liberar este momento plástico M_p, toda fibra en la viga puede recuperarse elásticamente. El rango elástico del material durante la descarga es el doble del que tiene lugar inicialmente (véase la figura 2-18). Por lo tanto, como $M_{yp} = \sigma_{yp} bh^2/6$ y el momento liberado es $\sigma_{yp}(bh^2/4)$ o 1.5 M_{yp}, el esfuerzo máximo calculado con base en acción elástica es $3/2\ \sigma_{yp}$, como se muestra en la figura 8-25(b). Superponiendo los esfuerzos iniciales en M_p con los esfuerzos elásticos de recuperación debido a la liberación de M_p se encuentran los esfuerzos residuales; véase la figura 8-25(c). En la viga permanecen esfuerzos residuales tanto de tensión como de compresión. Las zonas en tensión están sombreadas en la figura. Si una viga fuese maquinada reduciendo gradualmente su altura, la liberación de los esfuerzos residuales causaría deformaciones indeseables de la barra.

[12]American Institute of Steel Construction, *AISC Steel Construcción Manual*, 2a. ed., Chicago, AISC, 1994.

Ejemplo 8-10

Determine la capacidad por momento resistente de una viga rectangular elastoplástica.

SOLUCIÓN

Para hacer el problema más definido, considere una viga en voladizo cargada como se muestra en la figura 8-26(a). Si la viga está hecha de un material ideal elastoplástico y la fuerza aplicada P es suficientemente grande para causar la fluencia, se formarán zonas plásticas (mostradas sombreadas en la figura). En una sección arbitraria a-a, la distribución correspondiente del esfuerzo será como la mostrada en la figura 8-26(c). La zona elástica se extiende sobre una altura de $2y_o$. Note que dentro de la zona elástica los esfuerzos varían linealmente y que en todas partes en la zona plástica el esfuerzo longitudinal es σ_{yp}, el momento resistente M es

$$M = -2\int_0^{y_o}\left(-\frac{y}{y_o}\sigma_{yp}\right)(b\,dy)y - 2\int_{y_o}^{h/2}(-\sigma_{yp})(b\,dy)y \qquad (8\text{-}29)$$

$$= \sigma_{yp}\frac{bh^2}{4} - \sigma_{yp}\frac{by_o^2}{3} = M_p - \sigma_{yp}\frac{by_o^2}{3}$$

donde la última simplificación se hace de acuerdo con la ecuación 8-27. En esta ecuación general, si $y_o = 0$, la capacidad por momento resulta igual al momento plástico último. Sin embargo, si $y_o = h/2$, el momento se revierte al caso elástico límite, donde $M = \sigma_{yp}bh^2/6$. Cuando el momento flexionante aplicado a lo largo del claro se conoce, la frontera elastoplástica puede determinarse resolviendo la ecuación 8-29 para y_o. En tanto que quede una zona o núcleo elásticos, las deformaciones plásticas no pueden progresar sin límite. Este es un caso de flujo plástico contenido.

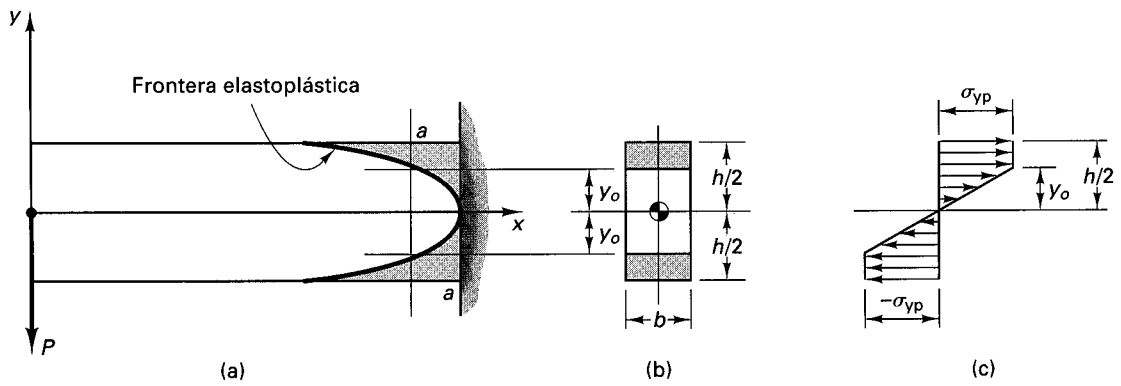


Fig. 8-26 Viga elastoplástica en voladizo.

Después que se libera la fuerza aplicada P, permanecen esfuerzos residuales a lo largo de la viga en los lugares en que ocurrieron deformaciones plásticas. Una distribución típica de esfuerzos residuales para esta región se muestra en la figura 8-27. Este es un patrón de distribución de esfuerzos más realista que el mostrado en la figura 8-25(c), donde la idealización de dividir claramente las zonas de tensión y compresión en la viga en el eje neutro es en realidad imposible de lograr. Ese patrón de distribución de esfuerzos representa el caso límite del patrón de distribución de esfuerzos dado en la figura 8-27. Muchos materiales inelásticos tienden a tener una relación esfuerzo-deformación unitaria como la mostrada en la figura 8-22(a). El patrón de esfuerzos residuales para tales materiales se parecería a la diferencia de esfuerzos entre la línea curva AB y la línea recta CD de la figura 8-22(c).

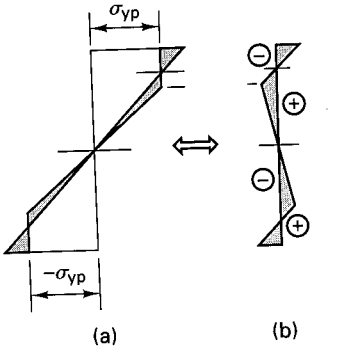


Fig. 8-27 Distribución en la viga del esfuerzo residual.

Ejemplo 8-11

Determine la resistencia por momento plástico para la viga de concreto reforzado en el ejemplo 8-13. Suponga que el refuerzo de acero fluye a 40,000 psi y que la resistencia última del concreto $f'_c = 2500$ psi.

SOLUCIÓN

Cuando el acero de refuerzo empieza a fluir se tienen grandes deformaciones. Esto se considera como la capacidad última del acero; por tanto, $T_{últ} = A_s\sigma_{yp}$.

Bajo el momento último o plástico, la evidencia experimental indica que los esfuerzos de compresión en el concreto pueden ser aproximados por el bloque rectangular de esfuerzos mostrados en la figura 8-28.[13] Es costumbre suponer que el esfuerzo promedio en este bloque de esfuerzos

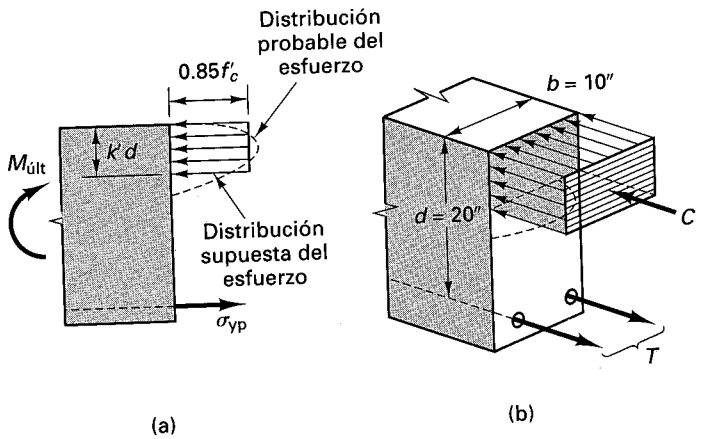


Fig. 8-28

[13]Para mayores detalles, véase P. M. Ferguson, J. E. Breen y J. O. Jirsa, *Reinforced Concrete Fundamentals*, 5a. ed., Nueva York, Wiley, 1988; o, R. Park y T. Paulay, *Reinforced Concrete Structures*, Nueva York, Wiley, 1975.

de compresión es igual a $0.85f'_c$. Según esto, y tomando en cuenta que $T_{últ} = C_{últ}$, se tiene

$$T_{\text{últ}} = \sigma_{\text{yp}} A_s = 40{,}000 \times 2 = 80{,}000 \text{ lb} = C_{\text{últ}}$$

$$k'd = \frac{C_{\text{últ}}}{0.85 f'_c b} = \frac{80{,}000}{0.85 \times 2500 \times 10} = 3.77 \text{ in}$$

$$M_{\text{últ}} = T_{\text{últ}}(d - k'd/2) = 80{,}000(20 - 3.77/2)/12 = 121{,}000 \text{ ft-lb}$$

8-9. Vigas de sección transversal compuesta

En la práctica se tienen importantes usos para las vigas hechas de diferentes materiales. Las vigas de madera son a veces reforzadas con soleras metálicas, las de plástico son reforzadas con fibras y el concreto reforzado es concreto con refuerzo de barras de acero. La teoría de la flexión elástica estudiada antes puede extenderse fácilmente para incluir tales vigas de sección transversal compuesta.

Consideremos una viga elástica de varios materiales unidos entre sí que tenga un eje vertical de simetría, como se muestra en la figura 8-29(a). Los módulos elásticos E_i para los diferentes materiales son dados. Como en los materiales homogéneos, se supone que las deformaciones unitarias longitudinales ϵ_x varían linealmente, como se muestra en la figura 8-29(b). El eje neutro para esta sección, que pasa por el centroide de *módulo ponderado*, está localizado por la distancia $\bar{y}_b$ y puede calcularse usando la ecuación 8-16. Los esfuerzos mostrados en la figura 8-29(c) se obtienen con la ecuación 8-14. En las interfaces entre dos materiales, dependiendo de los valores relativos de sus E_i's, se presenta una aguda discontinuidad en la magnitud de los esfuerzos.

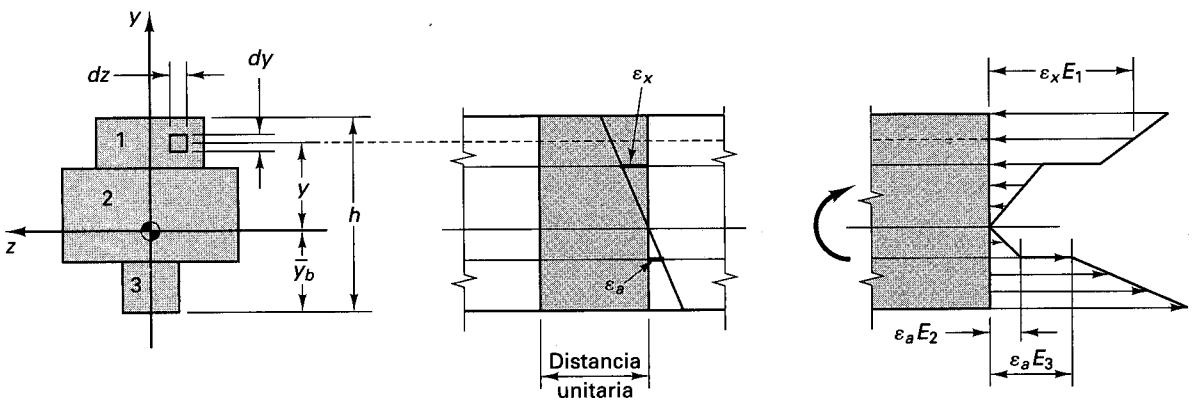


Fig. 8-29 Sección transversal de una viga elástica compuesta en flexión.

Siguiendo los mismos procedimientos que en la ecuación 8-7, el momento flexionante resistente

$$M_z = \kappa \int_A E_i y^2 \, dA = \kappa (EI)^* \tag{8-30}$$

donde la curvatura κ, que es constante para la sección, se lleva fuera de la integral y $(EI)^*$ define simbólicamente el valor de la integral en la expresión media. Por consiguiente,

$$\kappa = \frac{M_z}{(EI)^*} \tag{8-31}$$

y, sustituyendo esta relación en las ecuaciones 8-3 y 8-14,

$$\varepsilon_x = -\frac{M_z}{(EI)^*} y \qquad \text{y} \qquad \sigma_x = E_i \frac{M_z}{(EI)^*} y \tag{8-32}$$

donde la última expresión es análoga a la ecuación 8-11 y puede ser inmediatamente especializada para una viga homogénea.

En los cálculos de la flexión de secciones compuestas, es a veces útil introducir el concepto de un *área equivalente* o *área transversal transformada* en *un* material. Esto requiere la selección arbitraria de un E_i *de referencia*, denotado aquí como E_{ref}. Usando esta notación, la integral en la ecuación 8-15, para curvatura constante κ, puede escribirse de la siguiente manera:

$$\int_A E_i y \, dA = E_{\text{ref}} \int_a y \frac{E_i}{E_{\text{ref}}} dA = E_{\text{ref}} \int_A y(n_i \, dA) = 0 \tag{8-33}$$

donde $n_i \, dA = (E_i/E_{\text{ref}}) \, dA$. Por tanto, una viga de sección transversal compuesta puede considerarse que tiene las propiedades mecánicas del *material de referencia*, siempre que las áreas diferenciales dA se multipliquen por n_i, o sea por la relación de E_i a E_{ref}. Después de transformar una sección transversal de esta manera, es aplicable el análisis elástico convencional. En las secciones transformadas los esfuerzos *varían linealmente* desde el eje neutro en *todos* los materiales. Los esfuerzos reales se obtienen para el material de referencia, mientras que los esfuerzos en los otros materiales deben multiplicarse por n_i.

Este procedimiento se ilustra en los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 8-12

Considere la viga compuesta con las dimensiones transversales mostradas en la figura 8-30(a). La parte superior de 150 × 250 mm es de madera con E_w = 10 GPa; la parte inferior de 10 × 150 mm es de acero con E_s = 200 GPa. Si esta viga se somete a un momento flexionante de 30 kN · m respecto a un eje horizontal, ¿cuáles son los esfuerzos máximos en el acero y en la madera?

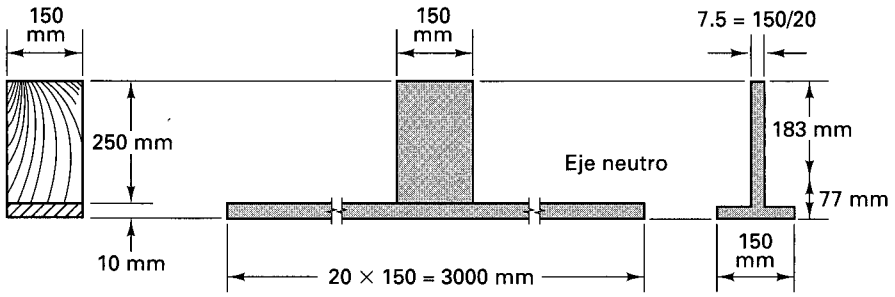


Fig. 8-30

SOLUCIÓN

Seleccionamos $E_w = E_{\text{ref}}$. Entonces $n_s = E_s/E_w = 20$. Por lo tanto, la sección transversal transformada es la mostrada en la figura 8-30(b) con el ancho equivalente de acero igual a $150 \times 20 = 3000$ mm. El centroide y el momento de inercia respecto al eje centroidal para esta sección transformada son, respectivamente,

$$\bar{y} = \frac{150 \times 250 \times 125 + 10 \times 3000 \times 255}{150 \times 250 + 10 \times 3000} = 183 \text{ mm} \quad \text{(desde la parte superior)}$$

$$I_z = \frac{150 \times 250^3}{12} + 150 \times 250 \times 58^2 + \frac{3000 \times 10^3}{12} + 10 \times 3000 \times 72^2$$

$$= 478 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

El esfuerzo máximo en la madera es

$$(\sigma_w)_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{0.03 \times 10^9 \times 183}{478 \times 10^6} = 11.5 \text{ MPa}$$

El esfuerzo máximo en el acero es

$$(\sigma_s)_{\text{máx}} = n\sigma_w = 20 \times \frac{0.03 \times 10^9 \times 77}{478 \times 10^6} = 96.7 \text{ MPa}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Seleccionamos E_s como E_{ref}. Entonces $n_w = E_w/E_s = 1/20$ y la sección transformada se muestra en la figura 8-30(c).

$$\bar{y} = \frac{7.5 \times 250 \times 135 + 150 \times 10 \times 5}{7.5 \times 250 + 150 \times 10}$$

$$= 77 \text{ mm} \quad \text{(desde el fondo)}$$

$$I_z = \frac{7.5 \times 250^3}{12} + 7.5 \times 250 \times 58^2 + \frac{150 \times 10^3}{12}$$

$$+ 150 \times 10 \times 72^2 = 23.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$(\sigma_s)_{\text{máx}} = \frac{0.03 \times 10^9 \times 77}{23.9 \times 10^6} = 96.7 \text{ MPa}$$

$$(\sigma_w)_{\text{máx}} = \frac{\sigma_s}{n} = \frac{1}{20} \times \frac{0.03 \times 10^9 \times 183}{23.9 \times 10^6} = 11.5 \text{ MPa}$$

Note que si la sección transformada es una sección equivalente en madera, los esfuerzos en la pieza real de madera se obtienen directamente. Inversamente, si la sección equivalente es de acero, los esfuerzos en éste se obtienen directamente. El esfuerzo en un material más rígido que el material de la sección transformada se incrementa, ya que, para causar la misma deformación unitaria, se requiere un mayor esfuerzo.

Ejemplo 8-13

Determine el esfuerzo máximo en el concreto y en el acero para una viga de concreto reforzado que tiene la sección mostrada en la figura 8-31(a) cuando está sometida a un momento flexionante positivo de 50,000 ft-lb. El refuerzo consiste en dos barras de acero #9. (Esas barras tienen $1\frac{1}{8}$ in de diámetro y un área transversal de 1 in^2.) Suponga que la razón de la E del acero a la E del concreto es de 15 (es decir, $n = 15$).

SOLUCIÓN

Se supone que las secciones planas permanecen planas en una viga elástica de concreto reforzado. Las deformaciones unitarias varían linealmente desde el eje neutro, como se muestra en la figura 8-31(b) por la línea *ab*. Para resolver este problema se usa una sección transformada en términos de concreto. Sin embargo, el concreto es tan débil en tensión que no se tiene garantía de que no ocurrirán grietas en la zona de tensión de la viga. Por

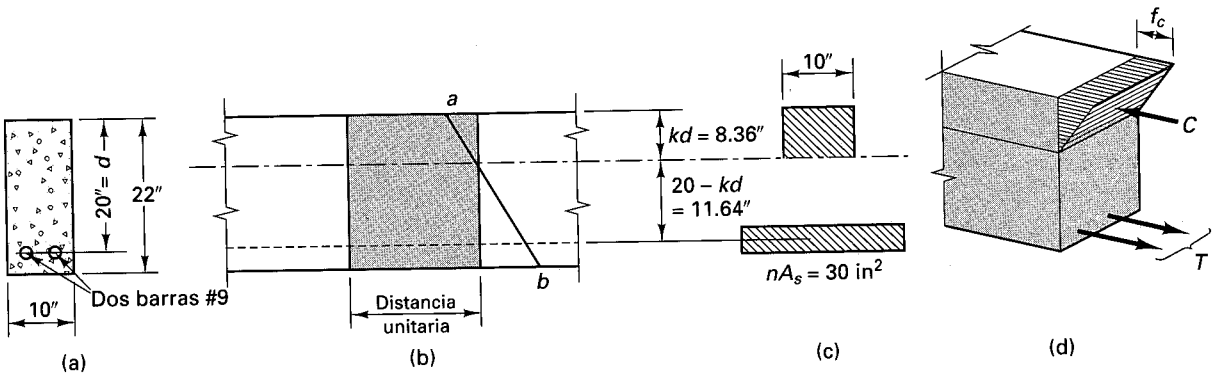


Fig. 8-31

esta razón, no se le da al concreto ningún crédito para resistir tensiones. Con base en esta suposición, el concreto en la zona de tensión de una viga sólo mantiene en su lugar al acero de refuerzo.[14] Por consiguiente, en este análisis, tal concreto virtualmente no existe y la sección transformada toma la forma mostrada en la figura 8-31(c). La sección transformada de concreto arriba del eje neutro tiene la forma de la viga original; debajo de éste, ningún concreto es considerado. El acero, por supuesto, puede resistir tensión y su área correspondiente se muestra en la sección transformada en concreto. Para fines de cálculo, el acero se localiza por la distancia del eje neutro a su centroide. Hay una diferencia despreciable entre esta distancia y las distancias verdaderas hacia las varias fibras de acero.

Hasta ahora se ha usado el concepto de eje neutro, pero su localización se desconoce. Sin embargo, se sabe que este eje coincide con el eje que pasa por el centroide de la sección transformada. Se sabe además que el primer momento del área a un lado de un eje centroidal es igual al primer momento del área en el otro lado. Entonces, sea kd la distancia de la parte superior de la viga al eje centroidal, como se muestra en la figura 8-31(c), donde k es la razón desconocida[15] y d es la distancia de la parte superior de la viga al centro del acero. Una formulación algebraica de lo anterior permite localizar el eje neutro, respecto al cual se calcula I y los esfuerzos se determinan como en el ejemplo precedente.

$$\underbrace{10(kd)}_{\substack{\text{área de}\\ \text{concreto}}}\ \underbrace{(kd/2)}_{\text{brazo}} = \underbrace{30}_{\substack{\text{área de acero}\\ \text{transformada}}}\ \underbrace{(20 - kd)}_{\text{brazo}}$$

$$5(kd)^2 = 600 - 30(kd)$$

$$(kd)^2 + 6(kd) - 120 = 0$$

Por consiguiente,

$$kd = 8.36 \text{ in} \quad \text{y} \quad 20 - kd = 11.64 \text{ in}$$

$$I = \frac{10(8.36)^3}{12} + 10(8.36)\left(\frac{8.36}{2}\right)^2 + 0 + 30(11.64)^2 = 6020 \text{ in}^4$$

$$(\sigma_c)_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{50{,}000 \times 12 \times 8.36}{6020} = 833 \text{ psi}$$

$$\sigma_s = n\frac{Mc}{I} = \frac{15 \times 50{,}000 \times 12 \times 11.64}{6020} = 17{,}400 \text{ psi}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Después de determinar kd, en vez de calcular I, puede usarse un procedimiento evidente de la figura 8-31(d). La fuerza resultante desarrollada por los esfuerzos actuando de manera "hidrostática" sobre el lado de compre-

[14]En realidad se usa para resistir el cortante y proporcionar protección contra el fuego al acero.

[15]Esto concuerda con la notación usualmente empleada en los libros sobre concreto reforzado. En este texto, h se usa por lo general para representar la altura o peralte de la viga.

sión de la viga, debe estar localizada a $kd/3$ por debajo de la parte superior de la viga. Además, si b es el ancho de la viga, esta fuerza resultante es $C = \frac{1}{2}(\sigma_c)_{máx} b(kd)$ (esfuerzo promedio multiplicado por el área). La fuerza resultante de tensión T actúa en el centro del acero y es igual a $A_s\sigma_s$, donde A_s es el área transversal del acero. Entonces, si jd es la distancia entre T y C, y como $T = C$, el momento aplicado M es resistido por un par igual a Tjd o Cjd.

$$jd = d - kd/3 = 20 - (8.36/3) = 17.21 \text{ in}$$

$$M = Cjd = \frac{1}{2} b(kd)(\sigma_c)_{máx}(jd)$$

$$(\sigma_c)_{máx} = \frac{2M}{b(kd)(jd)} = \frac{2 \times 50{,}000 \times 12}{10 \times 8.36 \times 17.21} = 833 \text{ psi}$$

$$M = Tjd = A_s\sigma_s jd$$

$$\sigma_s = \frac{M}{A_s(jd)} = \frac{50{,}000 \times 12}{2 \times 17.21} = 17{,}400 \text{ psi}$$

Ambos métodos dan naturalmente la misma respuesta. El segundo método es más conveniente en las aplicaciones prácticas. Como el acero y el concreto tienen diferentes esfuerzos permisibles, se dice que la viga tiene refuerzo balanceado cuando está diseñada de manera que los esfuerzos respectivos alcanzan simultáneamente sus valores permisibles. Note que la viga mostrada no hubiese tenido ninguna utilidad si el momento flexionante hubiese tenido sentido opuesto.

8-10. Barras curvas

En esta sección se desarrolla la teoría de la flexión para barras curvas. La atención se confinará a barras con un eje de simetría en sus secciones transversales, con este eje situado en un plano a lo largo de la longitud de la barra. Sólo se tratará el caso elástico,[16] considerando que el módulo elástico es el mismo en tensión y en compresión.

Consideremos un miembro curvo como el mostrado en las figuras 8-32(a) y (b). Las fibras exteriores están a una distancia r_o del centro de curvatura O. Las fibras interiores están a una distancia r_i. La distancia de O al eje centroidal es $\bar{r}$. La solución[17] de este problema se basa de nuevo en la conocida hipótesis: Secciones perpendiculares al eje de la viga permanecen planas después

[16]Para el análisis plástico de barras curvas, véase, por ejemplo, H. D. Conway, "Elastic-plastic bending of curved bars of constant and variable thickness", *J. Appl. Mech.* 27/Núm 4, diciembre, 1960, págs. 733-734.

[17]Esta solución aproximada fue desarrollada por E. Winkler en 1858. La solución exacta del mismo problema por los métodos de la teoría matemática de la elasticidad se debe a M. Golovin, quien lo resolvió en 1881.

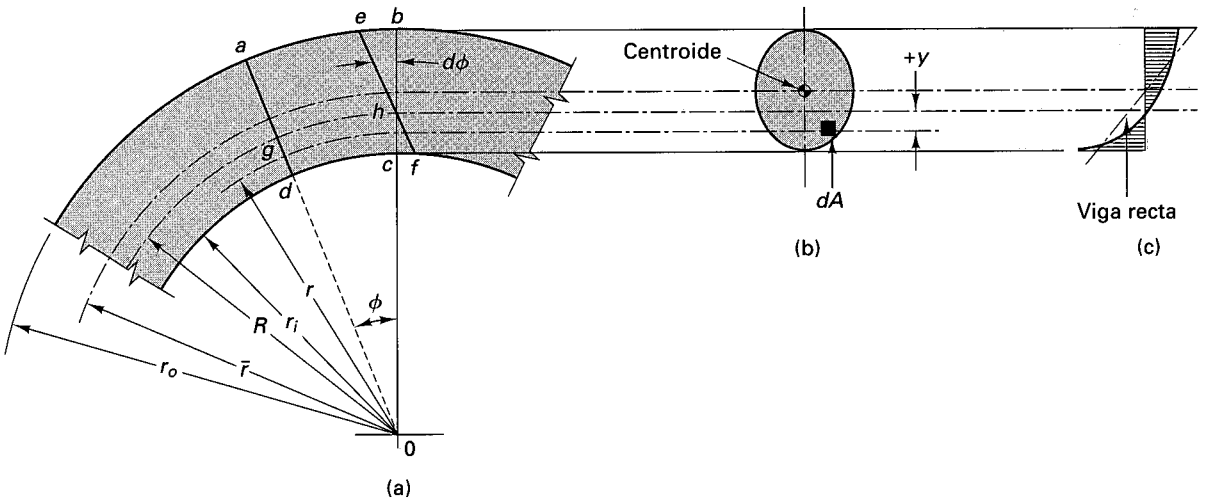


Fig. 8-32 Barra curva en flexión pura.

de que se aplica un momento flexionante M. Esto está representado diagramáticamente por la línea ef en relación a un elemento $abcd$ de la viga. El elemento está definido por el ángulo central ϕ.

Aunque la hipótesis básica sobre la deformación es la misma que para vigas rectas, y, de la ley de Hooke, el esfuerzo normal $\sigma = E\varepsilon$, se presenta aquí una dificultad. La longitud inicial de una fibra de la viga como la gh depende de la distancia r desde el centro de curvatura. Entonces, aunque las deformaciones totales de las fibras de la viga (descritas por el pequeño ángulo $d\phi$) obedecen una ley lineal, las deformaciones unitarias no lo hacen. El alargamiento de una fibra genérica gh es $(R - r)d\phi$, donde R es la distancia de O a la superficie neutra (no conocida aún), y su longitud inicial es $r\phi$. La deformación unitaria ϵ de cualquier fibra es $(R - r)(d\phi)/r\phi$ y el esfuerzo normal σ sobre un elemento dA de la sección transversal es

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{(R - r)\,d\phi}{r\phi} \tag{8-34}$$

Para uso futuro, note también que

$$\frac{\sigma r}{R - r} = \frac{E\,d\phi}{\phi} \tag{8-35}$$

La ecuación 8-34 da el esfuerzo normal que actúa sobre un elemento de área de la sección transversal de una viga curva. La posición del eje neutro se obtiene de la condición de que la suma de las fuerzas que actúan perpendicularmente a la sección debe ser igual a cero; es decir,

$$\Sigma F_n = 0 \qquad \int_A \sigma\,dA = \int_A \frac{E(R - r)\,d\phi}{r\phi}\,dA = 0$$

Sin embargo, como E, R, ϕ y $d\phi$ son constantes en cualquier sección de una barra sometida a esfuerzos, ellas pueden llevarse fuera del símbolo de integración y se obtiene una solución para R. Así entonces,

$$\frac{E\,d\phi}{\phi}\int_A \frac{R-r}{r}\,dA = \frac{E\,d\phi}{\phi}\left(R\int_A \frac{dA}{r} - \int_A dA\right) = 0$$

$$\boxed{R = \frac{A}{\displaystyle\int_A dA/r}} \tag{8-36}$$

donde A es el área de la sección transversal de la viga y R localiza al eje neutro. Note que el eje neutro así encontrado no coincide con el eje centroidal. Esto difiere de lo encontrado para las vigas elásticas rectas.

Ahora que la posición del eje neutro se conoce, la ecuación para la distribución del esfuerzo se obtiene igualando el momento externo con el momento resistente interno generado por los esfuerzos dados por la ecuación 8-34. La suma de los momentos es respecto al eje z, que es normal al plano de la figura en O, en la figura 8-32(a).

$$\Sigma M_z = 0 \qquad M = \int_A \underbrace{\sigma\,dA}_{\text{fuerza}}\,\underbrace{(R-r)}_{\text{brazo}} = \int_A \frac{E(R-r)^2\,d\phi}{r\phi}\,dA$$

Nuevamente, recordando que E, R, ϕ y $d\phi$ son constantes en una sección, usando la ecuación 8-35 y efectuando los pasos algebraicos indicados, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E\,d\phi}{\phi}\int_A \frac{(R-r)^2}{r}\,dA = \frac{\sigma r}{R-r}\int_A \frac{(R-r)^2}{r}\,dA \\ &= \frac{\sigma r}{R-r}\int_A \frac{R^2 - Rr - Rr + r^2}{r}\,dA \\ &= \frac{\sigma r}{R-r}\left(R^2\int_A \frac{dA}{r} - R\int_A dA - R\int_A dA + \int_A r\,dA\right) \end{aligned}$$

Aquí, como R es una constante, las primeras dos integrales son nulas como puede verse en la expresión entre paréntesis que aparece justo antes de la ecuación 8-36. La tercera integral es E y la última integral, por definición, es $\bar{r}A$, donde $\bar{r}$ es el radio del eje centroidal. Por consiguiente,

$$M = \frac{\sigma r}{R-r}(\bar{r}A - RA)$$

de donde el esfuerzo normal que actúa sobre una viga curva a una distancia r del centro de curvatura es

$$\boxed{\sigma = \frac{M(R-r)}{rA(\bar{r}-R)}} \tag{8-37}$$

Si y positiva se mide hacia el centro de curvatura desde el eje neutro y $\bar{r} - R = e$, la ecuación 8-37 puede escribirse en una forma que se parece más a la fórmula de la flexión para vigas rectas:

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{8-38}$$

Esas ecuaciones indican que la distribución de esfuerzos en una barra curva siguen un patrón hiperbólico. Una comparación de este resultado con el que se obtiene con la fórmula para barras rectas se muestra en la figura 8-32(c). Note particularmente que en la barra curva, el eje neutro se desplaza hacia el centro de curvatura de la viga. Esto se debe a los mayores esfuerzos desarrollados debajo del eje neutro. La teoría desarrollada se aplica sólo a una distribución elástica de esfuerzos y sólo a vigas en flexión pura. Para una consideración de situaciones en que una fuerza axial está también presente en una sección, véase el ejemplo 9-3.

Ejemplo 8-14

Compare los esfuerzos en una barra rectangular de 50 × 50 mm sometida a momentos extremos de 2083 N · m en tres casos especiales: (a) viga recta, (b) viga curva con radio de 250 mm a lo largo del eje centroidal (es decir, $\bar{r} = 250$ mm), figura 8-33(a) y (c) viga curva con $\bar{r} = 75$ mm.

SOLUCIÓN

(a) Aquí los esfuerzos se obtienen directamente aplicando las ecuaciones 8-21 y 8-22

$$S = bh^2/6 = 50 \times 50^2/6 = 20.83 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_{máx} = \frac{M}{S} = \frac{2083 \times 10^3}{20.83 \times 10^3} = \pm 100 \text{ MPa}$$

Este resultado se muestra en la figura 8-33(c). $\bar{r} = \infty$ ya que una barra recta tiene un radio de curvatura infinito.

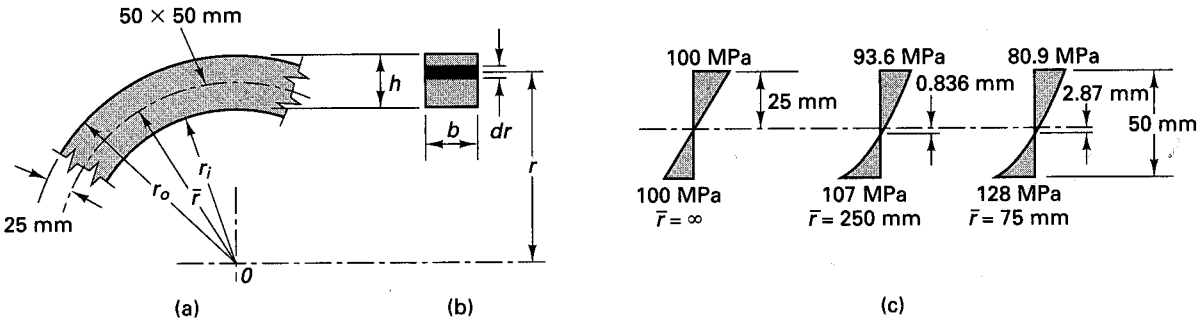


Fig. 8-33

Para resolver los incisos (b) y (c) debe localizarse primero el eje neutro. Éste se encuentra en términos generales integrando la ecuación 8-36. Para la sección rectangular, el área elemental se toma como $b\,dr$, figura 8-33(b). La integración se lleva a cabo entre los límites r_i y r_o, que son, respectivamente, los radios interior y exterior. Tenemos

$$R = \frac{A}{\int_A dA/r} = \frac{bh}{\int_{r_i}^{r_o} b\,dr/r} = \frac{h}{\int_{r_i}^{r_o} dr/r} = \frac{h}{|\ln r|_{r_i}^{r_o}} = \frac{h}{\ln (r_o/r_i)} = \frac{h}{2.3026 \log (r_o/r_i)} \tag{8-39}$$

donde h es la altura de la sección, ln es el logaritmo natural y log es un logaritmo de base 10 (logaritmo común).

(b) Para este caso, $h = 50$ mm, $\bar{r} = 250$ mm, $r_i = 225$ mm, y $r_o = 275$ mm. La solución se obtiene evaluando las ecuaciones 8-39 y 8-37. El subíndice i se refiere al esfuerzo normal σ de la fibras interiores; o al de las exteriores.

$$R = \frac{50}{(\ln 275/225)} = 249.164 \text{ mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 250 - 249.164 = 0.836 \text{ mm}$$

$$\sigma_i = \frac{M(R - r_i)}{r_i A(\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^3 \times (249.164 - 225)}{225 \times 50^2 \times 0.836}$$

$$= 107 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{M(R - r_o)}{r_o A(\bar{r} - R)} = \frac{2083 \times 10^3 \times (249.164 - 275)}{275 \times 50^2 \times 0.836}$$

$$= -93.6 \text{ MPa}$$

El signo negativo de σ_o indica un esfuerzo de compresión. Esas cantidades y la distribución correspondiente del esfuerzo se muestran en la figura 8-33(c); $\bar{r} = 250$ mm.

(c) Este caso se calcula de la misma manera. Aquí, $h = 50$ mm, $\bar{r} = 75$ mm, $r_i = 50$ mm y $r_o = 100$. Los resultados del cálculo se muestran en la figura 8-33(c).

$$R = \frac{50}{\ln (100/50)} = \frac{50}{\ln 2} = 72.13 \text{ mm}$$

$$e = \bar{r} - R = 75 - 73.13 = 2.87 \text{ mm}$$

$$\sigma_i = \frac{2083 \times 10^3 \times (72.13 - 50)}{50 \times 50^2 \times 2.87} = 128 \text{ MPa}$$

$$\sigma_o = \frac{2083 \times 10^3 \times (72.13 - 100)}{100 \times 50^2 \times 2.87} = -80.9 \text{ MPa}$$

Varias conclusiones importantes, en general ciertas, pueden derivarse del ejemplo anterior. La primera es que *la fórmula usual de la flexión es razonablemente buena para vigas de gran radio*. Sólo se tiene un error del 7% en el esfuerzo máximo en la parte (b) para $\bar{r}/h = 5$, que es un error tolerable en la mayor parte de las aplicaciones. Para razones grandes de $\bar{r}/h$, este error disminuye. Conforme crece la curvatura de la viga, el esfuerzo sobre el lado cóncavo crece rápidamente respecto al dado por la fórmula usual de la flexión. Cuando $\bar{r}/h = 1.5$, se tiene un error de 28%. La segunda es que la evaluación de la integral para R sobre el área de la sección transversal puede resultar muy complicada. Finalmente, el cálculo de R debe ser muy exacto ya que se usan diferencias entre R y cantidades numéricamente comparables en la fórmula del esfuerzo.

Las dos últimas dificultades condujeron al desarrollo de otros métodos de solución. Un método consiste en desarrollar en serie[18] ciertos términos de la solución, y otro consiste en elaborar una solución con base en una sección transformada especial. Otro enfoque consiste en trabajar "en reversa". Vigas curvas de diversas secciones transversales, curvaturas y momentos aplicados, son analizadas respecto a sus esfuerzos; luego, esas cantidades son divididas entre un esfuerzo de flexión que existiría para la misma viga *si ésta fuese recta*. Esas razones son entonces tabuladas.[19] Luego, inversamente, si se quiere el esfuerzo en una viga curva, éste se da como

$$\sigma = K\frac{Mc}{I} \tag{8-40}$$

donde el coeficiente K se obtiene de una tabla o de una gráfica y Mc/I se calcula como en la fórmula usual de la flexión.

Se da ahora, para futuras referencias, una expresión para la distancia del centro de curvatura al eje neutro de una viga curva de área transversal circular:

$$R = \frac{\bar{r} + \sqrt{\bar{r}^2 - c^2}}{2} \tag{8-41}$$

donde $\bar{r}$ es la distancia del centro de curvatura al centroide y c es el radio del área transversal circular.

[18] S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 3a. ed., parte I, Princeton, NJ, Van Nostrand, 1955, págs. 369 y 373.

[19] R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*, 5a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1975.

PROBLEMAS

Secciones 8-3 a la 8-8

8-1 al 8-8. Determine las capacidades por momento flexionante respecto a los ejes horizontales de las áreas transversales mostradas con sus dimensiones en las figuras. El esfuerzo elástico permisible es de 165 MPa o bien de 24 ksi. Para las propiedades de los perfiles de acero W, canales y ángulos, véanse las Tablas 3, 4, 5 y 6, respectivamente, en el apéndice.

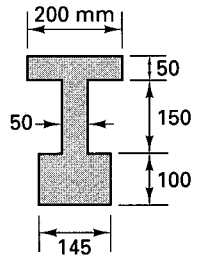


Fig. P8-1

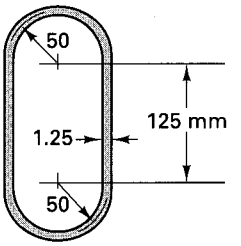


Fig. P8-2

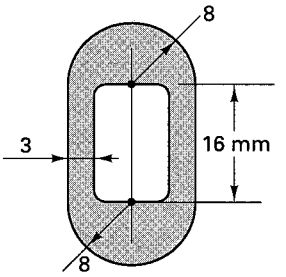


Fig. P8-3

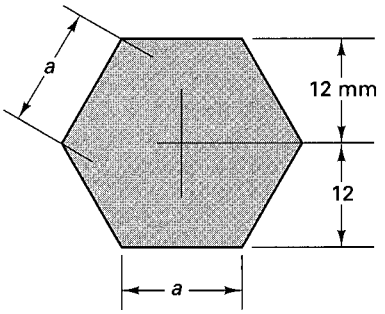


Fig. P8-4

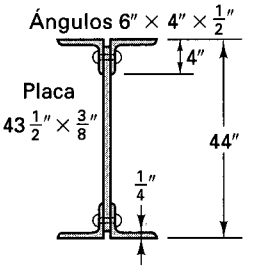


Fig. P8-5

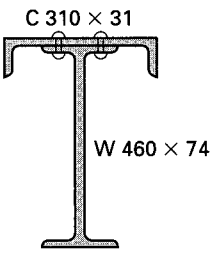


Fig. P8-6

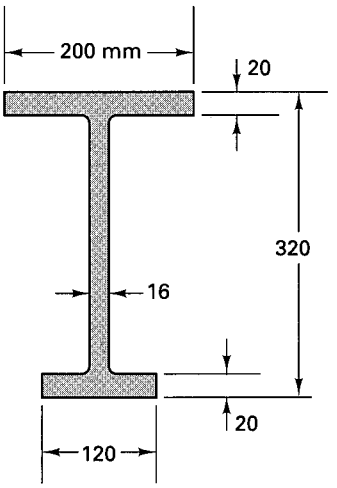


Fig. P8-7

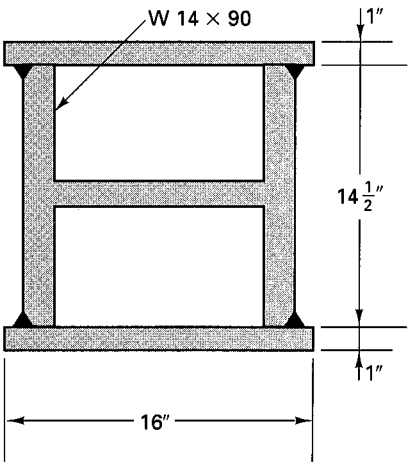


Fig. P8-8

8-9. En las tres secciones transversales mostradas en la figura, se emplea la misma cantidad de material en cada caso. Calcule los momentos de inercia I y los módulos elásticos de sección I/c para esas secciones. El primer parámetro determina la rigidez (véase el capítulo 14) y el segundo determina la resistencia de una sección transversal (Ec. 8-21).

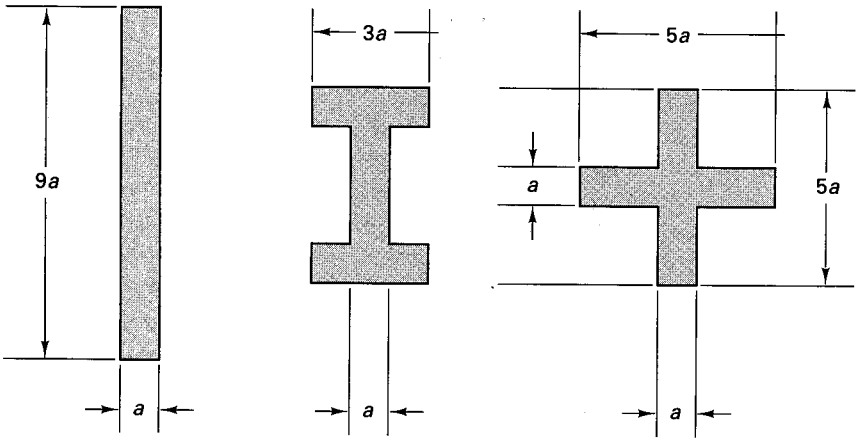


Fig. P8-9

8-10. Verifique los módulos de sección dados en las tablas del Apéndice para los perfiles S310 × 74, W360 × 134 y C380 × 50.

8-11. Una viga W460 × 74 de acero está soportada en A y B como se muestra en la figura. ¿Cuál es la magnitud de la carga uniformemente distribuida si un extensómetro unido a la parte superior del patín de arriba mide 0.0002 mm/mm cuando se aplica la carga? E = 200 GPa.

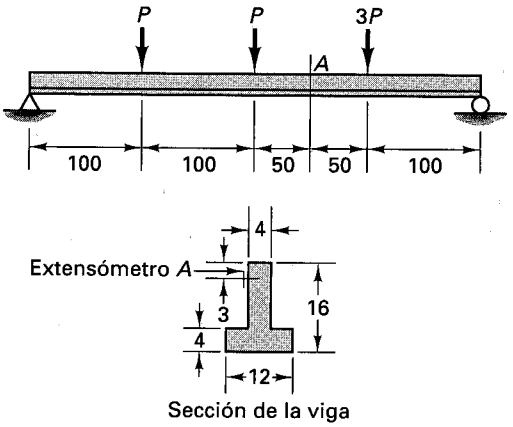


Fig. P8-11

8-12. Una viga T pequeña de acero se usa en posición invertida en un claro de 400 mm. Si, debido a la aplicación de las tres fuerzas mostradas en la figura, el extensómetro longitudinal en A registra una deformación unitaria de compresión de 50×10^{-5}, ¿qué tan grandes son las fuerzas aplicadas?

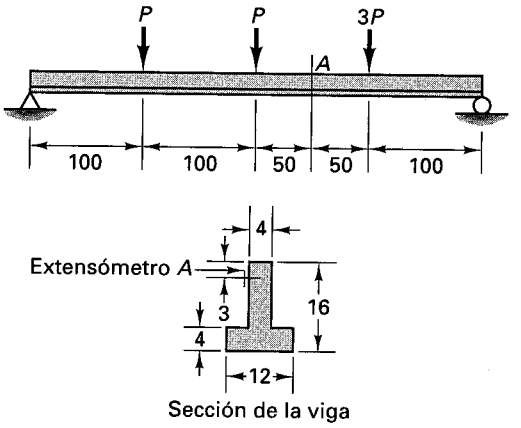


Fig. P8-12

8-13 y 8-14. Determine las capacidades por momento flexionante *elástico* positivo respecto a los ejes horizontales de las vigas que tienen las secciones transversales mostradas en las figuras. El esfuerzo elástico máximo en tensión para el problema 8-13 es de 10 ksi y en compresión es de 15 ksi; los esfuerzos correspondientes para el problema 8-14 son 100 MPa y 150 MPa.

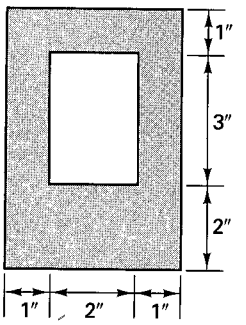


Fig. P8-13

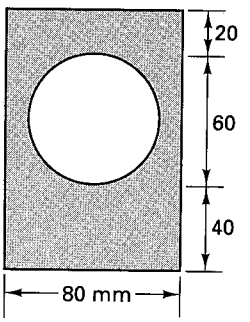


Fig. P8-14

8-15. Una viga con sección transversal maciza rectangular con las dimensiones mostradas en la figura está sometida a un momento flexionante positivo de 16 kN · m actuando alrededor del eje horizontal. (a) Encuentre la fuerza de compresión que actúa sobre el área sombreada de la sección transversal desarrollada por los esfuerzos de flexión. (b) Encuentre la fuerza de tensión que actúa sobre el área rayada de la sección transversal.

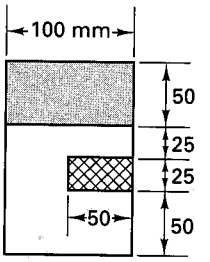


Fig. P8-15

8-16. Considere una viga linealmente elástica sometida a un momento flexionante M alrededor de su eje principal z para el cual el momento de inercia del área transversal es I. Demuestre que para tal viga, la fuerza normal F que actúa sobre cualquier parte del área transversal A_1 es

$$F = MQ/I$$

donde

$$Q = \int_{A_1} y\, dA = \bar{y}A_1$$

y $\bar{y}$ es la distancia desde el eje neutro de la sección transversal hasta el centroide del área A_1, como se muestra en la figura.

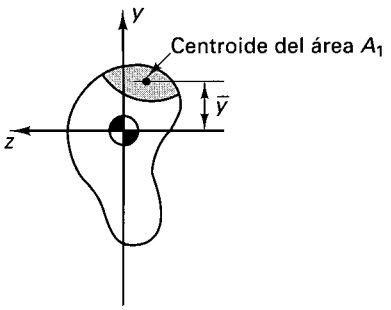


Fig. P8-16

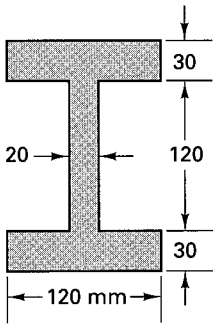


Fig. P8-17

8-17. Determine la magnitud y posición de la fuerza total de tensión T que actúa sobre esta sección cuando se aplica un momento positivo de 80 kN · m. Como la magnitud de esta fuerza de tensión T es igual a la fuerza de compresión C que actúa sobre la sección, verifique que el par $T-C$ es igual al momento aplicado.

8-18. Dos tablones de madera de 2 × 6 in están pegados entre sí para formar una sección T, como se muestra en la figura.

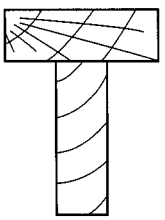


Fig. P8-18

Si se aplica un momento de 2270 ft-lb a tal viga actuando alrededor de un eje horizontal, (a) encuentre los esfuerzos en las fibras extremas, (b) calcule la fuerza total de compresión desarrollada por los esfuerzos normales arriba del eje neutro debido a la flexión de la viga, y (c) encuentre la fuerza total debido a los esfuerzos de tensión por flexión en una sección y compárelos con el resultado encontrado en (b).

8-19. Por integración, determine la magnitud y posición de la fuerza desarrollada por los esfuerzos de flexión que actúan sobre el área sombreada de la sección transversal de la viga mostrada en la figura, si la viga está sometida a un momento flexionante negativo de 3500 N · m actuando alrededor del eje horizontal.

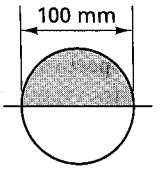


Fig. P8-19

8-20. Una viga tiene la sección transversal de un triángulo isósceles, como se muestra en la figura, y está sometida a un momento flexionante negativo de 4000 N · m respecto al eje horizontal. (a) Demuestre por integración que $I_o = bh^3/36$. (b) Determine la magnitud y posición de las fuerzas resultantes de tensión y compresión que actúan sobre una sección si $b = h = 150$ mm.

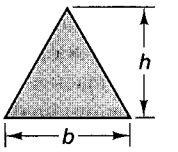


Fig. P8-20

8-21. Para un material elástico lineal, determine la razón de los momentos flexionantes para el mismo esfuerzo máximo en un miembro cuadrado en las dos posiciones diferentes mostradas en la figura. La flexión tiene lugar respecto al eje horizontal.

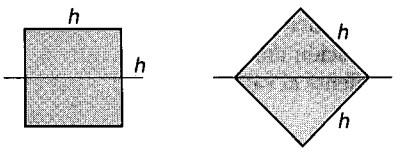


Fig. P8-21

8-22. Demuestre que el esfuerzo elástico en una viga rectangular flexionada respecto a su diagonal, puede reducirse quitando las pequeñas áreas triangulares, como se muestra en la figura. Esto se conoce como la paradoja de Emerson.[1] [*Sugerencia:* Sean ka los lados de las áreas triangulares eliminadas, donde k es una constante. Al calcular I para la sección, trate a ésta como formada por dos rectángulos, el mayor con lados $(1 - k)a$ y el menor con ancho $ka\sqrt{2}$.]

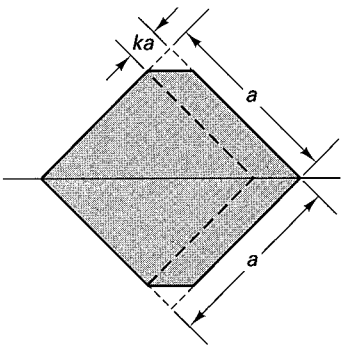


Fig. P8-22

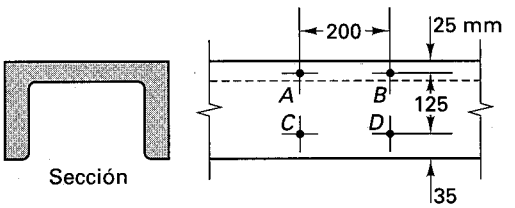


Fig. P8-23

8-23 Un miembro en forma de canal, mostrado en la figura, actúa como viga horizontal en una máquina. Cuando se aplican fuerzas verticales a este miembro, la distancia AB se incrementa 0.025 mm y la distancia CD decrece 0.230 mm. ¿Cuál es el sentido del momento aplicado y qué esfuerzos normales ocurren en las fibras extremas? $E = 200$ MPa.

[1]En 1864, en las adiciones de Saint-Venant al libro de Navier, llama inútiles a las fibras retiradas. Sin embargo, él, al igual que Emerson, reconoció que la falla *elástica* de esas fibras no indica que la sección truncada posea mayor resistencia estática que la sección completa. No obstante, en el diseño de máquinas, para miembros sometidos a fatiga, el retiro de esquinas agudas puede ser conveniente. Véase I. Todhunter y K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Nueva York, Dover, 1960, vol. II, parte I, pág. 109.

8-24. Una viga maciza de acero con las dimensiones de su sección transversal parcialmente mostradas en la figura, fue cargada en el laboratorio en flexión pura. La flexión tuvo lugar respecto a un eje neutro horizontal. Las mediciones de la deformación unitaria mostraron que las fibras superiores se contrajeron 0.0003 m/m longitudinalmente; las fibras del fondo se alargaron 0.0006 m/m longitudinalmente. Determine la fuerza normal total que actuó sobre el área sombreada indicada en la figura cuando se hicieron las mediciones de la deformación unitaria. $E = 200$ GPa. Todas las dimensiones están en mm.

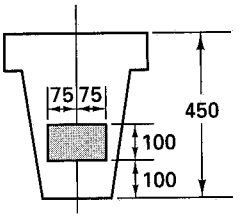


Fig. P8-24

8-25. Cuando el tornillo de una prensa C de acero, como la mostrada en la figura, oprime un objeto, la deformación unitaria en dirección horizontal debido a flexión solamente es medida por un extensómetro en el punto B. Si se registra una deformación unitaria de 900×10^{-6} in/in, ¿cuál es la fuerza sobre el tornillo correspondiente al valor de la deformación unitaria observada? $E = 30 \times 10^6$ psi.

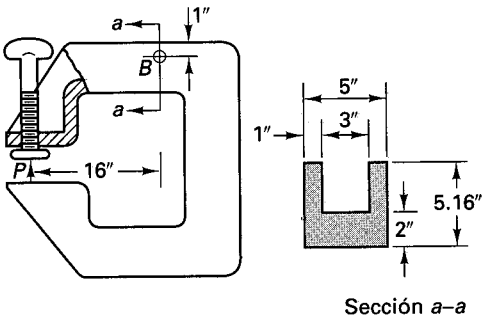


Fig. P8-25

8-26. La viga T mostrada en la figura está hecha de un material cuyo comportamiento puede ser idealizado por un límite proporcional a tensión de 20 MPa y un límite proporcional a compresión de 40 MPa. Considerando un factor de seguridad de $1\frac{1}{2}$ para la iniciación de la fluencia, encuentre la magnitud de la fuerza máxima F que se puede aplicar a esta viga en sentido hacia abajo así como hacia arriba. Base su respuesta sólo en la consideración de los esfuerzos máximos de flexión causados por F.

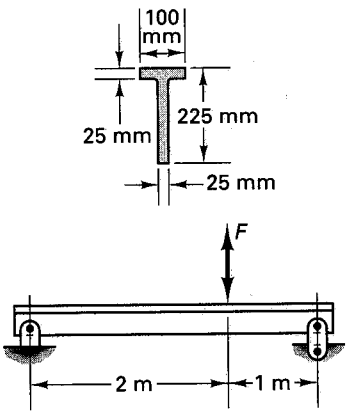


Fig. P8-26

8-27. Una sección rectangular de 150 × 300 mm está sometida a un momento flexionante positivo de 240 000 N · m respecto al eje "fuerte". El material de la viga no es isótropo y es tal que el módulo de elasticidad en tensión es $1\frac{1}{2}$ veces tan grande como en compresión; véase la figura. Si los esfuerzos no exceden el límite proporcional, encuentre los esfuerzos máximos de tensión y compresión en la viga.

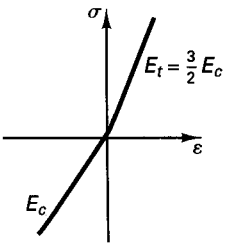


Fig. P8-27

8-28 al 8-30. Usando el procedimiento mostrado en el ejemplo 8-6, considere las secciones transversales de las vigas mostradas en las figuras. En los problemas 8-28 y 8-29, las placas superior y laterales, respectivamente, así como la pieza superior en el problema 8-30 son de bronce con E_b = 86 GPa. Las otras piezas unidas al bronce son de acero con E_s = 200 GPa. Determine la resistencia por flexión para las secciones transversales respecto al eje horizontal tal que los esfuerzos no excedan de 40 MPa.

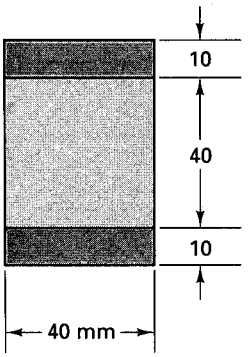


Fig. P8-28

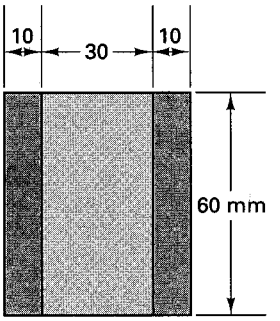


Fig. P8-29

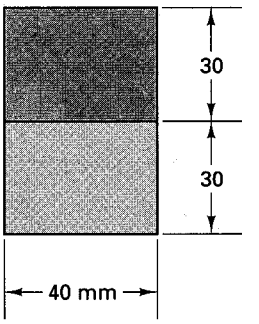


Fig. P8-30

8-31. Una viga compuesta de dos materiales diferentes tiene la sección transversal mostrada en la figura 8-7(a). Para la barra superior de 50 × 80 mm, el módulo elástico E_1 = 15 GPa y para la barra inferior de 50 × 20 mm, E_2 = 40 GPa. Encuentre los esfuerzos máximos de flexión en ambos materiales causados por un momento positivo de 12 kN · m actuando alrededor del eje z.

Sección 8-6

8-32. Una viga pequeña, mostrada en la figura, debe soportar una carga aplicada cíclicamente de 80 N/mm. La viga tiene 12 mm de espesor y un claro de 160 mm. Determine el esfuerzo máximo en el centro del claro a la profundidad de los puntos de transición. Suponga que los factores dados en la figura 8-16 son suficientemente exactos. No considere las concentraciones de esfuerzos en los soportes.

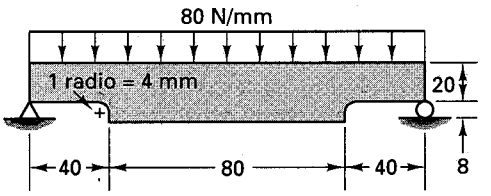


Fig. P8-32

8-33. Considerando la viga de 160 mm de claro y condiciones de carga dadas en el problema precedente, determine las distancias desde los soportes tales que los esfuerzos en el centro del claro y a una profundidad de los puntos de transición sean los mismos.

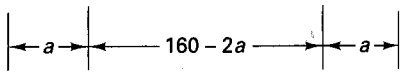


Fig. P8-33

8-34. Suponga que una barra plana de acero al níquel sirve como una parte de máquina sometida a la fuerza cíclica P como se muestra en la figura. Determine la magnitud permisible de esta fuerza si para el requisito impuesto el esfuerzo permisible es de 500 MPa.

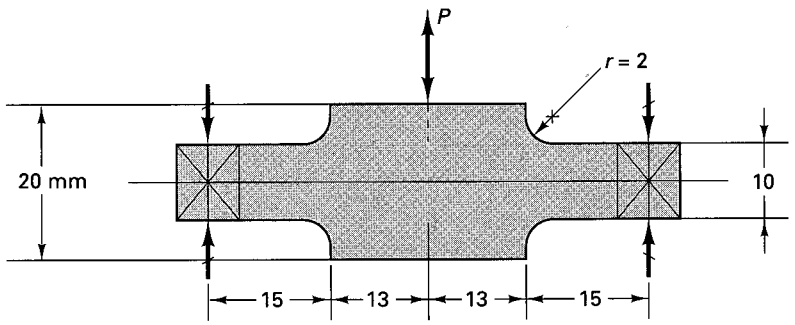


Fig. P8-34

Sección 8-7

8-35. Demuestre que la energía elástica de deformación debido a flexión para una viga simple uniformemente cargada de sección transversal rectangular es $(\sigma^2_{máx}/2E)(\frac{8}{45}AL)$, donde $\sigma_{máx}$ es el esfuerzo máximo por flexión, A es el área transversal y L es la longitud de la viga.

8-36. Demuestre que $U_{flexión} = (\sigma^2_{máx}/2E)(Vol/9)$ para una viga en voladizo de sección transversal rectangular que soporta una carga concentrada P en su extremo.

Sección 8-8

8-37 al 8-41. Encuentre las razones $M_{últ}/M_{yp}$ para vigas con las secciones transversales mostradas en las figuras. La flexión ocurre respecto a ejes horizontales. Suponga un comportamiento idealizado elastoplástico, como en el ejemplo 8-8.

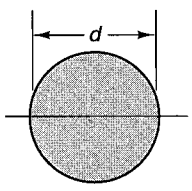


Fig. P8-37

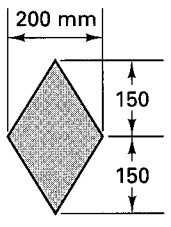


Fig. P8-38

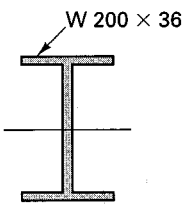


Fig. P8-39

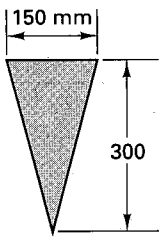


Fig. P8-40

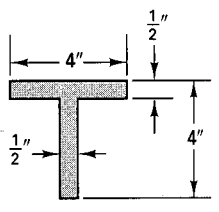


Fig. P8-41

8-42. Encuentre la capacidad por momento último de una viga con la sección transversal mostrada en el problema 8-1. Suponga que el material fluye en tensión y en compresión a 200 MPa.

8-43. Una viga I de acero sometida a flexión pura desarrolla una deformación unitaria longitudinal de -1.6×10^{-3} en su patín superior en la posición mostrada en la figura. (a) ¿Qué momento flexionante causa esta deformación unitaria? Suponga un comportamiento elastoplástico del material con $E = 200$ GPa y $\sigma_{yp} = 240$ MPa. (b) ¿Qué deformación unitaria residual permanecerá en el extensómetro al liberar la carga aplicada? (c) Dibuje el patrón de esfuerzos residuales.

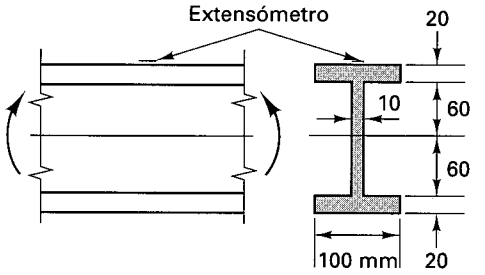


Fig. P8-43

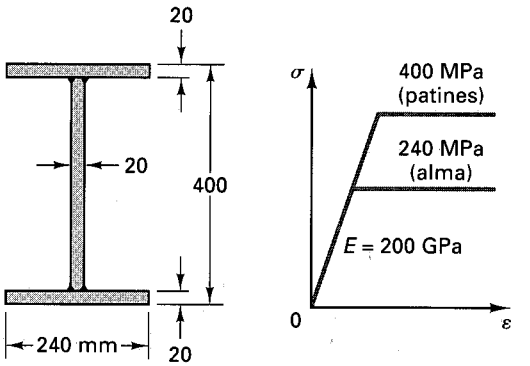


Fig. P8-44

8-44. Una viga I está hecha con tres placas de acero soldadas entre sí como se muestra en la figura. Los patines son de un acero más fuerte que el del alma. (a) ¿Qué momento flexionante desarrolla la sección cuando los mayores esfuerzos en los patines alcanzan justamente el esfuerzo de fluencia? Las propiedades esfuerzo-deformación unitaria de los dos aceros pueden idealizarse como se muestra en el diagrama. (b) Dibuje el patrón de esfuerzos residuales.

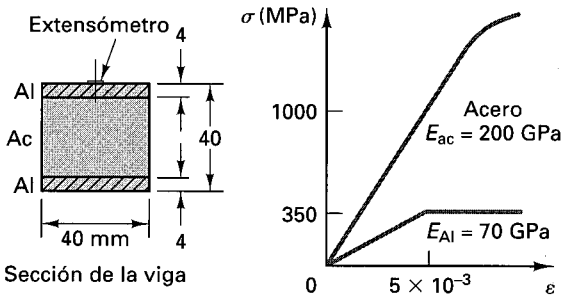


Fig. P8-45

8-45. Una pequeña viga "sandwich" con claro de 400 mm está hecha uniendo dos franjas de aluminio a una barra de acero, como se muestra en la figura. Los diagramas idealizados esfuerzo-deformación unitaria se muestran en la figura. ¿Cuál es la magnitud del momento flexionante aplicado si éste causa una deformación unitaria longitudinal de -7.5×10^{-3} en el extensómetro pegado a la parte superior de la franja de aluminio?

8-46. Al aplicar un momento flexionante alrededor del eje horizontal a la viga T con las dimensiones mostradas en la figura, la deformación unitaria longitudinal medida por el extensómetro A es de -2×10^{-3}. Determine la magnitud del momento aplicado si la relación esfuerzo-deformación unitaria del material puede idealizarse como se muestra en el diagrama.

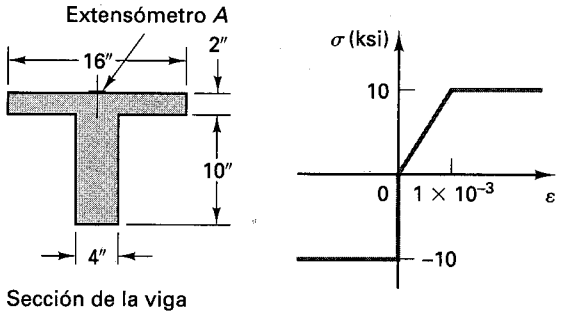


Fig. P8-46

8-47. Una viga rectangular de 100×180 mm está hecha con un material cuyas características esfuerzo-deformación unitaria se muestran en la figura. (a) Encuentre el máximo momento para el cual toda la sección transversal permanece elástica. (b) Determine la capacidad última por momento y dibuje la distribución del esfuerzo resultante. (c) ¿Cuál es la distribución del esfuerzo residual después de liberar el momento flexionante último? (d) Demuestre que los esfuerzos residuales son autoequilibrantes.

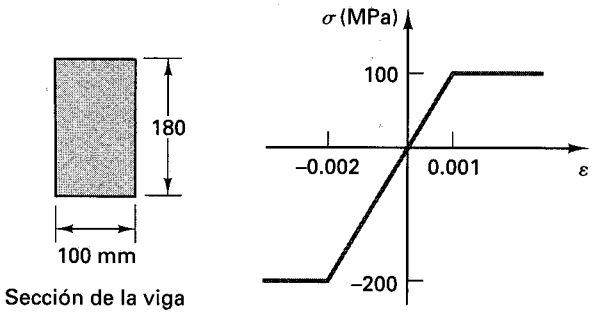


Fig. P8-47

Sección 8-9

Los problemas 8-28 al 8-30 puede asignarse para resolverse usando secciones transformadas, y viceversa, para los problemas 8-48 al 8-50.

8-48. Considere una viga compuesta cuya sección transversal está hecha de tres materiales diferentes unidos entre sí, como se muestra en la figura 8-29(a). La barra 1 es de 40×20 mm y tiene un módulo elástico $E_1 = 15$ GPa; la barra 2 es de 60×40 mm con $E_2 = 10$ GPa y la barra 3 es de 20×20 mm con $E_3 = 30$ GPa. Determine los esfuerzos máximos de flexión en cada uno de los tres materiales causados por un momento de 10 kN · m actuando alrededor del eje z. No use el método de las secciones transformadas; use el método mostrado en el ejemplo 8-6.

8-49 al 8-51. Usando secciones transformadas, determine los esfuerzos máximos de flexión en cada uno de los dos materiales para las vigas compuestas mostradas en las figuras al someter cada una a los momentos positivos de flexión de 80 kN · m. $E_{ac} = 210$ GPa y $E_{Al} = 70$ GPa. (*Sugerencia para el problema 8-50:* Para una elipse con semiejes a y b, $I = \pi ab^3/4$ respecto al eje centroidal mayor.)

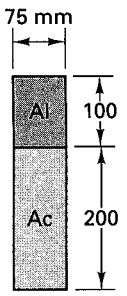


Fig. P8-49

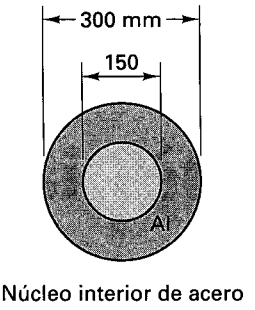


Fig. P8-50

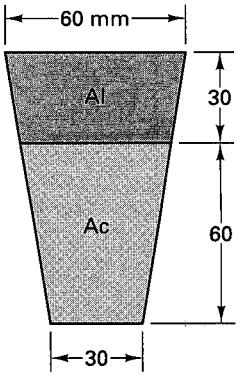


Fig. P8-51

8-52 y 8-53. Determine el momento flexionante permisible respecto a los ejes neutros horizontales para las vigas compuestas de madera y placas de acero que tienen las dimensiones en sus secciones transversales mostradas en las figuras. Los materiales están unidos de modo que ellos actúan como una unidad. $E_{ac} = 30 \times 10^6$ psi y $E_w = 1.2 \times 10^6$ psi. Los esfuerzos permisibles de flexión son $\sigma_{ac} = 20$ ksi y $\sigma_w = 1.2$ ksi.

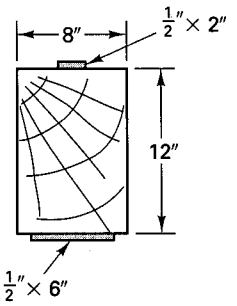


Fig. P8-52

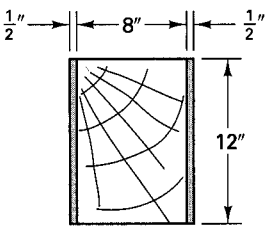


Fig. P8-53

8-54. Una losa de concreto de 150 mm de espesor está reforzada longitudinalmente con barras de acero, como se muestra en la figura. Determine el momento flexionante permisible por 1 m de ancho de losa. Suponga $n = 12$ y que los esfuerzos permisibles para el acero y el concreto son de 150 MN/m^2 y de 8 MN/m^2, respectivamente.

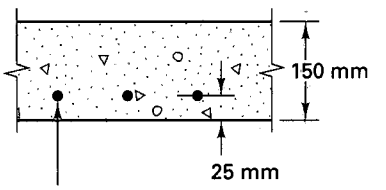


Fig. P8-54

8-55. Una viga tiene la sección transversal mostrada en la figura y está sometida a un momento flexionante positivo que genera un esfuerzo de tensión en el acero de 20 ksi. Si $n = 12$, ¿cuál es el valor del momento flexionante?

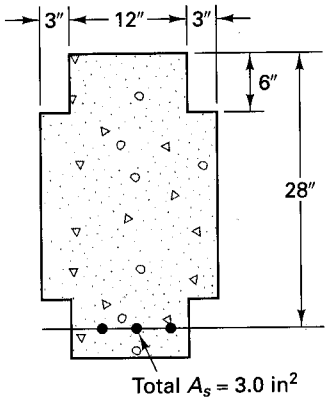


Fig. P8-55

Sección 8-10

8-56. Resuelva el ejemplo 8-14 cambiando h a 100 mm.

8-57. Deduzca la ecuación 8-41.

8-58. ¿Cuál es el máximo momento flexionante que puede aplicarse a una barra curva como la mostrada en la figura 8-32(a), con $\bar{r} = 3$ in, si tiene una sección transversal circular de 2 in de diámetro y si el esfuerzo permisible es de 12 ksi?

9

Flexión asimétrica de vigas

9-1. Introducción

En este capítulo, el análisis de la flexión en vigas (visto en el capítulo anterior) ha sido ampliado a casos más generales. Primero, consideraremos la flexión elástica asimétrica de vigas prismáticas con secciones transversales doblemente simétricas. Luego, empleando el método de superposición, tratamos la flexión elástica con fuerzas axiales. A continuación vemos la flexión inelástica con fuerzas axiales en secciones transversales con doble simetría. A esto sigue el análisis de la flexión de vigas prismáticas con sección transversal arbitraria. Para tratar este tema se establecen las ecuaciones básicas para los momentos y productos de inercia de áreas, seguido por las ecuaciones para los ejes principales de inercia. Usando esas ecuaciones, se establecen las ecuaciones generales para determinar los esfuerzos de flexión elástico lineales en vigas con sección transversal arbitraria.

Parte A SECCIONES TRANSVERSALES DOBLEMENTE SIMÉTRICAS

9-2. Flexión con relación a ambos ejes principales

Como un ejemplo simple de flexión pura asimétrica o **inclinada**, considere la viga rectangular mostrada en la figura 9-1. Los momentos M aplicados actúan en el plano *abcd*. Usando la representación vectorial para **M** mostrada en la figura 9-1(b), este vector forma un ángulo α con el eje z y puede descomponerse en las dos componentes M_y y M_z. Como la sección transversal de esta viga tiene simetría respecto a ambos ejes, las fórmulas deducidas en la sección 8-3 son directamente aplicables. Debido a la simetría, el producto de inercia para esta sección es cero y los ejes ortogonales mostrados son los ejes *principales* de la sección transversal. Esto también es cierto para los ejes centroidales de áreas con simetría simple. (Véanse los detalles en las secciones 9-6 y 9-7.)

Suponiendo comportamiento *elástico* del material, una superposición de los esfuerzos causados por M_y y M_z es la solución del problema. Por consiguiente, usando las ecuaciones 8-11 y 8-12,

$$\sigma_x = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{9-1}$$

donde todos los términos tienen los significados previamente definidos.

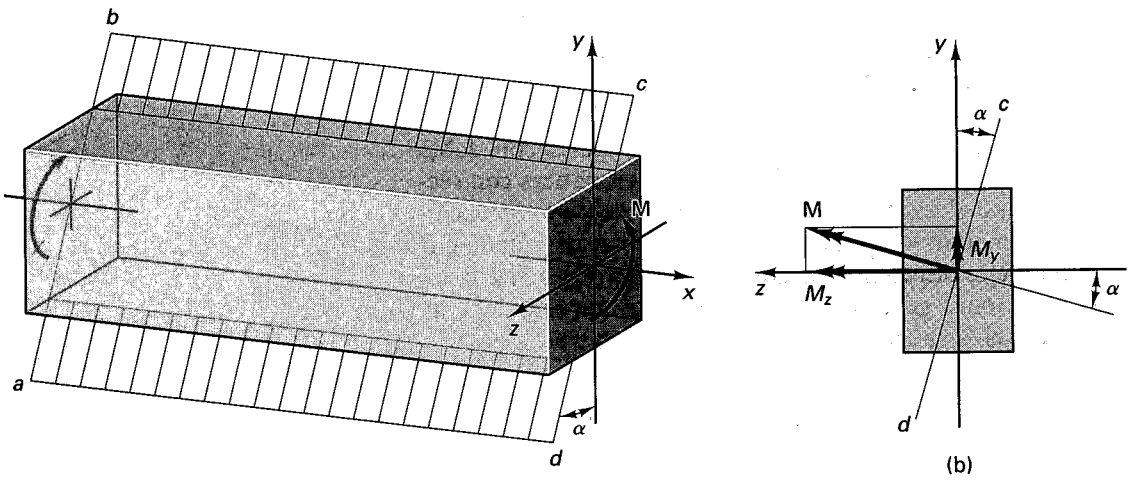


Fig. 9-1 Flexión asimétrica de una viga con sección transversal doblemente simétrica.

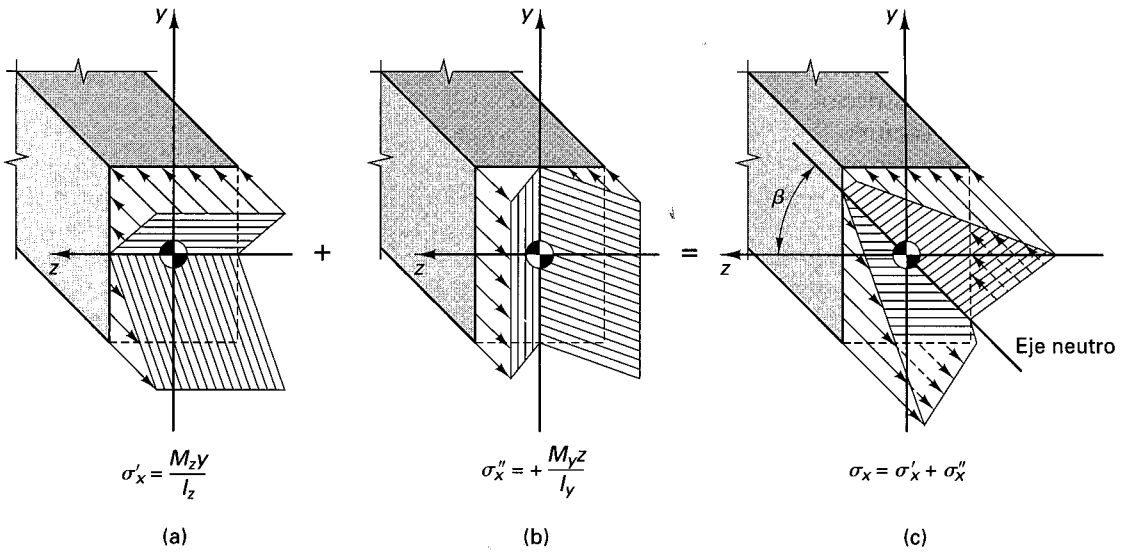


Fig. 9-2 Superposición de esfuerzos elásticos de flexión.

Una ilustración gráfica de la superposición se da en la figura 9-2. Nótese que una línea de esfuerzo cero (es decir, un eje neutro) forma un ángulo β con el eje z. Analíticamente, tal eje puede determinarse haciendo igual a cero el esfuerzo dado por la ecuación 9-1; es decir,

$$-\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = 0 \quad \text{o} \quad \tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y} \tag{9-2}$$

Como, en general, $M_y = M \operatorname{sen} \alpha$ y $M_z = M \cos \alpha$, esta ecuación se reduce a

$$\tan \beta = \frac{I_z}{I_y} \tan \alpha \tag{9-3}$$

Esta ecuación muestra que a menos que $I_z = I_y$, o α sea 0° o 90°, los ángulos α y β no son iguales. Por tanto, en general, el eje neutro y la normal al plano en el que actúa el momento aplicado no coinciden.

Estos resultados pueden generalizarse a vigas con secciones transversales de cualquier forma siempre que se usen ejes *principales*. Para justificar esto, consideremos que la viga elástica, con la sección transversal arbitraria mostrada en la figura 9-3, está flexionada respecto al eje z *principal* y supongamos que la distribución de esfuerzos en ella está dada por la ecuación 8-11 $\sigma_x = -M_z y / I_z$. Si esta distribución de esfuerzos no causa un momento flexionante M_y respecto al eje y, esta es la solución correcta del problema. La expresión para M_y es

$$M_y = \int_A -\frac{M_z}{I_z} yz \, dA = -\frac{M_z}{I} \int_A yz \, dA = 0 \tag{9-4}$$

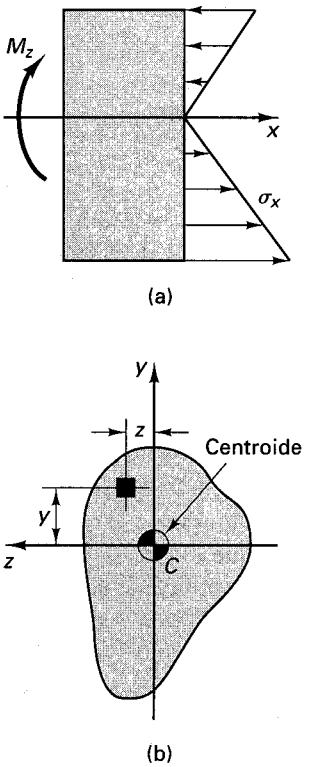


Fig. 9-3 Flexión pura respecto a un eje principal.

donde las constantes se colocan al frente de la segunda integral, que es igual a cero porque, por definición, un producto de inercia respecto a ejes uno de los cuales es un eje principal, es nulo.

En virtud de lo anterior, la restricción impuesta sobre la fórmula de la flexión elástica al principio del capítulo, limitándola a secciones transversales simétricas, puede cancelarse. Sin embargo, en la aplicación de la ecuación 9-1 *deben usarse los ejes principales de la sección transversal.* Un procedimiento que no requiere esto, se verá en la Sección 9-8.

Ejemplo 9-1

La viga de madera de 100 × 150 mm mostrada en la figura 9-4(a) se usa para soportar una carga uniformemente distribuida de 4 kN (total) sobre un claro simple de 3 m. La carga aplicada actúa en un plano que forma un ángulo de 30° con la vertical, como se muestra en la figura 9-4(b) y de nuevo en la figura 9-4(c). Calcule el esfuerzo de flexión máximo en el centro del claro y, para la misma sección, localice el eje neutro. Desprecie el peso de la viga.

SOLUCIÓN

El momento flexionante máximo *en el plano de la carga aplicada* ocurre en el centro del claro y, de acuerdo con el ejemplo 7-8, es igual a $w_o L^2/8$ o $WL/8$, donde W es la carga total sobre el claro L. Por consiguiente,

$$M = \frac{WL}{8} = \frac{4 \times 3}{8} = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

A continuación, este momento se resuelve en componentes que actúan alrededor de los ejes respectivos y se calculan I_z e I_y:

$$M_z = M \cos \alpha = 1.5 \times \sqrt{3}/2 = 1.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_y = M \text{ sen } \alpha = 1.5 \times 0.5 = 0.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$I_z = 100 \times 150^3/12 = 28.1 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 150 \times 100^3/12 = 12.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Considerando el sentido de las componentes del momento, puede concluirse que el esfuerzo máximo de tensión ocurre en A. Un razonamiento similar es aplicable al considerar los otros puntos de esquina. Alternativamente, los valores para los puntos coordenados pueden sustituirse directamente en la ecuación 9-1. En ambos casos,

$$\sigma_A = -\frac{M_z(-c_1)}{I_z} + \frac{M_y c_2}{I_y} = \frac{1.3 \times 10^6 \times 75}{28.1 \times 10^6} + \frac{0.75 \times 10^6 \times 50}{12.5 \times 10^6}$$

$$= +3.47 + 3.00 = +6.47 \text{ MPa}$$

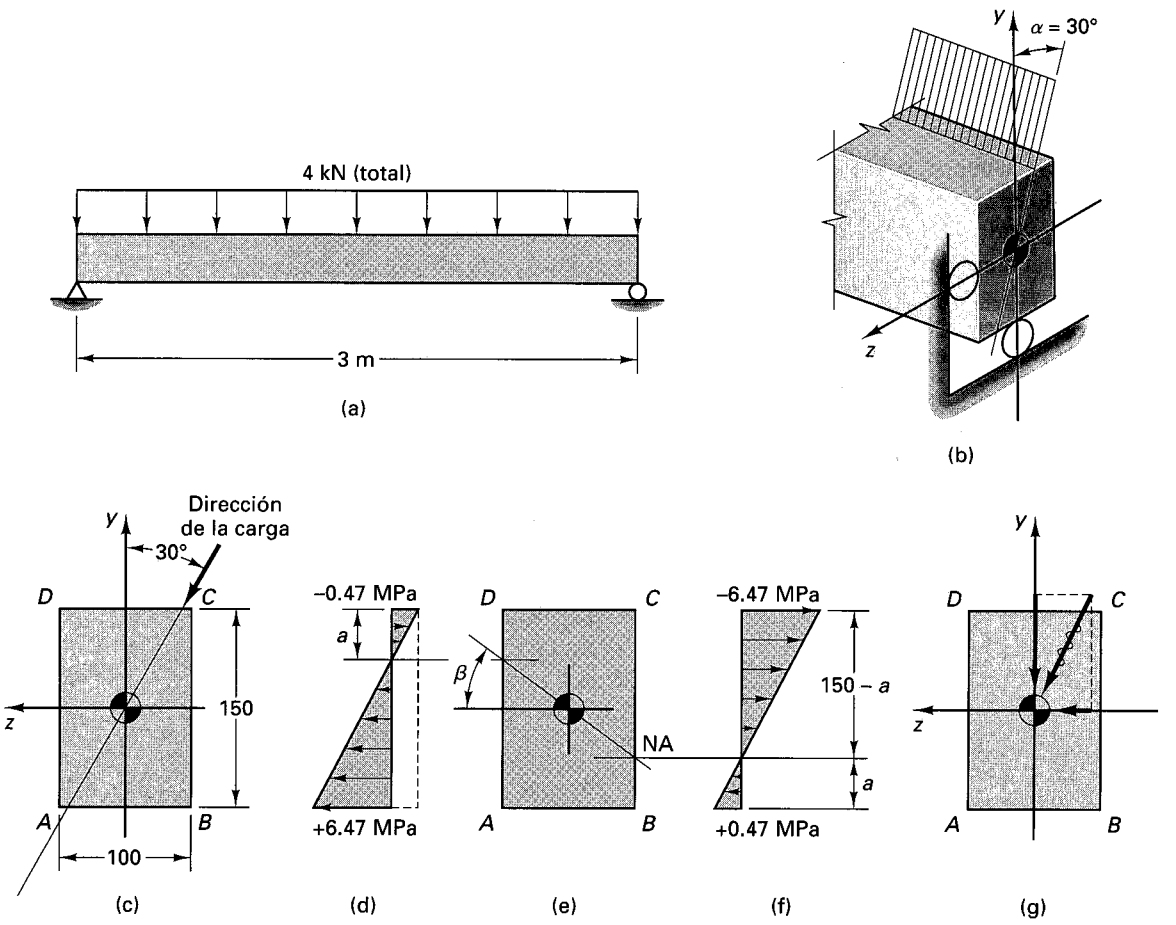


Fig. 9-4

$$\sigma_B = +3.47 - 3.00 = +0.47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_C = -3.47 - 3.00 = -6.47 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -3.47 + 3.00 = -0.47 \text{ MPa}$$

Note que las magnitudes de los esfuerzos en esquinas diametralmente opuestas son numéricamente iguales.

El eje neutro queda definido por el ángulo β al usar la ecuación 9-3:

$$\tan \beta = \frac{28.1 \times 10^6}{12.5 \times 10^6} \tan 30° = 1.30 \quad \text{o} \quad \beta = 52.4°$$

Alternativamente, puede encontrarse a partir de la distribución de esfuerzos que varía linealmente entre dos puntos cualquiera. Por ejemplo, por triángulos semejantes, $a/(150 - a) = 0.47/6.47$, lo que da $a = 10.2$ mm. Es-

to localiza el eje neutro mostrado en la figura 9-4(e), pasando por el centroide de la sección. Ambos resultados conducen a la misma β.

Cuando la flexión asimétrica de una viga es causada por fuerzas aplicadas transversalmente, *es a menudo más conveniente* usar otro procedimiento equivalente al antes dado. Las fuerzas aplicadas primero se descomponen en elementos que actúan paralelamente a los ejes principales del área transversal. Luego se calculan los momentos flexionantes causados por esas componentes respecto a los ejes respectivos, para usarse en la fórmula de la flexión. En el ejemplo 9-1, tales componentes de la carga aplicada se muestran en la figura 9-4(g). Para evitar *esfuerzos torsionales*, las fuerzas transversales deben pasar por el *centro de cortante*, concepto que se analizará en el siguiente capítulo. Para secciones doblemente simétricas (por ejemplo, un rectángulo, un círculo, una viga I, etc.), *el centro de cortante coincide con el centro geométrico (centroide) de la sección transversal.* Para otras secciones transversales, como una canal, el centro de cortante se encuentra en alguna otra parte, en este caso, en el punto *S* mostrado en la figura 9-5, y es en este punto que la fuerza transversal debe aplicarse para impedir que se presenten esfuerzos torsionales. Los perfiles angulares que actúan como vigas deben tratarse en forma similar (véase la figura 10-24). Para el análisis de la flexión asimétrica, las fuerzas aplicadas deben resolverse *en* el centro de cortante paralelamente a los ejes principales de la sección transversal.

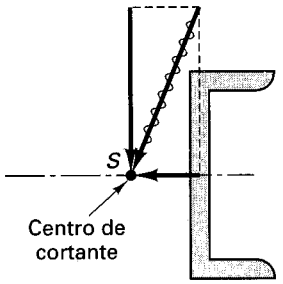


Fig. 9-5 La fuerza lateral por el centro de cortante *S* no causa torsión.

9-3. Flexión elástica con cargas axiales

Una solución para la flexión pura respecto a ambos ejes principales de un miembro puede ampliarse para incluir el efecto de cargas axiales empleando el principio de *superposición*. Tal enfoque es aplicable sólo en el rango del comportamiento *elástico* de los miembros. Además, si una fuerza axial aplicada causa compresión, un miembro debe ser robusto, para que no se presente un problema de pandeo del tipo considerado en el capítulo 16. Con estas reservas, la ecuación 9-1 toma la forma generalizada

$$\sigma_x = \frac{P}{A} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} \tag{9-5}$$

donde P se considera positiva para fuerzas axiales de tensión y la flexión tiene lugar respecto a los dos ejes *principales* y y z.

Para el caso particular de una fuerza aplicada excéntricamente, considere el caso mostrado en la figura 9-6(a). Aplicando dos fuerzas P iguales pero opuestas en el centroide C, como se muestra en la figura 9-6(b), se obtiene un problema *equivalente*. En esta formulación, la fuerza axial aplicada P actuando en C da lugar al término P/A de la ecuación 9-5; mientras que un par Pd desarrollado por las fuerzas opuestas P a una distancia d entre sí, generan flexión asimétrica. El momento Pd aplicado por este par

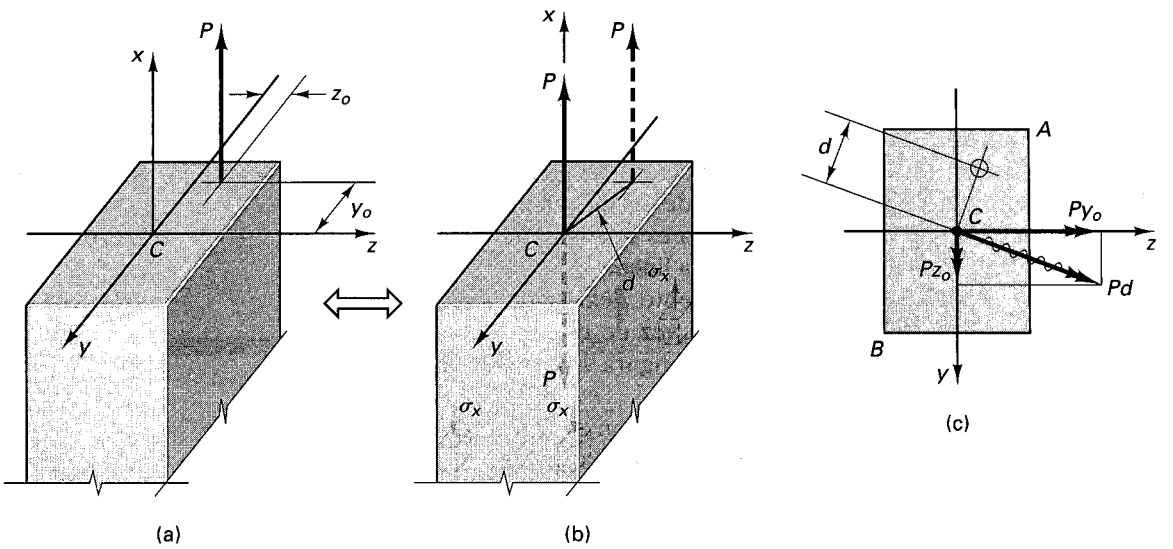


Fig. 9-6

puede descomponerse en dos componentes a lo largo de los ejes principales, como se muestra en la figura 9-6(c). Esas componentes son $M_y = Pz_o$ y $M_z = Py_o$. Como el sentido de esos momentos coincide con las direcciones positivas de los ejes y y z, esos momentos en la ecuación 9-6 son positivos.

Si se usan ejes principales, la ecuación 9-5 puede aplicarse a miembros de cualquier sección transversal. Sin embargo, en algunos casos puede ser más conveniente usar un conjunto de ejes ortogonales arbitrarios y determinar los esfuerzos de flexión usando la ecuación 9-33 dada en la sección 9-8. Para completar una solución, el esfuerzo normal causado por fuerza axial debe superponerse.

Es conveniente notar que en el cálculo, la ecuación de un plano está dada por

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{9-6}$$

donde A, B, C y D son constantes. Haciendo $A = 1, x = \sigma_x, B = M_z/I_z, C = -M_y/I_y$ y $D = -P/A$, puede verse que la ecuación 9-5 define un plano. Similarmente, como $\varepsilon = \sigma/E$, la ecuación 9-5 puede escribirse en términos de deformación unitaria como

$$\varepsilon_x = x = -(by + cz + d) \tag{9-7}$$

donde $a = 1$, y b, c y d son constantes. Como esta ecuación también define un plano, se verifica la hipótesis básica sobre deformaciones unitarias de la teoría simplificada de la flexión. Sin embargo, debido a la presencia de deformación unitaria axial debido a P, las "secciones planas" no sólo giran sino también se trasladan una cantidad P/AE.

Con base en el análisis anterior, puede concluirse que las magnitudes de las deformaciones unitarias longitudinales en miembros sometidos a flexión y fuerzas axiales pueden representarse por distancias de un plano

de referencia a un plano inclinado. Lo mismo es cierto para esfuerzos *elásticos*. Esos planos inclinados intersectan el plano de referencia en una línea. Esta línea de *esfuerzo* o *deformación unitaria nula* es análoga al eje neutro que ocurre en la flexión pura. Sin embargo, a diferencia del caso anterior, cuando $P \neq 0$, esta línea no pasa por el centroide de la sección transversal. Para grandes fuerzas axiales y pequeños momentos flexionantes, la línea de esfuerzo o deformación unitaria nula puede encontrarse fuera de la sección transversal. La importancia de esta línea es que los esfuerzos o deformaciones normales varían desde ella en forma lineal.

Debe notarse que en muchos casos, el momento flexionante en un miembro es causado por fuerzas transversales en vez de por una fuerza axial excéntricamente aplicada, como se ilustra en la figura 9-6. En tales casos, la ecuación 9-5 sigue siendo aplicable.

Siguen varios ejemplos ilustrativos, comenzando con situaciones en que la flexión tiene lugar sólo respecto a uno de los ejes principales.

Ejemplo 9-2

Una barra elástica de 50 × 75 mm de 1.5 m de longitud, de peso muy reducido, está cargada como se muestra en la figura 9-7(a), con acotaciones en mm. Determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión que actúan normalmente a la sección a lo largo de la viga.

SOLUCIÓN

Para enfatizar el método de superposición, este problema será resuelto dividiéndolo en dos partes. En la figura 9-7(b), la barra se muestra sometida sólo a la fuerza axial y en la figura 9-7(c), la misma barra se muestra sometida sólo a la fuerza transversal. Para la fuerza axial, el esfuerzo normal en toda la longitud de la barra es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{25 \times 10^3}{50 \times 75} = 6.67 \text{ MPa} \quad \text{(tensión)}$$

Este resultado está indicado en la figura 9-7(d). Los esfuerzos normales debido a la fuerza transversal dependen de la magnitud del momento flexionante y el momento flexionante máximo ocurre bajo la fuerza aplicada. Como la reacción izquierda es 2.7 kN, $M_{\text{máx}} = 2.7 \times 10^3 \times 375 = 1.013 \times 10^6$ N · mm. Según la fórmula de la flexión, los esfuerzos máximos en las fibras extremas son

$$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bh^2} = \frac{61 \times 1.013 \times 10^6}{50 \times 75^2} = \pm 21.6 \text{ MPa}$$

Estos esfuerzos actúan normalmente a la sección de la viga y decrecen linealmente hacia el eje neutro, como en la figura 9-7(e). Entonces, para obtener el esfuerzo combinado para cualquier elemento particular, los esfuerzos de flexión deben sumarse algebraicamente al esfuerzo directo de tensión. Entonces, como puede verse en la figura 9-7(f), en el punto A, el esfuerzo normal resultante es 14.9 MPa de compresión, y en B, es 28.3

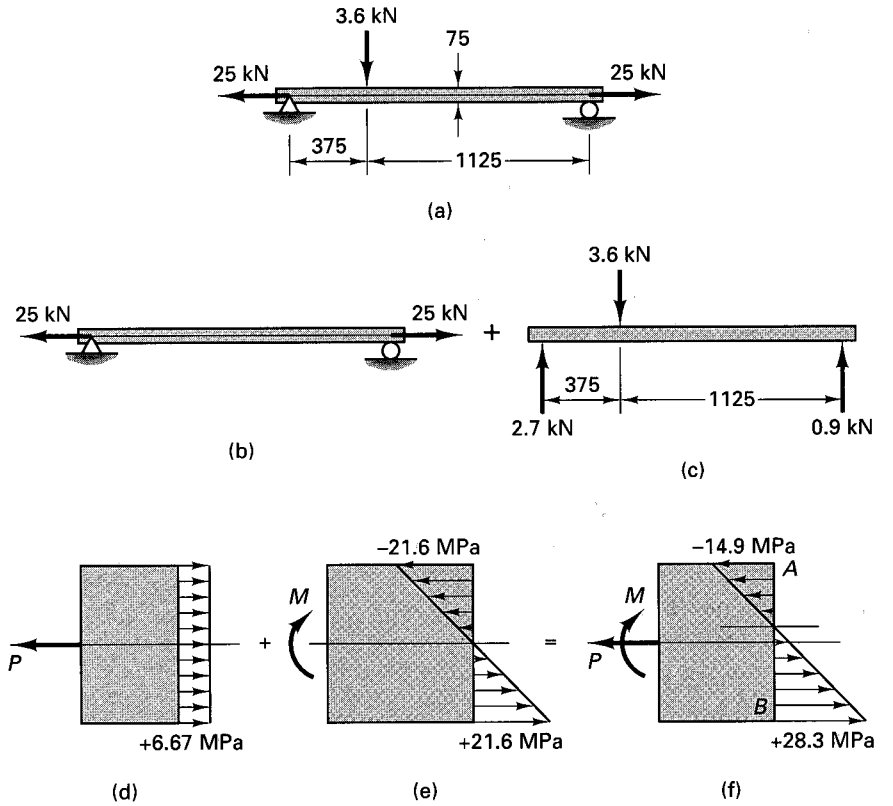


Fig. 9-7

MPa de tensión. En la figura se muestran en vista lateral los vectores esfuerzo tal como se dibujan comúnmente.

Aunque en este problema la fuerza axial dada es mayor que la fuerza transversal, la flexión causa esfuerzos mayores. Sin embargo, se previene al lector no considerar a los miembros esbeltos a compresión de la misma manera.

Nótese que en el resultado final, la línea de cero esfuerzo, que está localizada en el centroide de la sección por flexión, se mueve hacia arriba. Note también que los esfuerzos locales, causados por la fuerza concentrada, que actúa normalmente a la parte superior de la viga, no fueron considerados. Por lo general, esos esfuerzos son tratados independientemente como esfuerzos de aplastamiento local.

La distribución de esfuerzos mostrada en la figura 9-7(f) cambiaría si en vez de fuerzas axiales de tensión aplicadas en los extremos, actuasen fuerzas de compresión de la misma magnitud sobre el miembro. El esfuerzo máximo de tensión se reduciría de 28.3 MPa a 14.9 MPa, lo que sería conveniente en una viga hecha de un material débil en tensión y que soportase una carga transversal. Esta idea se utiliza en la construcción preesforzada. Tendones hechos de barras o cables de acero de alta resistencia estirados a lo largo de una viga con anclajes en los extremos, se usan para

precomprimir las vigas de concreto. Tales fuerzas artificialmente aplicadas inhiben el desarrollo de esfuerzos de tensión. El preesfuerzo ha sido usado también en los bastidores de autos de carrera.

Ejemplo 9-3

Una barra elástica de 50 × 50 mm doblada en forma de U, como se muestra en la figura 9-8(a), está sometida a la acción de dos fuerzas opuestas P de 8.33 kN cada una. Determine el esfuerzo normal máximo que se presenta en la sección A-B.

SOLUCIÓN

La sección por investigar está en la región curva de la barra, pero esto no constituye una diferencia esencial en el procedimiento. Primero, un segmento de la barra se toma como cuerpo libre, como se muestra en la figura 9-8(b). En la sección A-B, se determinan la fuerza axial, aplicada en el centroide de la sección, y el momento flexionante necesario para mantener el equilibrio. Luego, cada elemento del sistema de fuerzas es considerado por separado. El esfuerzo causado por las fuerzas axiales es

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{8.33 \times 10^3}{50 \times 50} = 3.33 \text{ MPa} \quad \text{(compresión)}$$

y se muestra en el primer diagrama de la figura 9-8(c). Los esfuerzos normales causados por el momento flexionante pueden obtenerse usando la ecuación 8-37. Sin embargo, para esta barra, doblada con un radio de 75 mm, la solución ya se conoce del ejemplo 8-14. La distribución del esfuerzo correspondiente a este caso se muestra en el segundo diagrama de la figura 9-8(c). Superponiendo los resultados de esas dos soluciones, se obtiene la distribución compuesta del esfuerzo. Esto se muestra en el tercer diagrama de la figura 9-8(c). El esfuerzo máximo de compresión ocurre en A y es de

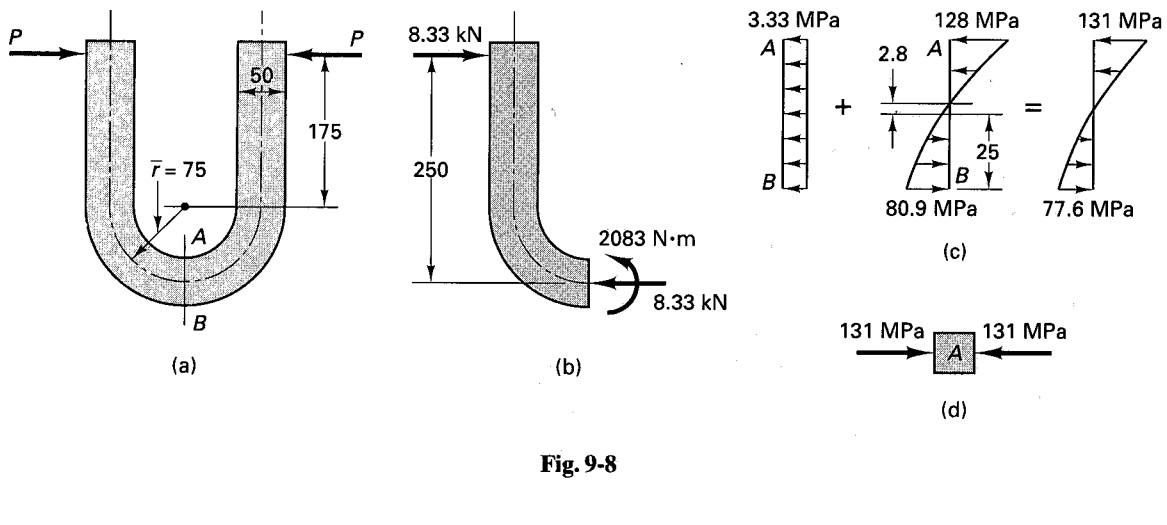


Fig. 9-8

131 MPa. Un elemento aislado para el punto A se muestra en la figura 9-8(d). No hay esfuerzos cortantes en la sección A-B ya que ninguna fuerza cortante es necesaria para mantener el equilibrio del segmento mostrado en la figura 9-8(b). Es sorprendente la relativa insignificancia del esfuerzo causado por la fuerza axial.

Problemas similares al anterior ocurren con frecuencia en el diseño de máquinas. Ganchos, prensas C, marcos de punzonadoras, etc., ilustran la variedad de situaciones en que deben aplicarse los métodos de análisis anteriores.

Ejemplo 9-4

Considere un bloque ahusado con sección transversal rectangular en su base, como se muestra en las figuras 9-9(a) y (b). Determine la excentricidad máxima tal, que el esfuerzo en B causado por la fuerza aplicada P sea de cero.

SOLUCIÓN

Para mantener la fuerza aplicada P en equilibrio, debe haber una fuerza axial de compresión P y un momento Pe en la base con los sentidos mostrados. El esfuerzo causado por la fuerza axial es $\sigma = -P/A = -P/bh$, mientras que el máximo esfuerzo de tensión causado por flexión es $\sigma_{máx} = Mc/I = M/S = 6Pe/bh^2$, donde $bh^2/6$ es el módulo elástico de sección de la sección transversal rectangular. Para satisfacer la condición de que el esfuerzo en B sea de cero, se sigue que

$$\sigma_B = -\frac{P}{bh} + \frac{6Pe}{bh^2} = 0 \quad \text{o} \quad e = \frac{h}{6}$$

lo que implica que si la fuerza P está aplicada a una distancia $h/6$ del eje centroidal de la sección transversal, el esfuerzo en B es justamente cero. Las distribuciones de esfuerzo a través de la base correspondientes, respectivamente, a la fuerza axial y al momento flexionante, se muestran en las figuras 9-9(c) y (d), y su suma algebraica en la figura 9-9(e).

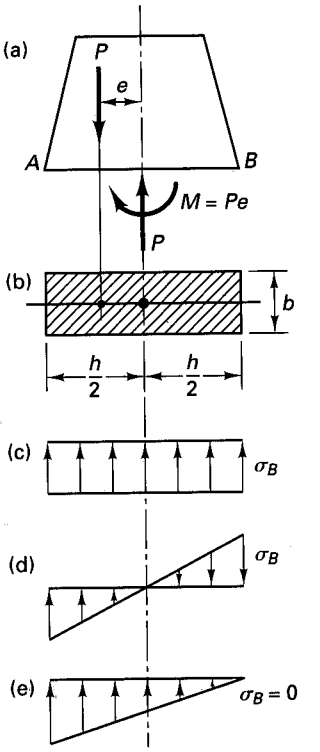


Fig. 9-9 Localización de la fuerza P que genera un esfuerzo nulo en B.

En el problema anterior, si la fuerza P se aplicase más cerca del centroide de la sección, se desarrollaría un momento flexionante más pequeño en una sección A-B y habría algún esfuerzo de compresión en B. El mismo razonamiento puede hacerse para la fuerza que actúa a la derecha del eje centroidal. Por tanto, puede formularse de la siguiente manera una regla práctica, muy usada por los primeros constructores de estructuras de mampostería: *Si la resultante de todas las fuerzas verticales actúa dentro del tercio medio de la sección transversal rectangular, no habrá tensión en el material de esa sección.* Es claro que la resultante actúa en un plano vertical que contiene uno de los ejes de simetría del área de la sección transversal rectangular.

El análisis anterior puede generalizarse para aplicarlo a cualquier sistema plano de fuerza que actúe sobre un miembro. Puede hacerse que la resultante de esas fuerzas intersecte el plano de la sección transversal, como se muestra en la figura 9-10. En el punto de intersección de esta resultante con la sección, ella puede descomponerse en sus elementos horizontal y vertical. Si la componente vertical de la resultante cumple las condiciones del problema anterior, ninguna tensión se desarrollará en el punto B, ya que la componente horizontal causa sólo esfuerzos cortantes. Por lo tanto, una regla más general sobre el "tercio medio" puede enunciarse como sigue: No habrá tensión en una sección de un miembro de sección transversal *rectangular* si la resultante de la fuerzas arriba de esta sección *intersecta* uno de los ejes de simetría de la sección dentro del tercio medio.

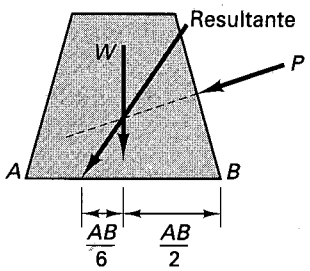


Fig. 9-10 La resultante no causa tensión en B.

Ejemplo 9-5

Encuentre la distribución del esfuerzo en la sección $ABCD$ para el bloque mostrado en la figura 9-11(a), con dimensiones en mm, si $P = 64$ kN. En la misma sección, localice la línea de esfuerzo cero. Desprecie el peso del bloque.

SOLUCIÓN

En este problema, es algo más sencillo escribir la ecuación 9-5 con ayuda de la ecuación 8-22, definiendo el módulo de sección elástico $S = I/c$ como $bh^2/6$. El esfuerzo normal en cualquier esquina del bloque puede encontrarse directamente con tal ecuación transformada. Esta ecuación toma la forma

$$\sigma_1 = \frac{P}{A} - \frac{M_z}{S_z} + \frac{M_y}{S_y} \tag{9-8}$$

donde $S_z = bh^2/6$ y $S_y = hb^2/6$.

Las fuerzas que actúan sobre la sección $ABCD$, figura 9-11(c), son $P = -64 \times 10^3$ N, $M_y = -64 \times 10^3 \times 150 = -9.6 \times 10^6$ N · mm y $M_z = -64 \times 10^3 \times (75 + 75) = -9.6 \times 10^6$ N · mm. El área de la sección transversal tiene las siguientes propiedades: $A = 150 \times 300 = 45 \times 10^3$ mm^2, $S_z = 300 \times 150^2/6 = 1.125 \times 10^6$ mm^3 y $S_y = 150 \times 300^2/6 = 2.25 \times 10^6$ mm^3.

Los esfuerzos normales en las esquinas se encuentran usando la ecuación 9-8, asignando por inspección los signos apropiados a los esfuerzos. Por ejemplo, de la figura 9-11(c), puede verse que debido a M_y, los esfuerzos en las esquinas A y D son de compresión. Otros casos son tratados similarmente. Usando este enfoque,

$$\sigma_A = -\frac{64 \times 10^3}{45 \times 10^3} - \frac{9.6 \times 10^6}{1.125 \times 10^6} - \frac{9.6 \times 10^6}{2.25 \times 10^6}$$

$$= -1.42 - 8.53 - 4.27 = -14.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = -1.42 - 8.53 + 4.27 = -5.7 \text{ MPa}$$

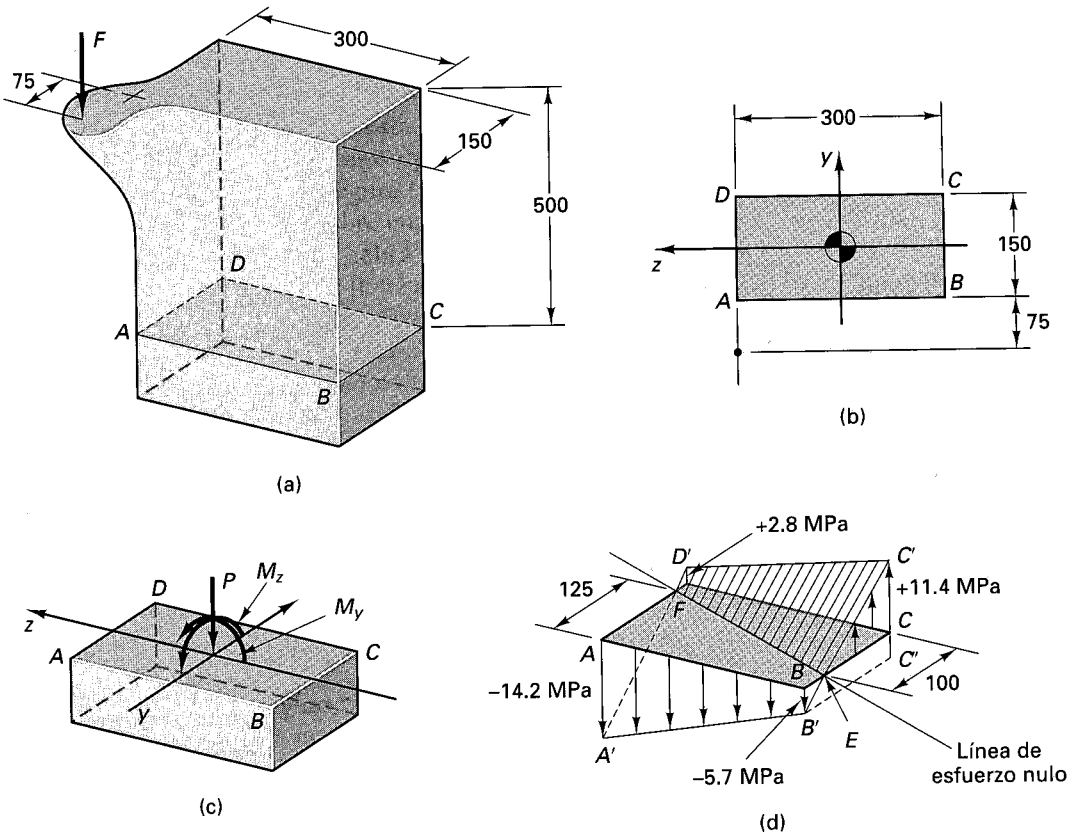


Fig. 9-11

$$\sigma_C = -1.42 + 8.53 + 4.27 = +11.4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D = -1.42 + 8.53 - 4.27 = +2.8 \text{ MPa}$$

Esos esfuerzos se muestran en la figura 9-11(d). Los extremos de esos cuatro vectores esfuerzo en A', B', C' y D' se encuentran en el plano $A'B'C'D'$. La distancia vertical entre los planos $ABCD$ y $A'B'C'D'$ define el esfuerzo total sobre cualquier punto de la sección transversal. La intersección del plano $A'B'C'D'$ con el plano $ABCD$ localiza la línea de esfuerzo cero FE.

Trazando una línea $B'C''$ paralela a BC, se obtienen los triángulos semejantes $C'B'C''$ y $C'EC$; la distancia CE es entonces igual a $[11.4/(11.4 + 5.7)]150 = 100$ mm. Similarmente, se encuentra que la distancia AF es de 125 mm. Los puntos E y F localizan la línea de esfuerzo cero. Si se ignora el peso del bloque, la distribución del esfuerzo sobre cualquier otra sección paralela a $ABCD$ es la misma.

Ejemplo 9-6

Encuentre la zona en que la fuerza vertical hacia abajo P_o puede aplicarse al bloque rectangular sin peso mostrado en la figura 9-12(a) sin causar ningún esfuerzo de tensión en la sección A-B.

SOLUCIÓN

La fuerza $P = -P_o$ se coloca en un punto arbitrario en el primer cuadrante del sistema coordenado yz mostrado. Entonces, el mismo razonamiento usado en el ejemplo anterior muestra que con esta posición de la fuerza, la mayor tendencia para un esfuerzo de tensión existe en el punto A. Con $P = -P_o$, $M_z = +P_o y$ y $M_y = -P_o z$, al hacer el esfuerzo en A igual a cero se cumple la condición límite del problema. Usando la ecuación 9-5, el esfuerzo en A puede expresarse como

$$\sigma_A = 0 = \frac{-P_o}{A} - \frac{(P_o y)(-b/2)}{I_{zz}} + \frac{(-P_o z)(-h/2)}{I_{yy}}$$

o

$$-\frac{P_o}{A} + \frac{P_o y}{b^2 h/6} + \frac{P_o z}{bh^2/6} = 0$$

Simplificando,

$$\frac{z}{h/6} + \frac{y}{b/6} = 1$$

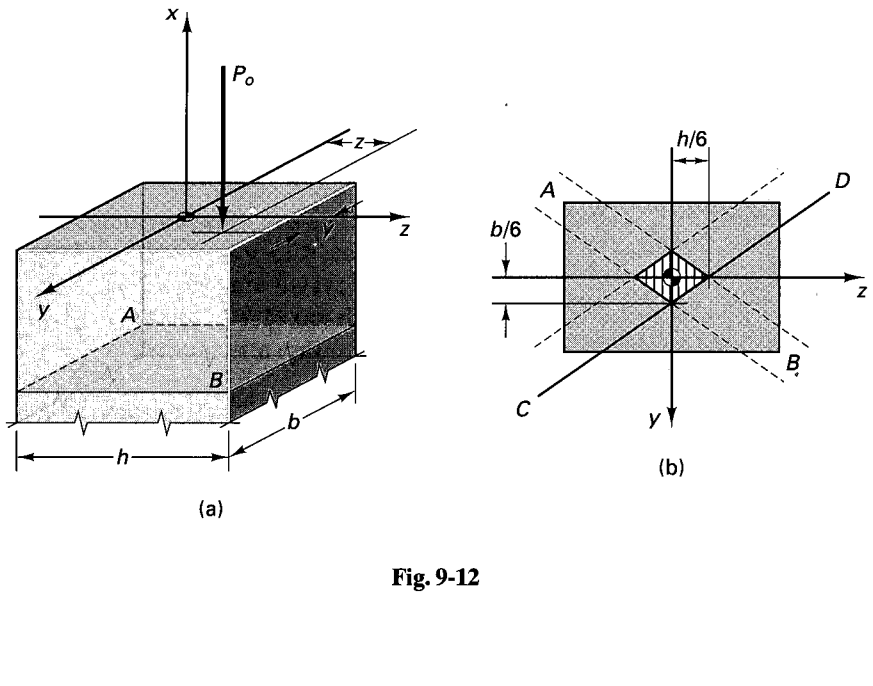
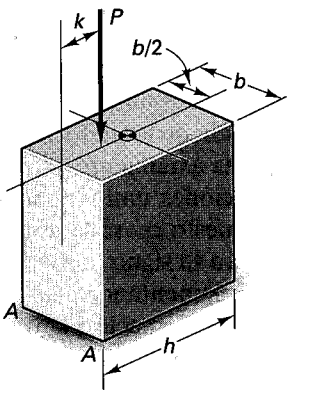


Fig. 9-12

que es una ecuación de una línea recta. Ella muestra que, cuando $z = 0$, $y = b/6$; y cuando $y = 0$, $z = h/6$. Por lo tanto, esta línea puede representarse por la línea CD en la figura 9-12(b). Una fuerza vertical puede ser aplicada al bloque en cualquier parte de esta línea y el esfuerzo en A será cero. Líneas similares pueden establecerse para las otras tres esquinas de la sección; esas se muestran en la figura 9-12(b). Si la fuerza P se aplica sobre cualquiera de esas líneas o sobre cualquier línea paralela a tal línea hacia el centroide de la sección, no habrá esfuerzo de tensión en la esquina correspondiente. Por lo tanto, la fuerza P puede aplicarse en cualquier parte dentro del área rayada en la figura 9-12(b) sin causar esfuerzos de tensión en ninguna de las cuatro esquinas o en ninguna otra parte. Esta zona del área transversal se llama *núcleo central* de la sección. Limitando la posible posición de la fuerza a las líneas de simetría de la sección transversal rectangular, los resultados encontrados en este ejemplo verifican la regla del "tercio medio" vista en el ejemplo 9-4.

Ejemplo 9-7

Considere un bloque rígido "sin peso" que descansa sobre una cimentación linealmente elástica no capaz de transmitir esfuerzos de tensión, como se muestra en la figura 9-13(a). Determine la distribución de esfuerzos en la cimentación cuando la fuerza aplicada P se coloca en una posición tal que parte del bloque se levanta.



(a)

SOLUCIÓN

Suponga que sólo una porción AB de la cimentación de longitud x y ancho b es efectiva para resistir la fuerza aplicada P. Esto corresponde al área sombreada en la figura 9-13(c). El esfuerzo a lo largo de la línea B-B es cero por definición. Por consiguiente, puede escribirse la siguiente ecuación para el esfuerzo en B:

$$\sigma_B = -\frac{P}{xb} + P\left(\frac{x}{2} - k\right)\frac{6}{bx^2} = 0$$

donde $x/2 - k$ es la excentricidad de la fuerza aplicada con respecto al eje centroidal del área sombreada de contacto y $bx^2/6$ es su módulo de sección. Despejando x, se encuentra que $x = 3k$ y que la distribución de la presión será "triangular", como se muestra en la figura 9-13(b) (¿por qué?) Cuando k decrece, la intensidad de la presión sobre la línea A-A aumenta; cuando k es cero, el bloque se vuelve inestable.

Problemas como este surgen, por ejemplo, en el diseño de cimentaciones para chimeneas, ya que no pueden desarrollarse esfuerzos de tensión en la superficie de contacto de una base de concreto con el suelo. Problemas similares surgen en las cimentaciones para maquinaria pesada. Razonamientos similares pueden aplicarse cuando varias fuerzas actúan sobre un miembro y el área de contacto tiene cualquier forma.

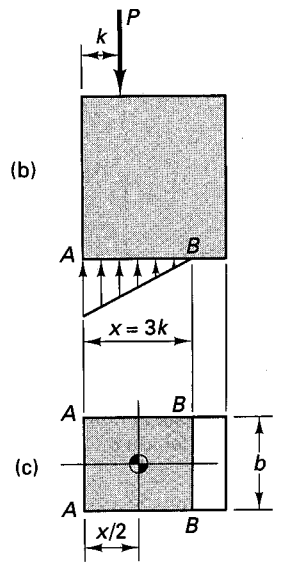


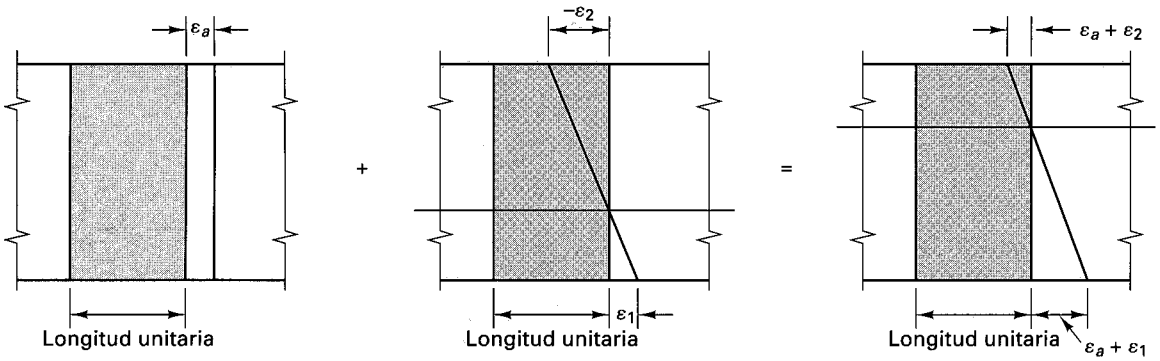
Fig. 9-13 Esfuerzos entre dos superficies en contacto que no transmiten fuerzas de tensión.

9-4. Flexión inelástica con cargas axiales

En la sección 8-8 se indicó que la hipótesis cinemática básica de que las secciones planas tomadas normalmente al eje de una viga permanecen planas cuando la viga se flexiona, permanece válida aun si el material se comporta inelásticamente. Similarmente, las secciones planas perpendiculares al eje de la viga se mueven a lo largo de éste paralelamente a sí mismas cuando un miembro inelástico es cargado axialmente. Para pequeñas deformaciones, las *deformaciones unitarias normales* correspondientes a esas acciones pueden *superponerse*. Como resultado de tal superposición, puede formularse un plano definido por la ecuación 9-14. Tal análisis general de las vigas inelásticas es algo engorroso y no se considerará en este texto.[1] Aquí nos limitaremos al caso plano.

La superposición de las deformaciones unitarias para un miembro plano sometido simultáneamente a una fuerza axial P y a un momento flexionante M se muestra esquemáticamente en la figura 9-14. Por claridad, las deformaciones unitarias se muestran muy exageradas en su tamaño. La superposición de las deformaciones unitarias debido a P y M mueve una sección plana axialmente y la gira como se muestra. Si la fuerza axial P causa deformaciones unitarias mayores que cualquier deformación unitaria de signo opuesto causada por M, las deformaciones unitarias combinadas no cambiarán su signo dentro de una sección.

Complementando esas hipótesis cinemáticas básicas con las relaciones esfuerzo-deformación unitaria y con las condiciones de equilibrio, pueden resolverse problemas elásticos o inelásticos. Sin embargo, es importante notar que *la superposición de los esfuerzos es aplicable sólo en problemas elásticos donde las deformaciones son pequeñas.*



(a) Deformación unitaria axial debido a P

(b) Deformaciones unitarias de flexión debido a M

(c) Deformaciones unitarias combinadas debido a P y M

Fig. 9-14 Superposición de deformaciones unitarias.

[1] M. S. Aghbabian y E. P. Popov, "Unsymmetrical bending of rectangular beams beyond the elastic limit", *Proceedings, First U.S. National Congress of Applied Mechanics,* Michigan, Edwards Bros., 1951, págs. 579-584.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra una solución elástica así como una inelástica para un miembro sometido simultáneamente a flexión y fuerzas axiales.

Ejemplo 9-8

Considere una viga rectangular elastoplástica flexionada respecto al eje horizontal y sometida simultáneamente a una fuerza axial de tensión. Determine las magnitudes de las fuerzas axiales y momentos asociados con las distribuciones de esfuerzos mostradas en las figuras 9-15(a), (b) y (e).

SOLUCIÓN

La distribución de esfuerzos mostrada en la figura 9-15(a) corresponde al caso elástico límite en que el esfuerzo máximo está en el punto de fluencia inminente. Para este caso, el enfoque de superposición de esfuerzos puede usarse. Por lo tanto,

$$\sigma_{máx} = \sigma_{yp} = \frac{P_1}{A} + \frac{M_1 c}{I} \tag{9-9}$$

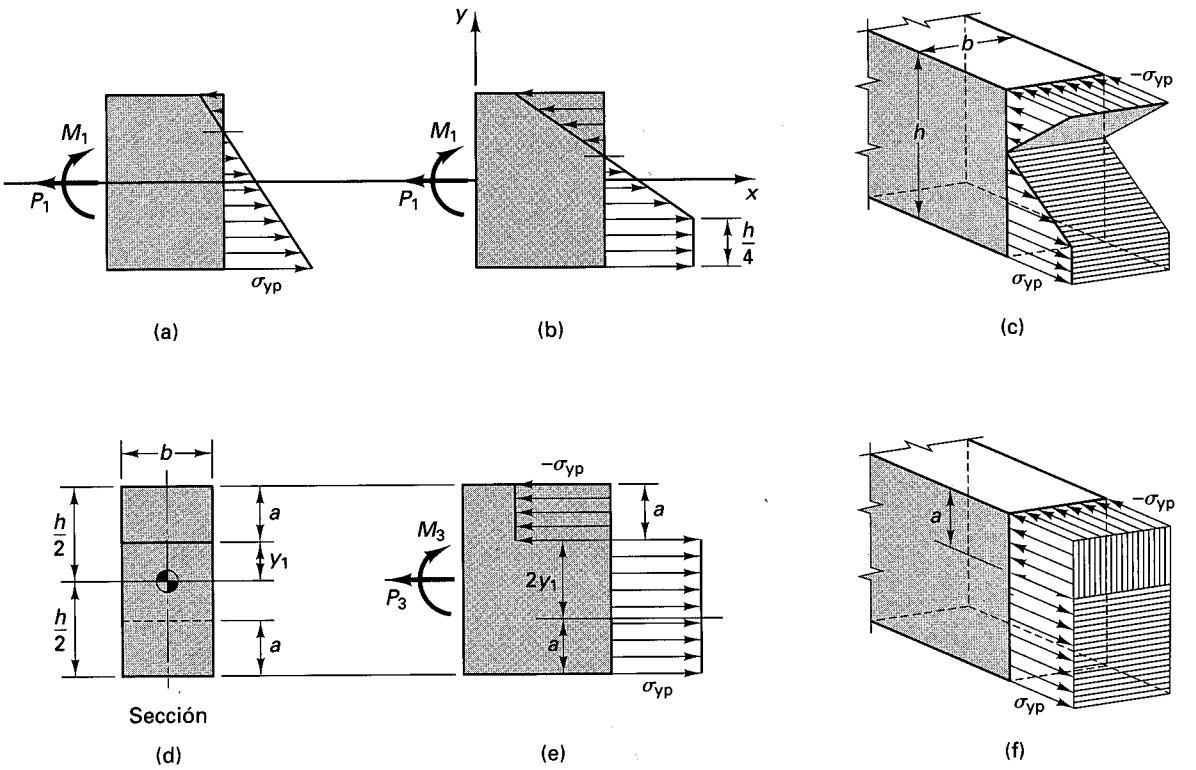


Fig. 9-15 Esfuerzos axial y de flexión combinados: (a) distribución del esfuerzo elástico, (b) y (c) distribución del esfuerzo elastoplástico y (e) y (f) distribución del esfuerzo totalmente plástico.

La fuerza P en la fluencia puede definirse como $P_{yp} = A\sigma_{yp}$; de la ecuación 8-21, el momento en la fluencia es $M_{yp} = (I/c)\sigma_{yp}$. Dividiendo la ecuación 9-9 entre σ_{yp} y sustituyendo las relaciones para P_{yp} y M_{yp} se obtiene, después de simplificar,

$$\frac{P_1}{P_{yp}} + \frac{M_1}{M_{yp}} = 1 \qquad (9\text{-}10)$$

Esto establece una relación entre P_1 y M_1 de modo que el esfuerzo máximo es justo igual a σ_{yp}. Una gráfica de esta ecuación correspondiente al caso de fluencia inminente está representada por una línea recta en la figura 9-16. Gráficas de tales relaciones se llaman *curvas* o *diagramas de interacción*.

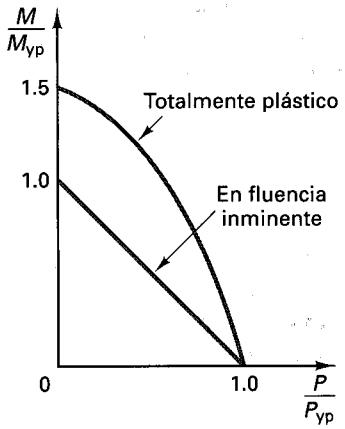


Fig. 9-16 Curvas de interacción para P y M para un miembro rectangular.

La distribución de esfuerzos mostrada en las figuras 9-15(b) y (c) ocurre después que la fluencia ha tenido lugar en el cuarto inferior de la viga. Con esta distribución dada del esfuerzo se pueden determinar directamente las magnitudes de P y M a partir de las condiciones de equilibrio. Si por otra parte, P y M son dados, y como la superposición no se aplica, sería necesario un engorroso proceso para determinar la distribución del esfuerzo.

Para los esfuerzos dados en las figuras 9-15(b) y (c), se aplican simplemente las ecuaciones 8-25 y 8-26 desarrolladas para la flexión inelástica de vigas, excepto que en la ecuación 8-25, la suma de los esfuerzos normales debe ser igual a la fuerza axial P. Notando que en la zona elástica el esfuerzo puede expresarse algebraicamente como $\sigma = \sigma_{yp}/3 - \sigma_{yp}y/(3h/8)$ y que en la zona plástica $\sigma = \sigma_{yp}$, se tiene

$$P_2 = \int_A \sigma dA = \int_{-h/4}^{+h/2} \frac{\sigma_{yp}}{3}\left(1 - \frac{8y}{h}\right)b\,dy + \int_{-h/2}^{-h/4} \sigma_{yp} b\,dy = \sigma_{yp}\frac{bh}{4}$$

$$M_2 = -\int_A \sigma y\,dA = -\int_{-h/4}^{+h/2} \frac{\sigma_{yp}}{3}\left(1 - \frac{8y}{h}\right)yb\,dy - \int_{-h/2}^{-h/4} \sigma_{yp} yb\,dy$$

$$= \frac{3}{16}\sigma_{yp} bh^2$$

Note que la fuerza axial encontrada es igual exactamente a la fuerza que actúa sobre el área plástica de la sección. El momento M_2 es mayor que $M_{yp} = \sigma_{yp}bh^2/6$ y menor que $M_{últ} = M_p = \sigma_{yp}bh^2/4$; véase la ecuación 8-27.

La fuerza axial y el momento correspondientes al caso totalmente plástico mostrado en las figuras 9-15(e) y (f) son simples de determinar. Como puede verse de la figura 9-15(e), la fuerza axial es desarrollada por σ_{yp} actuando sobre el área $2y_1b$. Debido a la simetría, esos esfuerzos no contribuyen al momento. Las fuerzas que actúan sobre las áreas superior e inferior $ab = [(h/2) - y_1]b$, figura 9-15(d), forman un par con brazo de momento $h - a = h/2 + y_1$. Por lo tanto,

$$P_3 = 2y_1 b\sigma_{yp} \quad \text{o} \quad y_1 = P_3/2b\sigma_{yp}$$

y

$$M_3 = ab\sigma_{yp}(h - a) = \sigma_{yp}b(h^2/4 - y_1^2) = M_p - \sigma_{yp}by_1^2$$

$$= \frac{3M_{yp}}{2} - \frac{P_3^2}{4b\sigma_{yp}}$$

Luego, dividiendo entre $M_p = 3M_{yp}/2 = \sigma_{yp}bh^2/4$ y simplificando, se obtiene

$$\frac{2M_3}{3M_{yp}} + \left(\frac{P_3}{P_{yp}}\right)^2 = 1 \qquad (9\text{-}11)$$

Esta es una ecuación general para la curva de interacción para P y M necesaria para alcanzar la condición totalmente plástica en un miembro rectangular (véase la figura 9-16). A diferencia de la ecuación para el caso elástico, esta relación no es lineal.

Parte B VIGAS CON SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA

9-5. Observaciones preliminares

Como se indicó en la introducción, el tratamiento analítico de vigas prismáticas con secciones transversales arbitrarias requiere las ecuaciones básicas para momentos y productos de inercia así como las correspondientes fórmulas para la transferencia de ejes. Además, para el análisis por flexión de tales vigas, debe establecerse la fórmula general de la flexión. Las fórmulas deducidas pueden usarse con un conjunto arbitrario de ejes ortogonales en el plano de la sección transversal o con los ejes principales de inercia.

9-6. Momentos y productos de inercia de superficies

Los momentos de inercia o segundos momentos de un área respecto al eje z ya los encontramos antes en conexión con las secciones transversales simétricas. Este concepto será generalizado aquí para dos ejes ortogonales para cualquier forma de sección transversal. Con las coordenadas yz escogidas como se muestra en la figura 9-17, los momentos y productos de inercia de un área están dados, por definición, por

$$I_z = \int y^2\,dA \qquad I_y = \int z^2\,dA \qquad \text{y} \qquad I_{yz} = \int yz\,dA \qquad (9\text{-}12)$$

Note que esos ejes se escogen pasando por el centroide C del área. El uso de tales ejes *centroidales* es esencial en la solución de problemas de flexión. Es también importante notar que el producto de inercia es nulo para áreas de simetría *doble* o *sencilla*; véase la figura 9-18. Esto puede verse en la figura 9-18(b), donde, debido a la simetría, para cada $y(+z)dA$, hay otra $y(-z)dA$, y su suma se anula.

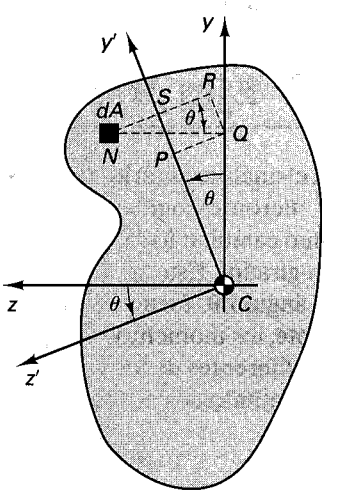


Fig. 9-17 Rotación de los ejes coordenados.

En la sección 8-4 se mostró que al calcular momentos de inercia de secciones transversales simétricas con áreas complejas, es conveniente subdividir tales áreas en partes simples para las cuales se dispone de fórmulas para los momentos de inercia. Entonces, aplicando el teorema de los ejes paralelos a cada parte y sumando, ecuación 8-18a, se obtiene el momento de inercia de toda la sección. Por referencia al caso general mostrado en la figura 9-19, puede concluirse que la fórmula previamente desarrollada, ecuación 8-18, para la transferencia de un momento de inercia de un área, del eje z_c al eje z, sigue siendo aplicable. Además, excepto por un cambio en notación, una fórmula similar es aplicable para transferir un momento de inercia del eje y_c al eje y. Por tanto, se dispone de las siguientes dos fórmulas para la transferencia de ejes de los momentos de inercia:

$$I_z = I_{z_c} + Ad_z^2 \tag{9-13}$$

y

$$I_y = I_{y_c} + Ad_y^2 \tag{9-14}$$

donde I_{z_c} e I_{y_c} son, respectivamente, los momentos de inercia respecto a los ejes z_c y y_c, A es el área considerada y d_z y d_y son, respectivamente, las distancias de C a los ejes z y y.

Comenzando con la definición del producto de inercia, ecuación 9-12, y siguiendo el mismo procedimiento que antes para I_z e I_y, la fórmula de la transferencia de ejes para el producto de inercia, después de simplificaciones, toma la forma

$$I_{yz} = \int (y_c + d_z)(z_c + d_y)\, dA = I_{y_c z_c} + Ad_y d_z \tag{9-15}$$

donde $I_{y_c z_c}$ es el producto de inercia del área A respecto a los ejes centroidales y_c y z_c.

Como se indicó antes, las expresiones respectivas dadas por las ecuaciones 8-18, 9-14 y 9-15 para todas las partes de un área compleja deben sumarse para obtener I_y, I_z e I_{yz} de toda la sección transversal.

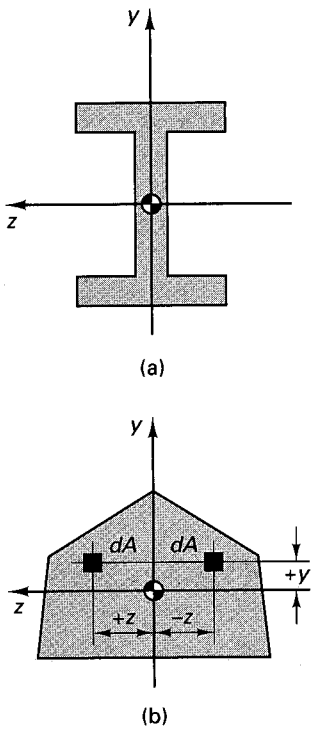


Fig. 9-18 Secciones transversales (a) doblemente simétrica y (b) de simetría simple.

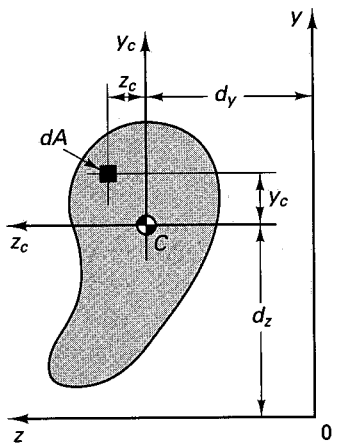


Fig. 9-19 Transferencia paralela de ejes.

9-7. Ejes principales de inercia

En el análisis anterior, los ejes centroidales yz para un área de forma general fueron escogidos arbitrariamente. Por tanto, es importante investigar cómo cambian los momentos y producto de inercia si esos ejes ortogonales son girados. Esto se muestra en la figura 9-17, donde los ejes están girados un ángulo θ, formando un nuevo conjunto de coordenadas yz. Generalmente, los momentos y el producto de inercia correspondientes a esos ejes son diferentes de los valores I_y, I_z e I_{yz}. Para transformar esas cantidades de un conjunto de coordenadas a otro, se ve que

$$y' = CP + PS = y\cos\theta + z\,\text{sen}\,\theta$$

$$z' = NR - RS = z\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces, con base en las definiciones de los momentos y el producto de inercia dados en las ecuaciones 9-12,

$$I_{z'} = \int (y')^2 dA = \int (y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta)^2 \, dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 \, dA + \operatorname{sen}^2\theta \int z^2 \, dA + 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \int yz \, d\theta$$

$$= I_z \cos^2\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta + 2I_{yz} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$= I_z \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + I_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + I_{yz} \operatorname{sen} 2\theta$$

Por tanto, al usar identidades trigonométricas,

$$I_{z'} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{yz} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9\text{-}16)$$

Similarmente,

$$I_{y'} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{yz} \operatorname{sen} 2\theta \qquad (9\text{-}17)$$

y

$$I_{y'z'} = -\frac{I_z - I_y}{2} \operatorname{sen} 2\theta + I_{yz} \cos 2\theta \qquad (9\text{-}18)$$

Estas ecuaciones relacionan los momentos y el producto de inercia de un área (segundos momentos) en los nuevos ejes coordenados yz con los iniciales yz por medio del ángulo θ. Note que $I_{y'} + I_{z'} = I_y + I_z$ (es decir, la suma de los momentos de inercia respecto a dos ejes mutuamente perpendiculares) permanece constante (es decir, *invariable*) independientemente del ángulo θ. Como se indicó antes, el producto de inercia I_{yz} es cero para secciones con simetría doble y simple.

Un valor máximo o mínimo de $I_{z'}$ o $I_{y'}$ puede hallarse diferenciando la ecuación 9-16 o la ecuación 9-17 con respecto a θ y haciendo la derivada igual a cero. Es decir,

$$\frac{dI_{z'}}{d\theta} = -(I_z - I_y) \operatorname{sen} 2\theta + 2I_{yz} \cos 2\theta = 0$$

Por consiguiente,

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} \qquad (9\text{-}19)$$

Esta ecuación da dos raíces separadas entre sí por 180°. Como éstas son para un ángulo doble $2\theta_1$, las raíces para θ_1 están separadas entre sí sólo

90°. Una de esas raíces localiza un eje respecto al cual el momento de inercia es un máximo; la otra localiza el eje conjugado para el momento mínimo de inercia. Esos dos ejes centroidales son los *ejes principales de inercia*. Como puede verse en la ecuación 9-18, los mismos ángulos definen los ejes para los cuales el producto de inercia es cero. Esto significa que *el producto de inercia para los ejes principales es cero*.

Definiendo los senos y cosenos en términos de las raíces del ángulo doble de la ecuación 9-19 (véase la figura 11-5), sustituyendo éstas en la ecuación 9-16 o en la ecuación 9-17 y simplificando, se encuentran expresiones para los *momentos de inercia principales*:

$$I_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = I_1 \text{ o } I_2 = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \qquad (9\text{-}20)$$

donde, por definición, $I_1 = I_{\text{máx}}$ e $I_2 = I_{\text{mín}}$. Los ejes asociados a esos momentos de inercia máximo y mínimo están definidos por la ecuación 9-19. Sustituyendo directamente una de las raíces de esta ecuación en la ecuación 9-16, se puede determinar si la raíz seleccionada da un valor máximo o un valor mínimo del momento de inercia.

Ejemplo 9-9

Para un ángulo con las dimensiones de su sección transversal mostradas en mm en la figura 9-20, encuentre los ejes principales y los momentos principales de inercia.

SOLUCIÓN

Puede verificarse por el procedimiento visto antes que el centroide del área se encuentra a 74.3 mm del fondo y a 24.3 mm del lado izquierdo. Los momentos y el producto de inercia respecto a los ejes y y z pueden calcularse dividiendo el ángulo en dos rectángulos y usando la transferencia de ejes dada en las ecuaciones 8-18, 9-14 y 9-15. Debido a la simetría de los rectángulos en que el ángulo se divide, no hay términos de producto de inercia para esas partes alrededor de sus propios ejes centroidales. Para rectángulos, respecto a sus ejes centroidales, $I = bh^3/12$, ecuación 8-19.

$$I_z = 20 \times 180^3/12 + 20 \times 180 \times (125.7 - 90)^2 + 100 \times 20^3/12 + 100 \times 20 \times (-74.3 + 10)^2 = 22.64 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = 180 \times 20^3/12 + 180 \times 20 \times (24.3 - 10)^2 + 20 \times 100^3/12 + 20 \times 100 \times (-50 + 24.3)^2 = 3.84 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{yz} = 0 + 20 \times 180 \times (125.7 - 90)(24.3 - 10) + 0 + 100 \times 20(-74.3 + 10)(-50 + 24.3) = 5.14 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Sustituyendo esos valores en la ecuación 9-20,

$$I_{\text{máx}} = I_1 = 23.95 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ e } I_{\text{mín}} = I_2 = 2.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

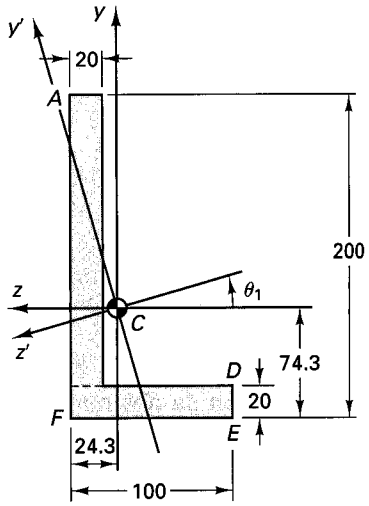


Fig. 9-20

De la ecuación 9-19,

$$\tan 2\theta_1 = \frac{2 \times 5.14 \times 10^6}{(22.64 - 3.84) \times 10^6} = 0.547 \qquad \text{por consiguiente, } \theta_1 = 14.34°$$

De la inspección de la figura 9-20, se ve que este ángulo define un eje para el máximo momento de inercia. Una sustitución de este valor de θ_1 en la ecuación 9-16 puede confirmar esta conclusión. En este caso, $I_{máx}$ está asociado con el eje z' en $\theta_1 = 14.34°$ (es decir, $I_{máx} = I_{z'}$); también, $I_{mín} = I_{y'}$.

9-8. Flexión de vigas con sección transversal arbitraria

Una ecuación general para flexión *pura* de miembros *elásticos* de sección transversal arbitraria cuyos ejes de referencia no son los ejes principales puede formularse usando el mismo enfoque que para secciones transversales simétricas consideradas antes. Nuevamente, se supone que cualquier sección plana tomada normalmente al eje de la viga, permanece plana después que ésta se somete a flexión. Luego se hacen cumplir dos requisitos básicos de equilibrio: (1) la fuerza axial total sobre cualquier sección transversal de una viga debe ser cero y (2) el momento flexionante externo en una sección debe ser desarrollado por los esfuerzos internos que actúan sobre la sección transversal. La ley de Hooke se postula para la deformación unitaria normal uniaxial.

Para deducir la ecuación requerida, consideremos una viga con sección transversal arbitraria como la mostrada en la figura 9-21. La orientación de

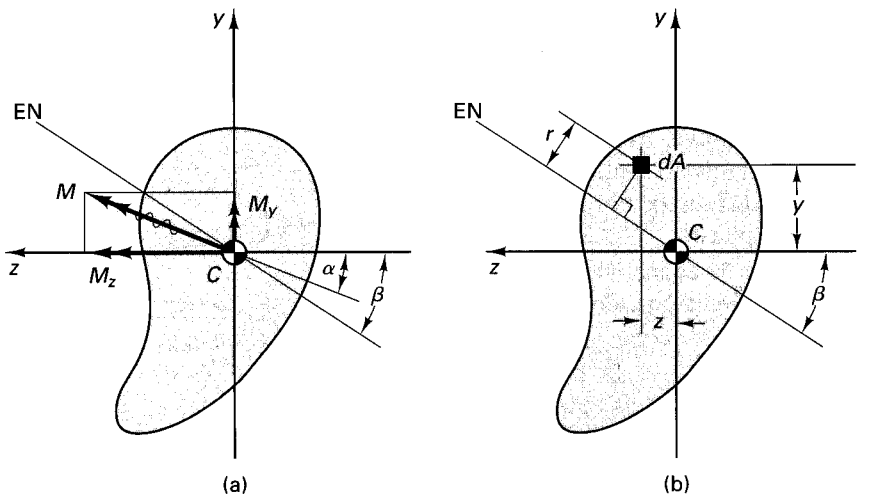


Fig. 9-21 Flexión de una sección transversal asimétrica.

los ejes ortogonales y y z se escoge arbitrariamente. Sea esta viga sometida a un puro momento flexionante M con componentes M_y y M_z, respecto a los ejes y y z, respectivamente; véase la figura 9-21(a).

De acuerdo con la hipótesis fundamental, durante la flexión, una sección *plana* a través de la viga girará e intersectará el plano yz según un ángulo β con el eje z, como se muestra en la figura. Un área genérica infinitesimal dA en el cuadrante positivo de los ejes y y z está localizada por la distancia perpendicular r desde esta línea. Entonces, análogamente a la ecuación 8-3, la deformación unitaria longitudinal normal ϵ_x se supone igual a

$$\varepsilon_x = -\kappa r \tag{9-21}$$

donde, en las coordenadas escogidas,

$$r = y \cos \beta - z \operatorname{sen} \beta \tag{9-22}$$

Entonces, por analogía con la ecuación 8-4, el esfuerzo longitudinal *elástico* σ_x que actúa sobre la sección transversal es

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -E\kappa r \tag{9-23}$$

y, usando la ecuación 9-22, esta relación toma la forma

$$\sigma_x = -E\kappa y \cos \beta + E\kappa z \operatorname{sen} \beta \tag{9-24}$$

donde $\kappa \cos \beta$ es la curvatura proyectada κ_y en el plano xy, como puede verse del caso límite de hacer β igual a cero. Similarmente, $\kappa \operatorname{sen} \beta$ es la curvatura proyectada κ_z en el plano xz. Adoptando esta notación, la ecuación 9-24 puede reescribirse en la forma

$$\sigma_x = -E\kappa_y y + E\kappa_z z \tag{9-25}$$

La diferencia en signos en las dos expresiones del lado derecho de las ecuaciones surge de la convención de signos adoptada y puede aclararse con referencia a la figura 9-22. Puede notarse aquí que una curvatura definida matemáticamente como positiva, que causa un incremento en la pendiente de una viga flexionada con un incremento en la distancia desde el origen, da lugar a dos diferentes casos. En el plano xy, la curvatura positiva y los momentos flexionantes positivos tienen el mismo sentido. Lo opuesto es cierto en el plano xz. Por consiguiente, los esfuerzos normales σ_x debidos a esas dos curvaturas deben ser de signo opuesto.

Con la expresión analítica para σ_x dada por la ecuación 9-25, la condición de que la suma de todas las fuerzas en la dirección x debe ser cero (es decir, $\Sigma F_x = 0$) puede escribirse como

$$\int \sigma_x \, dA = -E\kappa_y \int y \, dA + E\kappa_z \int z \, dA = 0 \tag{9-26}$$

Esta ecuación se satisface idénticamente siempre que los ejes coordenados se tomen con su origen en el *centroide* de la sección transversal. Este resultado fue anticipado y los ejes ortogonales arbitrarios en la figura 9-21 se muestran pasando por el centroide C de la sección transversal.

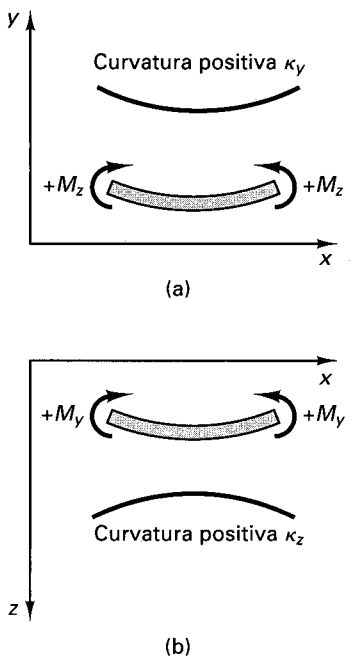


Fig. 9-22 Relaciones entre momentos y curvaturas positivos en los planos xy y xz.

Imponiendo las condiciones de equilibrio por momento en una sección, pueden escribirse dos ecuaciones de componentes de momento que requieran que el momento aplicado externamente respecto a cualquier eje sea equilibrado por el sistema interno de esfuerzos. Una de esas ecuaciones se refiere a los momentos respecto al eje z; la otra, respecto al eje y. Por consiguiente, como se definió previamente, si M_z es la componente de momento aplicada conocida respecto al eje z y M_y es la componente de momento aplicada conocida respecto al eje y, se tienen las dos ecuaciones siguientes (el signo de σ_x en la ecuación 9-28 está invertido respecto al de la ecuación 8-12):

$$M_z = \int -\sigma_x y \, dA = E\kappa_y \int y^2 \, dA - E\kappa_z \int yz \, dA \tag{9-27}$$

y

$$M_y = \int + \sigma_x z \, dA = -E\kappa_y \int yz \, dA + E\kappa_z \int z^2 \, dA \tag{9-28}$$

donde las constantes se sacan de las integrales en las expresiones a la derecha. El significado de esas integrales se vio en la Sección 9-6. De acuerdo con la ecuación 9-12, esas integrales definen los momentos y el producto de inercia para una sección transversal como I_z, I_y e I_{yz}, lo que permite escribir las últimas dos ecuaciones como

$$EI_z\kappa_y - EI_{yz}\kappa_z = M_z \tag{9-29}$$

y

$$-EI_{yz}\kappa_y + EI_y\kappa_z = M_y \tag{9-30}$$

Resolviendo esas dos ecuaciones simultáneamente se obtiene

$$E\kappa_y = \frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{9-31}$$

y

$$E\kappa_z = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \tag{9-32}$$

Sustituyendo esas constantes en la ecuación 9-25, la expresión para el esfuerzo *elástico* σ_x para *cualquier* sección transversal de viga con ejes coordenados ortogonales arbitrariamente dirigidos es

$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \tag{9-33}$$

Esta es la *fórmula generalizada de la flexión*. Si se usan los ejes principales de una sección transversal, donde I_{yz} es cero, esta ecuación se reduce a la ecuación 9-1.

Haciendo la ecuación 9-33 igual a cero, se obtiene el ángulo β que localiza el eje neutro en el sistema coordenado *arbitrario*:

$$\tan \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y I_z + M_z I_{yz}}{M_z I_y + M_y I_{yz}} \tag{9-34}$$

Para ejes principales, esta ecuación se reduce a la ecuación 9-2.

Ejemplo 9-10

Usando la ecuación general para el esfuerzo elástico de flexión, encuentre los esfuerzos en los puntos B y F para el ángulo mostrado, con dimensiones en mm, en la figura 9-23. Muestre que esos esfuerzos son, respectivamente, el mínimo y el máximo. El momento aplicado es $M_z = 10\ \text{kN} \cdot \text{m}$.

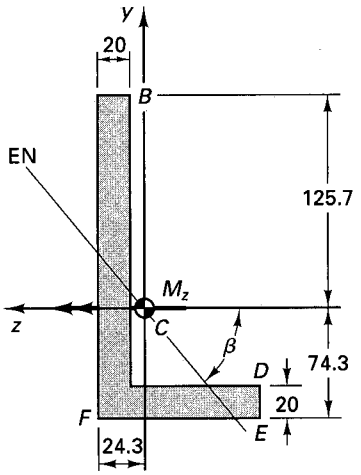


Fig. 9-23

SOLUCIÓN

En el ejemplo 9-9 se encontró que $I_z = 22.64 \times 10^6\ \text{mm}^4$, $I_y = 3.84 \times 10^6\ \text{mm}^4$ e $I_{yz} = 5.14 \times 10^6\ \text{mm}^4$. Sustituyendo esos valores y $M_z = +10\ \text{kN} \cdot \text{m}$ en la ecuación 9-33 y definiendo, respectivamente, las coordenadas de los puntos B y F como $(125.7, 4.3)$ y $(-74.3, 24.3)$ se tiene

$$\sigma_B = -\frac{10 \times 10^6 \times 3.84 \times 10^6}{3.84 \times 22.64 \times 10^{12} - 5.14^2 \times 10^{12}} \times 125.7 + \frac{10 \times 10^6 \times 5.14 \times 10^6}{3.84 \times 22.64 \times 10^{12} - 5.14^2 \times 10^{12}} \times 4.3$$

$$= -0.6345 \times 125.7 + 0.8493 \times 4.3 = -76.1\ \text{MPa}$$

y

$$\sigma_F = -0.6345 \times (-74.3) + 0.8943 \times 24.3 = +67.8\ \text{MPa}$$

Para mostrar que esos esfuerzos son el mínimo y el máximo, respectivamente, localizamos el eje neutro usando la ecuación 9-34,

$$\tan \beta = \frac{10 \times 10^6 \times 5.14 \times 10^6}{10 \times 10^6 \times 3.84 \times 10^6} = 1.34 \quad \text{o} \quad \beta = 53.3°$$

Si dibujamos esta línea sobre la sección transversal dada, es evidente por inspección que las distancias mayores medidas perpendicularmente al eje neutro están asociadas con los puntos B y F. Por lo tanto, los esfuerzos mayores ocurren en esos puntos.

Ejemplo 9-11

Usando los ejes principales, determine los esfuerzos máximos de tensión y compresión causados por un momento flexionante de $10\ \text{kN} \cdot \text{m}$ actuando respecto al eje horizontal, para el perfil angular mostrado con dimensiones en mm en la figura 9-24.

SOLUCIÓN

Es *incorrecto* resolver este problema usando las coordenadas y y z mostradas empleando las fórmulas convencionales de la flexión. Sin embargo, la solución puede obtenerse con tales fórmulas usando los *ejes principales* de

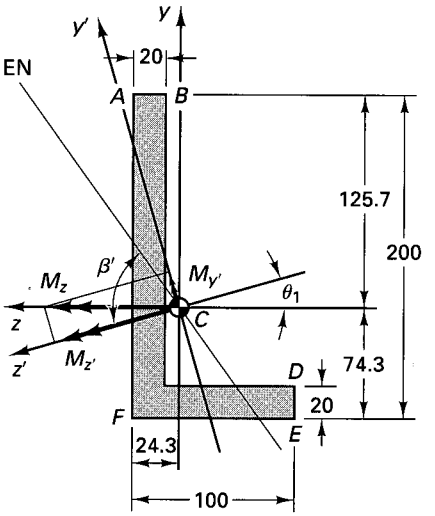


Fig. 9-24

la sección transversal. Éstos se determinaron en el ejemplo 9-9, donde se encontró que los ejes deben girarse en sentido antihorario un ángulo $\theta_1 = 14.34°$ para localizar los ejes principales. Para esos ejes principales, $I_{máx} = I_{z'} = 23.95 \times 10^6$ mm^4 e $I_{mín} = I_{y'} = 2.53 \times 10^6$ mm^4. Con respecto a estos ejes,

$$M_{z'} = +M_z \cos \theta_1 = 10 \times 10^6 \cos 14.34° = 9.689 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_{y'} = +M_z \operatorname{sen} \theta_1 = 10 \times 10^6 \operatorname{sen} 14.34° = 2.475 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Los puntos con mayor esfuerzo sobre la sección transversal son los más alejados del eje neutro. Para localizar este eje, determinamos el ángulo β que está dado por la ecuación 9-3. Por tanto, usando las coordenadas y' y z',

$$\tan \beta' = \frac{I_{z'}}{I_{y'}} \tan \theta_1 = \frac{23.95 \times 10^6}{2.53 \times 10^6} \tan 14.34° = 2.42$$

y $\beta' = 67.5°$. Como este ángulo se mide desde el eje z', él forma un ángulo de $67.5° - 14.3° = 53.2°$ con el eje z. Note la gran inclinación del eje neutro con respecto al eje z, que es mucho mayor que θ_1.

Una vez establecida por inspección la posición del eje neutro, puede verse que el punto con mayor esfuerzo de compresión es el B, mientras que en tensión es el F. Determinando las coordenadas de esos puntos en el sistema coordenado yz de los *ejes principales* y aplicando la ecuación 9-1, se encuentra:

$$y_B' = z_B \operatorname{sen} \theta_1 + y_B \cos \theta_1 = +4.3 \operatorname{sen} \theta_1 + 125.7 \cos \theta_1 = 122.9 \text{ mm}$$

$$z_B' = z_B \cos \theta_1 - y_B \operatorname{sen} \theta_1 = +4.3 \cos \theta_1 - 125.7 \operatorname{sen} \theta_1 = -26.95 \text{ mm}$$

$$\sigma_B = -\frac{M_{z'} y_B'}{I_{z'}} + \frac{M_{y'} z_B'}{I_{y'}}$$

$$= -\frac{9.689 \times 10^6 \times 122.9}{23.95 \times 10^6} + \frac{2.475 \times 10^6 \times (-26.95)}{2.53 \times 10^6}$$

$$= -76.1 \text{ MPa}$$

Similarmente,

$$y_F' = z_F \operatorname{sen} \theta_1 + y_F \cos \theta_1 = 24.3 \operatorname{sen} \theta_1 - 74.3 \cos \theta_1 = -65.97 \text{ mm}$$

$$z_F' = z_F \cos \theta_1 - y_F \operatorname{sen} \theta_1 = 24.3 \cos \theta_1 + 74.3 \operatorname{sen} \theta_1 = +41.93 \text{ mm}$$

$$\sigma_F = -\frac{M_{z'} y_F'}{I_{z'}} + \frac{M_{y'} z_F'}{I_{y'}}$$

$$= -\frac{9.689 \times 10^6 \times (-65.97)}{23.95 \times 10^6} + \frac{2.475 \times 10^6 \times 41.93}{2.53 \times 10^6}$$

$$= +67.7 \text{ MPa}$$

PROBLEMAS

Sección 9-2

9-1. Resuelva el problema 9-1 suponiendo que el claro es de 6000 mm, que la viga es de 150 × 200 mm y que $\alpha = 20°$.

9-2. Una viga de 150 × 200 mm con claro de 6000 mm está cargada en el centro de su claro con una fuerza inclinada de 5 kN a lo largo de la diagonal de la sección transversal, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos máximos de flexión y localice el eje neutro.

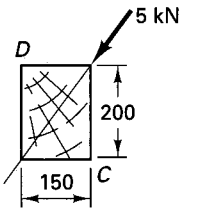


Fig. P9-2

9-3. Una viga en caja hecha de aluminio extruido que tiene una pared de 5 mm de espesor, está cargada por una fuerza inclinada $P = 100$ N, como se muestra en la figura. Determine el esfuerzo máximo en la sección *a-b*. Para la viga en caja, use dimensiones centrales para calcular *I*. (Nótese que el esfuerzo está lejos del soporte, donde son improbables grandes concentraciones locales de esfuerzos.)

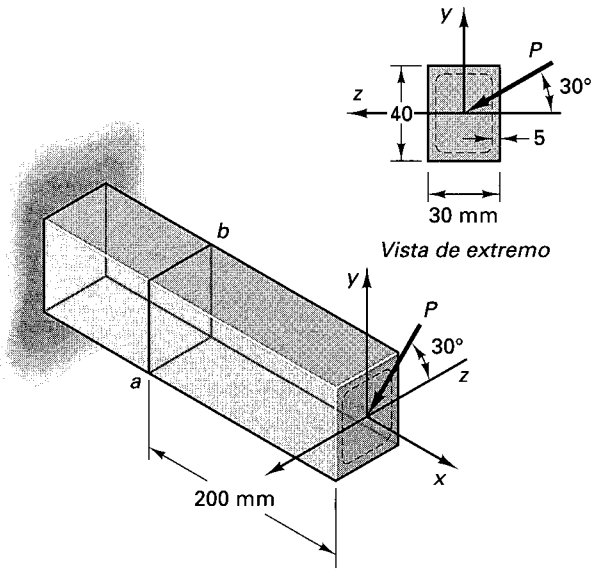


Fig. P9-3

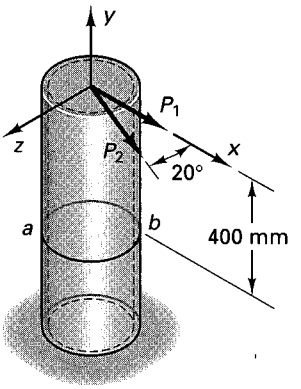


Fig. P9-4

9-4. Un tubo estándar de acero con diámetro nominal exterior de 310 mm (12 in) está sometido a dos fuerzas horizontales, $P_1 = 50$ N y $P_2 = 60$ N. Determine los esfuerzos máximo y mínimo que actúan sobre la sección *a-b*. Consulte en el apéndice 7 las dimensiones del tubo.

9-5. Un tubo estándar de acero con diámetro nominal exterior de 203 mm (8 in) está sometido a una fuerza $P_1 = 20$ N en la dirección *x* y a una fuerza $P_2 = 30$ N en la dirección *z*. Determine el esfuerzo máximo que actúa sobre la sección *a-b*. (Consúltese en el apéndice 7 las dimensiones del tubo.)

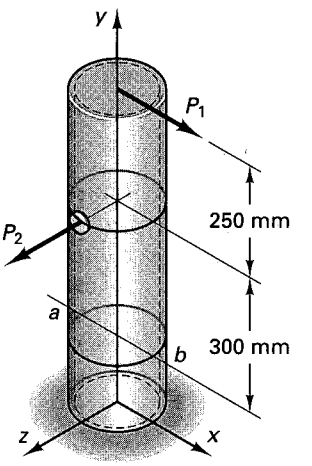


Fig. P9-5

9-6. Un voladizo de 3 m hecho con un perfil de acero S310 × 74 tiene su alma en posición vertical, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos de flexión máximos a 1 m desde el soporte causados por la aplicación de la fuerza P inclinada según diversos ángulos que pasa por el centroide de la sección en el extremo libre. Sea α igual a 0°, 1° y 5°.

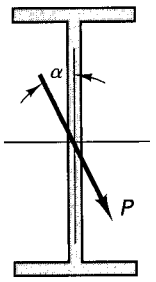


Fig. P9-6

9-7. Una viga con las dimensiones transversales en mm mostrada en la figura está sometida a un momento flexionante de 500 N · m respecto a su eje horizontal. Determine los esfuerzos máximos de flexión.

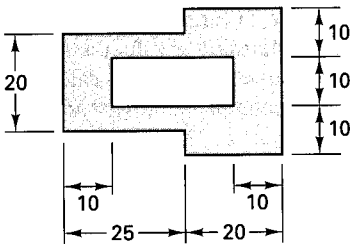


Fig. P9-7

9-8. Una pieza de aluminio extruido de forma cruciforme biaxialmente simétrica tiene las dimensiones transversales, en mm, mostradas en la figura. Se usa en una posición inclinada como viga en voladizo para soportar una fuerza $P = 100$ N en su extremo. (a) Determine el esfuerzo de tensión máximo por flexión a 150 mm desde el extremo cargado del voladizo. Suponga un comportamiento elástico lineal del material. (b) Localice un punto de esfuerzo nulo sobre la línea AB.

9-9. Determine los esfuerzos de flexión en las esquinas del voladizo cargado como se muestra en la figura, en una sección a 600 mm del extremo libre. Localice también el eje neutro.

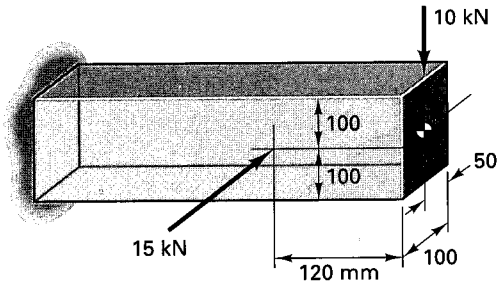


Fig. P9-9

Sección 9-3

9-10. Una viga W250 × 49 de 3 m de longitud está sometida a una fuerza de tensión P de 400 kN, como se muestra en la figura. En los extremos, donde están las conexiones de los pasadores, la viga está reforzada con placas dobles. Determine el esfuerzo máximo en el patín en el centro del miembro causado por las fuerzas aplicadas P. Comente brevemente en forma cualitativa sobre la transmisión de la carga en los extremos. ¿Cuáles son más probablemente las regiones más esforzadas en este miembro?

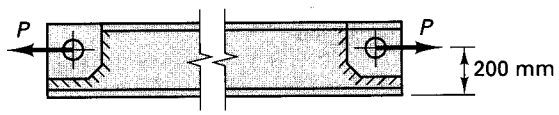


Fig. P9-10

9-11. En el eslabón de máquina mostrado en la figura, determine la excentricidad e tal que los esfuerzos de tensión y compresión en la sección T sean iguales.

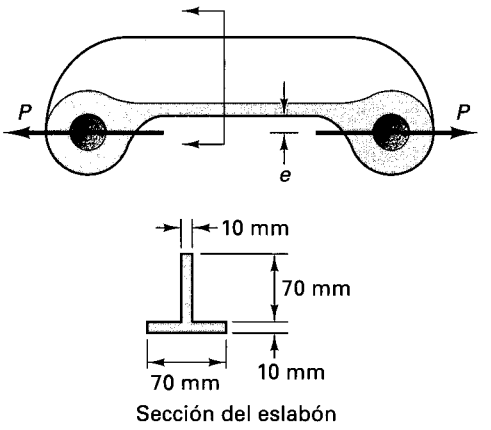


Fig. P9-11

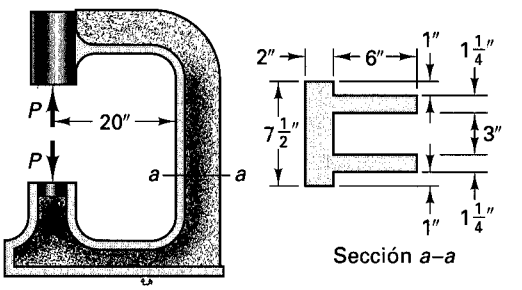


Fig. P9-12

9-12. El marco de una prensa punzonadora tiene las dimensiones mostradas en la figura. ¿Qué fuerza P puede aplicarse a este marco regida por los esfuerzos en las secciones como la a–a si los esfuerzos permisibles son de 4000 psi en tensión y de 12,000 psi en compresión?

9-13. Una fuerza de 198 k se aplica a la barra BC en C, como se muestra en la figura. Encuentre el esfuerzo máximo que actúa normalmente a la sección a-a. El miembro BC está hecho de una pieza de acero de 6 × 6 in. Desprecie el peso de la barra.

9-14. Calcule el esfuerzo máximo de compresión que actúa sobre la sección a-a causado por la carga aplicada en la estructura mostrada en la figura. La sección transversal en a-a es la de una barra maciza circular de 2 in de diámetro.

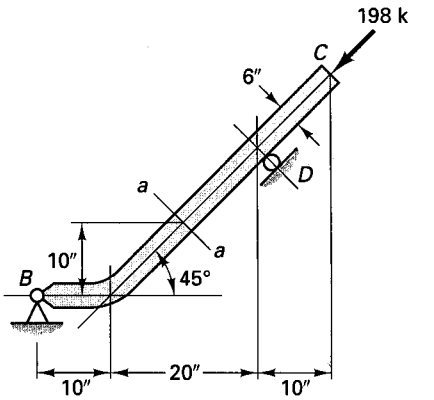


Fig. P9-13

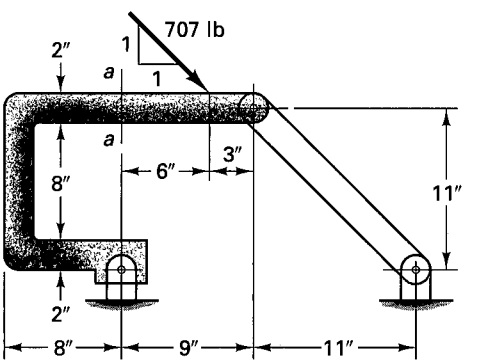


Fig. P9-14

9-15. Calcule el esfuerzo máximo de compresión que actúa normalmente a la sección *a-a* en la estructura mostrada en la figura. El poste *AB* tiene una sección transversal de 12 × 12 in. Desprecie el peso de la estructura.

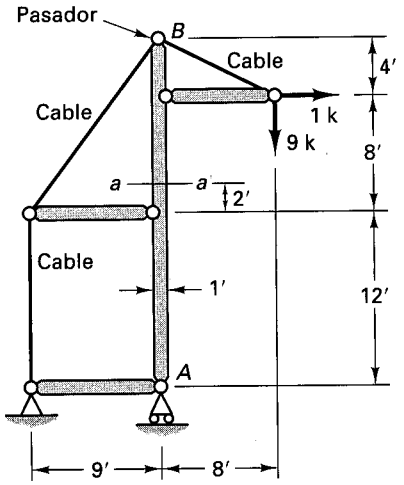
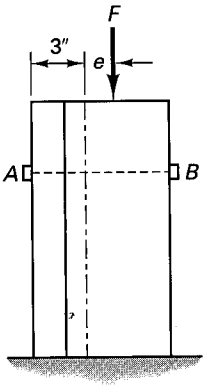


Fig. P9-15



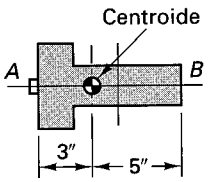


Fig. P9-16

9-16. Para obtener la magnitud de una fuerza F vertical excéntrica que actúa sobre una columna de acero en forma de T, se colocan extensómetros en A y B, como se muestra en la figura. Determine la fuerza F si la deformación unitaria longitudinal en A es -100×10^{-6} in/in y en B es -800×10^{-6} in/in. $E = 30 \times 10^6$ psi y $G = 12 \times 10^6$ psi. El área de la sección transversal de la columna es de 24 in^2.

9-17. Una barra con sección transversal de 100 × 80 mm está sometida a una fuerza F, como se muestra en la figura. Los esfuerzos longitudinales sobre las fibras extremas de dos secciones separadas 200 mm entre sí se determinan experimentalmente y se obtienen los valores $\sigma_A = 0; \sigma_B = -30$ MPa; $\sigma_C = -24$ MPa y $\sigma_D = -6$ MPa. Determine la magnitud de las componentes vertical y horizontal de la fuerza F.

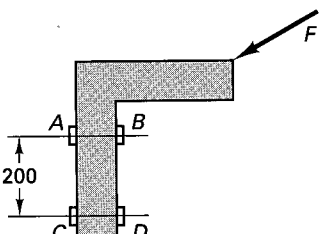


Fig. P9-17

9-18. Un miembro rectangular vertical fijo en la base está cargado como se muestra en la figura. Encuentre la localización de un extensómetro sobre la cara *AB* del miembro tal que no se registre ninguna deformación unitaria longitudinal debido a la aplicación de la fuerza $P = 6$ kN. ¿Depende la respuesta de la magnitud de la fuerza P? Suponga comportamiento elástico. Todas las dimensiones están dadas en mm.

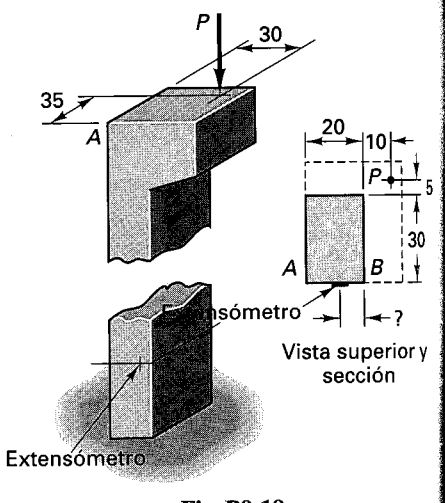


Fig. P9-18

9-19. Una fuerza F inclinada de tensión se aplica a una barra de aluminio aleado de manera que su línea de acción pasa por el centroide de la barra, como se muestra, en mm, en la figura. (No se muestran los detalles de la unión.) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza F si esta causa una deformación unitaria longitudinal de $+20 \times 10^{-6}$ in en el extensómetro en A? Suponga que la barra se comporta como un material linealmente elástico y sea $E = 70$ GPa.

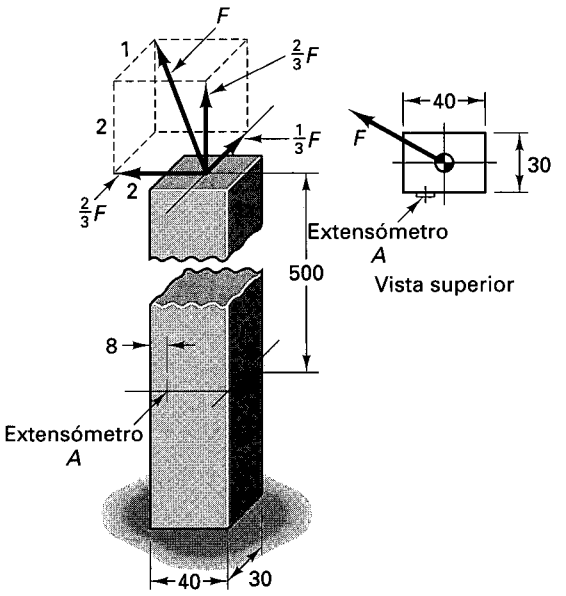


Fig. P9-19

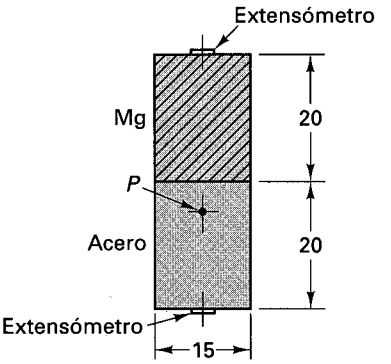


Fig. P9-20

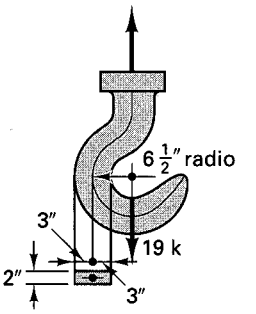
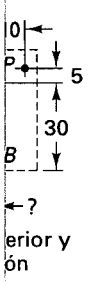


Fig. P9-21

9-20. Una barra de magnesio aleado está unida a una barra de acero del mismo tamaño formando una viga con las dimensiones transversales, en mm, mostradas en la figura. (a) Si al aplicar la fuerza axial excéntrica P el extensómetro longitudinal superior registra una deformación unitaria de compresión de 2×10^{-3} y el inferior una deformación unitaria de tensión de 2×10^{-3}, ¿cuál es la magnitud de la fuerza aplicada P? Suponga comportamiento elástico de los materiales con $E_{Mg} = 45$ GPa y $E_{Ac} = 200$ GPa. (b) ¿Dónde debería aplicarse la fuerza axial P para no tener flexión? (Es interesante notar que esto localiza el eje neutro para esta viga.)

9-21. Un gancho de acero con las dimensiones mostradas en la figura está sometido a una fuerza hacia abajo de 19 k. El radio del eje curvo centroidal es de 6 in. Determine el esfuerzo máximo en este gancho.

9-22. Una barra de acero de 4 mm de diámetro se dobla dándole una forma de anillo circular casi completo de 300 mm de diámetro exterior, como se muestra en la figura. (a) Calcule el esfuerzo máximo en este anillo causado por la aplicación de dos fuerzas de 10 kN en el extremo abierto. (b) Encuentre la razón del esfuerzo máximo encontrado en (a) al esfuerzo de compresión máximo que actúa normalmente a la misma sección.



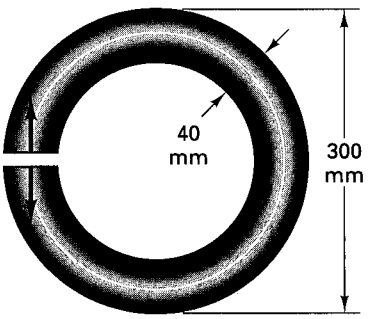


Fig. P9-22

9-23. Un bloque corto tiene las dimensiones transversales en planta que se muestran en la figura. Determine el intervalo a lo largo de la línea *A-A* sobre el cual una fuerza vertical hacia abajo puede aplicarse en la parte superior del bloque sin generar ninguna tensión en la base. Desprecie el peso del bloque.

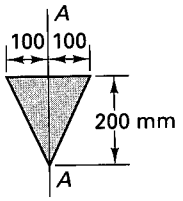


Fig. P9-23

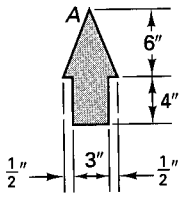


Fig. P9-24

9-24. Se muestra en la figura el área transversal en planta de un bloque corto en forma de una "flecha". Encuentre la posición de la fuerza vertical hacia abajo sobre la línea de simetría de esta sección tal que el esfuerzo en *A* sea justamente cero.

9-25. Determine el núcleo central para un miembro con sección transversal maciza circular.

9-26. ¿Cuál debe ser la altura total *h* de la cortina mostrada en sección transversal para que la presión de la cimentación en *A* sea justamente igual a cero? Suponga que el agua pesa 62.5 lb/ft^3 y el concreto 150 lb/ft^3.

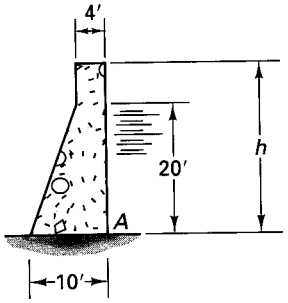


Fig. P9-26

Sección 9-4

9-27. Una viga T de material perfectamente elastoplástico tiene las dimensiones mostradas en la figura. (a) Si la deformación unitaria longitudinal en el fondo del patín es $-\varepsilon_{yp}$ y se sabe que es cero en la unión del alma y el patín, ¿qué fuerza axial *P* y momento flexionante *M* actúan sobre la viga? (b) ¿Cuál es la deformación unitaria después de que las fuerzas aplicadas que generan *P* y *M* en (a) se retiran? Sea $\sigma_{yp} = 200$ MPa.

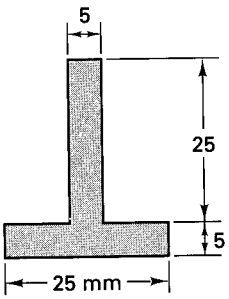


Fig. P9-27

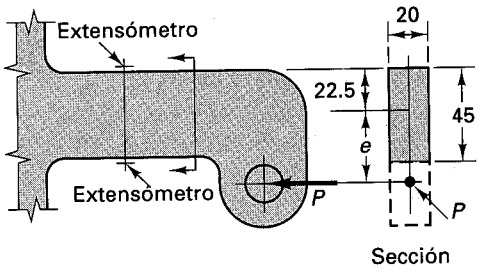


Fig. P9-28

9-28. Una fundición de magnesio aleado tiene las dimensiones dadas en la figura en mm. Durante la aplicación de la fuerza *P*, el extensómetro superior registró una deformación unitaria de tensión de 3×10^{-3} y el inferior registró una deformación unitaria de compresión de 6×10^{-3}. (a) Estime la magnitud de la fuerza aplicada *P* y su excentricidad *e* suponiendo un comportamiento idealizado para el material. Sean $\sigma_{yp} = 135$ MPa y $\varepsilon_{yp} = 3 \times 10^{-3}$. (b) ¿Cuál será la lectura en los extensómetros cuando se retire la fuerza aplicada *P*?

Secciones 9-6 y 9-7

9-29. (a) Encuentre el producto de inercia del área triangular mostrada en la figura con respecto a los ejes dados. (b) Para la misma área, determine el producto de inercia con respecto a los ejes vertical y horizontal que pasan por el centroide.

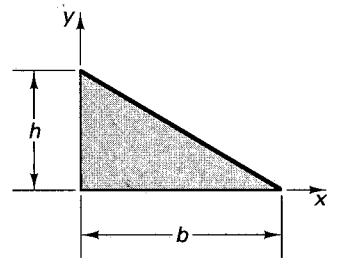


Fig. P9-29

9-30. Idealice la sección transversal de un ángulo de lados iguales de 102 × 102 × 12.7 como se muestra en la figura (es decir, omita el filete y las esquinas redondeadas). (a) Localice el centroide de la sección, (b) calcule I_y, I_z e I_{yz} con respecto a los ejes centroidales, (c) localice los ejes principales y calcule $I_{máx}$ e $I_{mín}$, y (d) verifique los resultados de (c) por inspección y usando la Tabla 6B del apéndice. (Véase la sugerencia en el problema 9–31. *Nota:* En las unidades del sistema inglés, el ángulo tiene las dimensiones 4 × 4 × 1/2 in.)

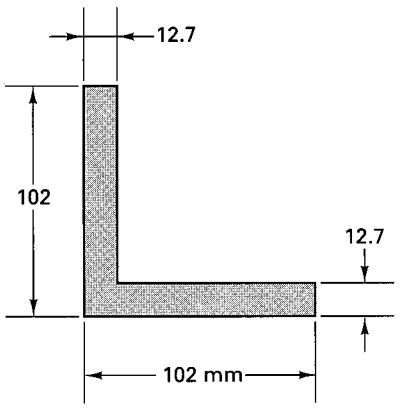


Fig. P9-30

9-31. (a) Encuentre los ejes principales y los momentos de inercia principales para la sección transversal del ángulo mostrado en la figura. (b) Las dimensiones dadas de la sección transversal, excepto por los pequeños radios en los extremos y un filete, corresponden a las dimensiones transversales de un ángulo de 8 × 6 × 1 in dado en la Tabla 7 del apéndice. Usando la información contenida en esa Tabla, calcule los momentos de inercia principales y compárelos con los resultados encontrados en (a). (*Sugerencia*: Note que según la Sección 16-6 y el ejemplo 16-2, = $I_{mín} = Ar^2_{mín}$. La r dada en la Tabla 7 para el eje z es $r_{mín}$. Además, de la condición de invarianza, $I_{mín} + I_{máx} = I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$; por tanto, puede despejarse fácilmente la $I_{máx.}$)

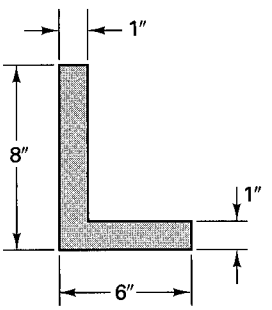


Fig. P9-31

9-32. Para la sección transversal Z mostrada en la figura, determine primero los momentos de inercia I_y, I_z e I_{yz}; luego obtenga las direcciones de los ejes principales y los momentos de inercia principales.

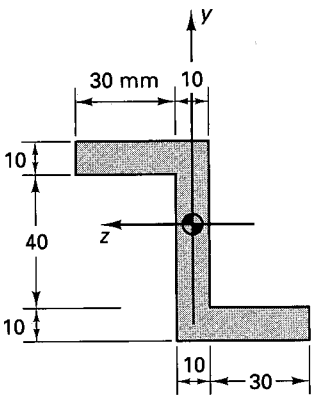


Fig. P9-32

Sección 9-8

9-33. Resuelva el ejemplo 9-10 para un momento aplicado $M_y = 4\ \text{kN} \cdot \text{m}$.

9-34. Un ángulo de lados iguales de $102 \times 102 \times 12.7$ en voladizo de 1000 mm de longitud, está empotrado en un extremo y soporta una fuerza de 200 N en el otro extremo. Determine los esfuerzos máximos en una sección a 800 mm de la fuerza aplicada. (*Nota*: Las propiedades del ángulo se analizaron en el problema 9-30. Como se muestra en la figura 10-24, la carga aplicada no causa torsión en el ángulo.)

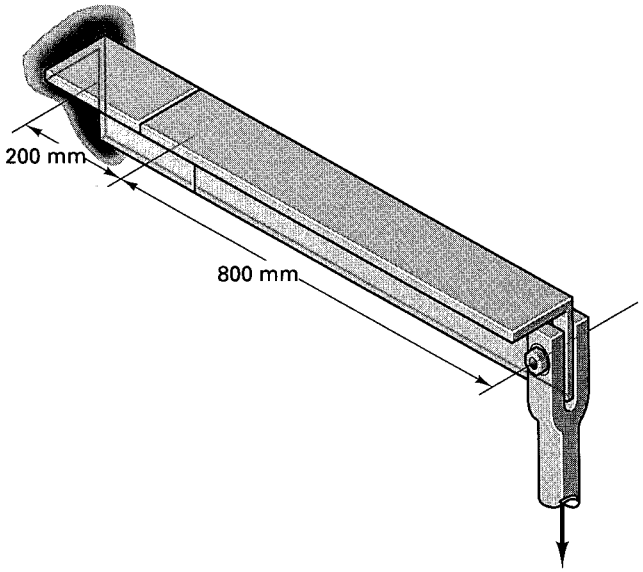


Fig. P9-34

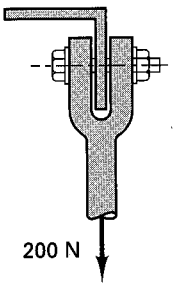


Fig. P9-35

9-35. Para una condición similar a la del problema precedente, resuelva el problema usando el ángulo dado en el problema 9-31 con el lado largo dirigido verticalmente hacia abajo.

10

Esfuerzos cortantes en vigas

10-1. Introducción

Este capítulo está dedicado al estudio de los esfuerzos cortantes en vigas causados por fuerzas cortantes transversales. Es considerado también el problema relacionado con unir partes longitudinales separadas de una viga por medio de tornillos, pegamento o soldadura. Se analiza también la *superposición* de los esfuerzos cortantes directos causados por fuerzas cortantes transversales con los causados por pares de torsión, como sucede en los resortes. Este problema es análogo al encontrado en el capítulo previo en el estudio de vigas sometidas simultáneamente a flexión y fuerzas axiales.

Este capítulo se limita al análisis *elástico*, que es el que más se emplea para la resolución del tipo de problemas considerados.

10-2. Observaciones preliminares

Al deducir las fórmulas de la torsión y de la flexión se usó la misma secuencia de razonamientos. Primero, se supuso una distribución de deformaciones unitarias a través de la sección; luego se introdujeron propiedades del material y se relacionaron las deformaciones unitarias con los esfuerzos; y, finalmente, se usaron las ecuaciones de equilibrio para esta-

blecer las relaciones buscadas. Sin embargo, el desarrollo de la expresión que une la fuerza cortante y el área de la sección transversal de una viga con el esfuerzo sigue un camino diferente. El procedimiento previo no puede emplearse ya que no puede hacerse una simple suposición sobre la distribución de la deformación unitaria debido a la fuerza cortante. En vez de eso, se aplica un enfoque indirecto. *Se supone la distribución del esfuerzo causada por la flexión, según se determinó en los dos capítulos previos, la cual junto con los requisitos de equilibrio, resuelven el problema de los esfuerzos cortantes.*

Primero será necesario recordar que la fuerza cortante está *inseparablemente* unida a un *cambio* del momento flexionante en secciones adyacentes de una viga. Entonces, si una fuerza cortante y un momento flexionante están presentes en una sección de una viga, un momento flexionante *diferente* existirá en una sección adyacente, aunque la fuerza cortante permanezca constante. Esto conduce al establecimiento de los esfuerzos cortantes sobre los planos longitudinales imaginarios que son paralelos al eje del miembro. Entonces, como en un punto existen esfuerzos cortantes iguales sobre planos mutuamente perpendiculares, quedarán determinados los esfuerzos cortantes cuya dirección coincide con la de la fuerza cortante en una sección. Inicialmente se considerarán sólo vigas con secciones transversales simétricas con fuerzas aplicadas en el plano de simetría. Será considerado también el problema relacionado con determinar los requisitos de conexión entre las diversas partes longitudinales de vigas compuestas.

Para tener una mejor idea del problema, recuerde la ecuación 7-4. Escribiéndola en dos formas alternativas, tenemos

$$dM = V\,dx \quad \text{o} \quad \frac{dM}{dx} = V \tag{10-1}$$

La ecuación 10-1 significa que si la fuerza cortante V está actuando en una sección, habrá un *cambio* en el momento flexionante M de una sección adyacente. La *diferencia* entre los momentos flexionantes de secciones adyacentes es igual a $V\,dx$. Si ninguna fuerza cortante está presente, *ningún cambio ocurrirá en el momento flexionante*. Alternativamente, la razón de cambio del momento a lo largo de una viga es igual a la fuerza cortante. Por lo tanto, aunque la fuerza cortante es tratada en este capítulo como una acción independiente, ella está *inseparablemente* ligada al cambio del momento flexionante a lo largo de la longitud de la viga.

Como ejemplo consideremos los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante del ejemplo 7-7, mostrados en la figura 10-1. Aquí, en dos secciones cualquiera como la A y la B tomadas entre las fuerzas aplicadas P, el momento flexionante es el mismo. *Ninguna fuerza cortante* actúa en esas secciones. Por otra parte, entre dos secciones cualquiera como la C y la D cerca del soporte, tiene lugar un cambio en el momento flexionante. En esas secciones actúan fuerzas cortantes, las cuales se muestran actuando sobre un elemento de la viga en la figura 10-1(d). Nótese que en esta zona de la viga, el *cambio* en el momento flexionante en una distancia dx es $P\,dx$, ya que la fuerza cortante V es igual a P. En los análisis subsecuentes, la posibilidad de momentos flexionantes, iguales o diferentes, en dos secciones adyacentes de una viga es de gran importancia.

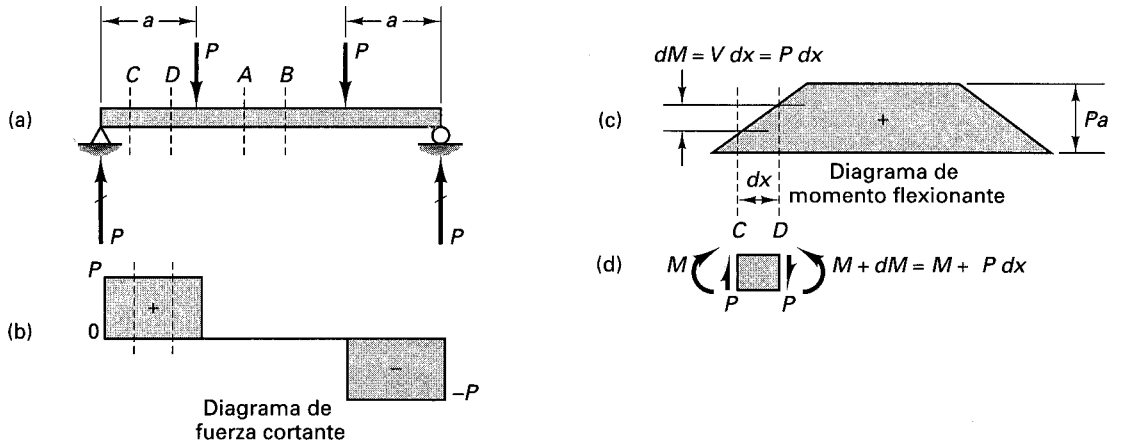


Fig. 10-1 Diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la carga mostrada.

Antes de proceder con un análisis detallado, puede ser conveniente estudiar una secuencia de fotografías de un modelo (figura 10-2). El modelo representa un segmento de una viga I. En la figura 10-2(a) pueden verse, además de la viga misma, bloques que simulan la distribución de esfuerzos causados por momentos flexionantes. Se supone que el momento a la derecha es mayor que a la izquierda. Este sistema de fuerzas está en equilibrio siempre que fuerzas cortantes verticales V (no mostradas en esta vista) actúen también sobre el segmento de viga. Separando el modelo a lo largo de la superficie neutra se obtienen dos partes separadas del segmento de viga, como se muestra en la figura 10-2(b). De nuevo, cualquiera de esas dos partes sola, debe estar en equilibrio.

Si los segmentos superior o inferior de la figura 10-2(b) están conectados por una clavija o un perno en una viga real, las fuerzas axiales en la parte superior o inferior causadas por los esfuerzos de flexión deben mantenerse en equilibrio por una fuerza en la clavija. La fuerza que debe ser resistida puede evaluarse sumando las fuerzas en la dirección axial causadas por los esfuerzos de flexión. Para efectuar tal cálculo, puede usarse tanto la parte superior como la parte inferior del segmento de viga. La fuerza horizontal transmitida por la clavija es la necesaria para equilibrar la fuerza neta causada por los esfuerzos de flexión actuando sobre las dos secciones adyacentes. Alternativamente, pueden obtenerse los mismos resultados restando el mismo esfuerzo de flexión en ambos extremos del segmento. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 10-2(c), donde, suponiendo un momento flexionante cero a la izquierda, sólo los esfuerzos normales debidos al incremento del momento dentro del segmento tienen que mostrarse actuando sobre la derecha

Si inicialmente la viga I considerada es una pieza que no requiere pernos o clavijas, puede usarse un plano longitudinal imaginario para separar el segmento de viga en dos partes; véase la figura 10-2(d). Como antes, puede determinarse la fuerza neta que debe desarrollarse a través del área cortada para mantener el equilibrio. Dividiendo esta fuerza entre el área del corte horizontal imaginario, se obtiene el esfuerzo cortante promedio que

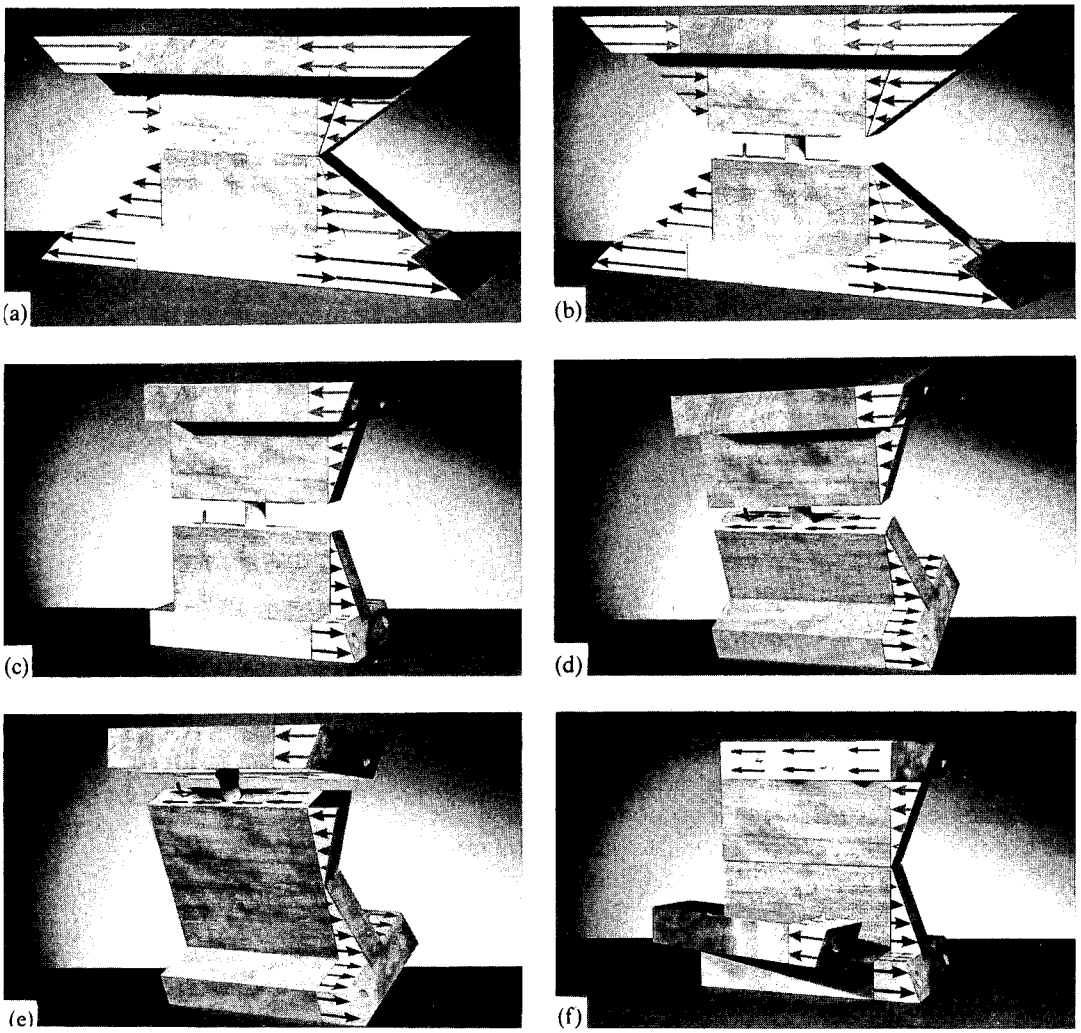


Fig. 10-2 Modelo del flujo cortante en una viga I. (a) Segmento de viga con los esfuerzos de flexión simulados por bloques. (b) Fuerza cortante transmitida por una clavija. (c) Para determinar la fuerza sobre una clavija, sólo se necesita un cambio en el momento. (d) La fuerza cortante longitudinal dividida entre el área del corte imaginario da el esfuerzo cortante. (e) Corte horizontal bajo el patín para determinar el esfuerzo cortante. (f) Corte vertical a través del patín para determinar el esfuerzo cortante.

actúa en este plano. En el análisis es mejor trabajar de nuevo con el cambio en el momento flexionante que con los momentos totales sobre secciones extremas.

Después de encontrados los esfuerzos cortantes sobre uno de los planos [es decir, el horizontal en la figura 10-2(d)], los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares de un elemento infinitesimal, también resultan conocidos ya que deben ser numéricamente iguales; véase la ecuación 1-2. Este enfoque establece los esfuerzos cortantes en el plano de la sección de la viga tomada normalmente a su eje.

El proceso analizado es bastante general; dos ilustraciones adicionales de la separación del segmento de la viga se dan en las figuras 10-2(e) y (f). En la figura 10-2(e), el plano horizontal imaginario separa la viga justo abajo del patín. La parte superior o la inferior de esta viga pueden usarse para calcular los esfuerzos cortantes en el corte. El plano imaginario vertical corta una parte del patín en la figura 10-2(f). Esto permite el cálculo de los esfuerzos cortantes que se encuentran en un plano vertical en la figura.

Antes de proceder finalmente con el desarrollo de ecuaciones para determinar los esfuerzos cortantes en los pernos de conexión y en vigas, vale la pena presentar un ejemplo intuitivo. Consideremos un tablón de madera colocado sobre otro, como se muestra en la figura 10-3. Si esos tablones actúan como una viga y no están interconectados, tendrá lugar un deslizamiento en sus superficies de contacto. La interconexión de esos tablones con clavos o pegamento es necesaria para que actúen como una viga integral. En la siguiente sección se deducirá una ecuación para determinar la interconexión requerida entre las partes componentes de una viga para que trabajen como una unidad. En la siguiente sección, esta ecuación se especializa para dar los esfuerzos cortantes en vigas macizas.

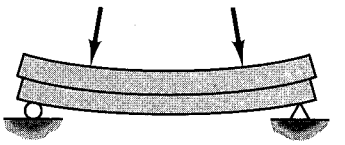


Fig. 10-3 Deslizamiento entre tablones no unidos entre sí.

10-3. Flujo de cortante

Consideremos una viga elástica de varios tablones longitudinales continuos cuyas secciones transversales se muestran en la figura 10-4(a). Por simplicidad, la viga tiene una sección transversal rectangular, pero tal limitación no es necesaria. Para que esta viga trabaje como un miembro integral, se supone que los tablones están sujetos entre sí por medio de pernos verticales. Un elemento de esta viga, aislado por dos secciones paralelas que son ambas perpendiculares al eje de la viga, se muestran en la figura 10-4(b).

Si el elemento mostrado en la figura 10-4(b) está sometido a un momento flexionante $+M_A$ en el extremo A y a $+M_B$ en el extremo B, se desarrollan esfuerzos de flexión que actúan normales a las secciones. Esos esfuerzos de flexión varían linealmente desde sus respectivos ejes neutros, y en cualquier punto a una distancia y del eje neutro son $-M_B y/I$ sobre el extremo B y $-M_A\, Y/I$ sobre el extremo A.

Del elemento de viga, figura 10-4(b), aislamos el tablón superior, como se muestra en la figura 10-4(c). Las fibras de este tablón más cercanas al eje neutro están localizadas por la distancia y_1. Entonces, como el esfuerzo multiplicado por el área es igual a una fuerza, pueden determinarse las fuerzas que actúan perpendicularmente a los extremos A y B de este tablón. En el extremo B, la fuerza que actúa sobre un área infinitesimal dA a una distancia y del eje neutro es $(-M_B y/I)dA$. La fuerza total que actúa sobre el área *fghj*, A_{fghj}, es la suma o la integral de esas fuerzas elementales sobre esta área. Denotando la fuerza total que actúa normalmente al área *fghj* por F_B y recordando que, en la sección B, M_B e I son constantes, se obtiene la siguiente relación:

$$F_B = \int_{\substack{\text{área}\\ fghi}} -\frac{M_B y}{I}\, dA = -\frac{M_B}{I} \int_{\substack{\text{área}\\ fghi}} y\, dA = -\frac{M_B Q}{I} \qquad (10\text{-}2)$$

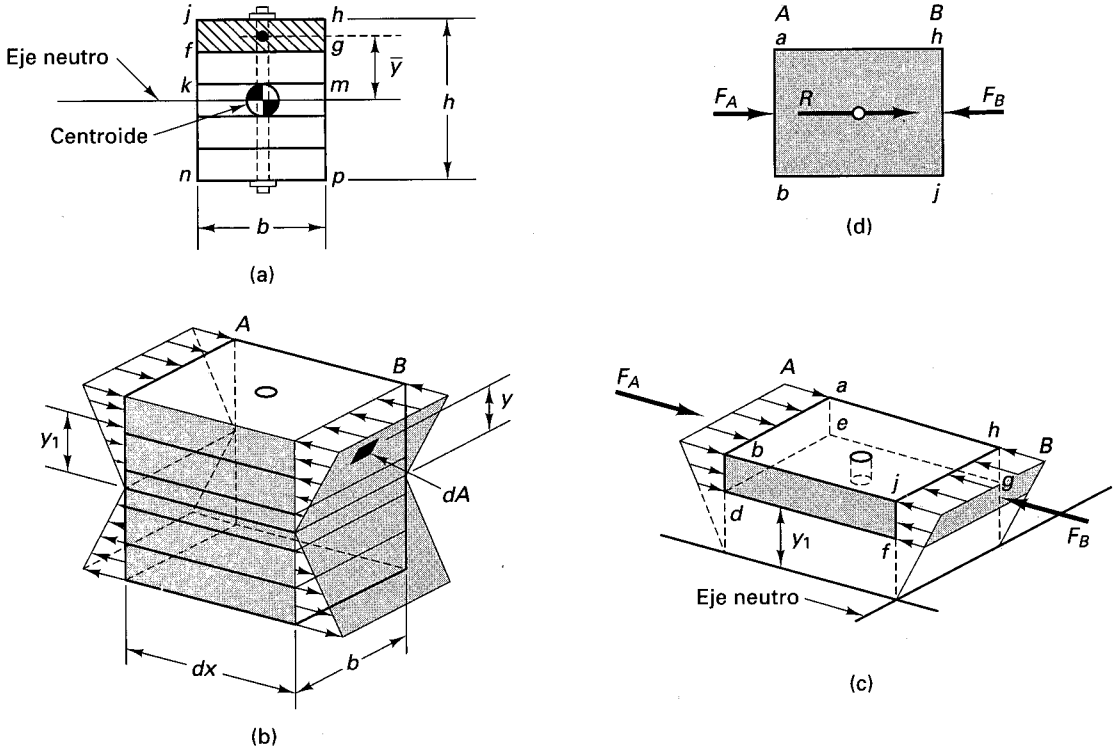


Fig. 10-4 Elementos para obtener el flujo cortante en una viga.

donde

$$Q = \int_{\substack{\text{área} \\ fghj}} y\, dA = A_{fghj}\bar{y} \tag{10-3}$$

La integral que define a Q es el primer momento o momento estático del área *fghj* respecto al eje neutro. Por definición, $\bar{y}$ es la distancia del eje neutro al centroide de A_{fghj}.[1] En la figura 10-5 se ilustra la manera de determinar Q. La ecuación 10-2 proporciona un medio conveniente para calcular la fuerza longitudinal que actúa normalmente a cualquier parte seleccionada del área transversal.

A continuación considere el extremo A del elemento en la figura 10-4(c). Se puede entonces expresar la fuerza total que actúa normalmente al área *abde* como

$$F_A = -\frac{M_A}{I}\int_{\substack{\text{área} \\ abde}} y\, dA = -\frac{M_A Q}{I} \tag{10-4}$$

donde el significado de Q es el mismo que en la ecuación 10-2, ya que para vigas prismáticas, un área como la *fghj* es igual al área *abde*. Por consi-

[1]El área *fgpn* y su $\bar{y}$ pueden también usarse para encontrar $|Q|$.

guiente, si los momentos en A y B fuesen iguales, se tendría $F_A = F_B$, y los pernos mostrados en la figura tendrían la mera función nominal de mantener juntos a los tablones y éstos no tendrían que resistir ninguna fuerza longitudinal conocida.

Por otra parte, si M_A no es igual a M_B, lo que es siempre el caso cuando están presentes fuerzas cortantes en secciones adyacentes, F_A no es igual a F_B. Más empuje (o tirón) se desarrolla sobre un extremo de un "tablón" que sobre el otro, ya que esfuerzos cortantes diferentes actúan sobre la sección desde los dos lados. Entonces, si $M_A \neq M_B$, el equilibrio de las fuerzas horizontales en la figura 10-4(c) puede alcanzarse sólo si se desarrolla una fuerza horizontal resistente R en el perno. Si $M_B > M_A$, entonces $|F_B| > |F_A|$, y $|F_A| + R = |F_B|$, como en la figura 10-4(d). La fuerza $|F_B| - |F_A| = R$ tiende a cortar el perno en el plano del tablón $edfg$.[2] Si la fuerza cortante que actúa en el perno en el nivel km, figura 10-4(a), tuviese que ser determinada, los dos tablones superiores se considerarían como una unidad.

Si $M_A \neq M_B$ y el elemento de la viga tiene sólo dx de longitud, los momentos flexionantes sobre las secciones adyacentes cambian una cantidad infinitesimal. Entonces, si el momento flexionante en A es M_A, el momento flexionante en B es $M_B = M_A + dM$. De igual manera, en la misma distancia dx, las fuerzas longitudinales F_A y F_B cambian en una fuerza infinitesimal dF (es decir, $|F_B| - |F_A| = dF$). Sustituyendo esas relaciones en las expresiones para F_B y F_A encontradas antes, con las áreas $fghj$ y $abde$ tomadas iguales, se obtiene una expresión para el empuje (o tirón) longitudinal diferencial dF:

$$dF = |F_B| - |F_A| = \left(\frac{M_A + dM}{I}\right)Q - \left(\frac{M_A}{I}\right)Q = \frac{dM}{I}Q$$

En la expresión final para dF, los momentos flexionantes reales en las secciones adyacentes son eliminados. Sólo la diferencia en los momentos flexionantes dM en las secciones adyacentes permanece en la ecuación.

En vez de trabajar con una fuerza dF que se desarrolla en una distancia dx, es más conveniente obtener una fuerza similar por unidad de longitud de viga. Esta cantidad se obtiene dividiendo dF entre dx. Físicamente esta cantidad representa la diferencia entre F_B y F_A para un elemento de la viga de longitud unitaria. La cantidad dF/dx se designará por q y se le llama *flujo de cortante*. Como la fuerza se mide en newtons o en libras, el flujo de cortante q tiene unidades de newtons por metro o libras por pulgada. Luego, recordando que $dM/dx = V$, se obtiene la siguiente expresión para el flujo de cortante en vigas:

$$q = \frac{dF}{dx} = \frac{dM}{dx}\frac{1}{I}\int_{\substack{\text{área}\\fghj}} y\,dA = \frac{VA_{fghj}\bar{y}}{I} = \frac{VQ}{I} \qquad (10\text{-}5)$$

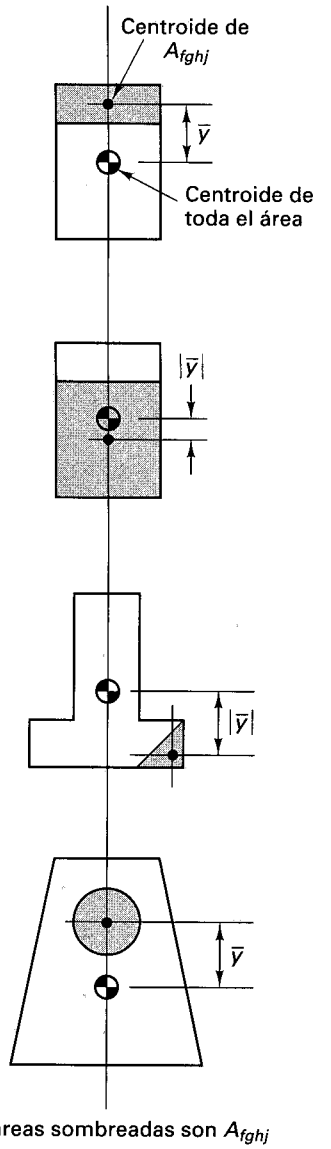


Fig. 10-5 Procedimiento para determinar $|Q|$.

[2]Las fuerzas ($|F_B| - |F_A|$) y R no son colineales, pero el elemento mostrado en la figura 10-4(c) está en equilibrio. Para evitar ambigüedades, las fuerzas cortantes que actúan en los cortes verticales se omiten en el diagrama.

En esta ecuación, I es el momento de inercia de *toda* la sección transversal respecto al eje neutro, igual que en la fórmula de la flexión de la cual se tomó. La fuerza cortante total en la sección investigada se representa por V, y la integral de $y\,dA$ para determinar Q se extiende sólo sobre el área transversal de la viga a un lado del nivel donde q se investiga.

En retrospectiva note cuidadosamente que la ecuación 10-5 *fue deducida con base en la fórmula de la flexión elástica*, pero ningún término de momento flexionante aparece en las expresiones finales. Esto resulta del hecho de que sólo el cambio en los momentos flexionantes en secciones adyacentes tuvo que ser considerado y de que la última cantidad está relacionada con la fuerza cortante V. La fuerza cortante V fue sustituida por dM/dx y esto oculta el origen de las relaciones establecidas. La ecuación 10-5 es muy útil para determinar la interconexión necesaria entre los elementos que constituyen una viga. Esto será ilustrado con ejemplos.

Ejemplo 10-1

Dos tablones largos de madera forman una sección T para una viga, como se muestra, en mm, en la figura 10-6(a). Si esta viga transmite una fuerza cortante vertical constante de 3000 N, encuentre la separación necesaria de los clavos entre los dos tablones para que la viga trabaje como una unidad. Suponga que la fuerza cortante permisible por clavo es de 700 N.

SOLUCIÓN

Al atacar tales problemas, el ingeniero debe preguntarse: ¿Qué parte de una viga tiene la tendencia a deslizarse longitudinalmente respecto a las demás? Aquí esto ocurre en el plano de contacto de los dos tablones; la ecuación 10-5 debe aplicarse para determinar el flujo de cortante en este plano. Para hacerlo así, debe encontrarse el eje neutro de toda la sección y su momento de inercia respecto al eje neutro. Entonces, como V se conoce

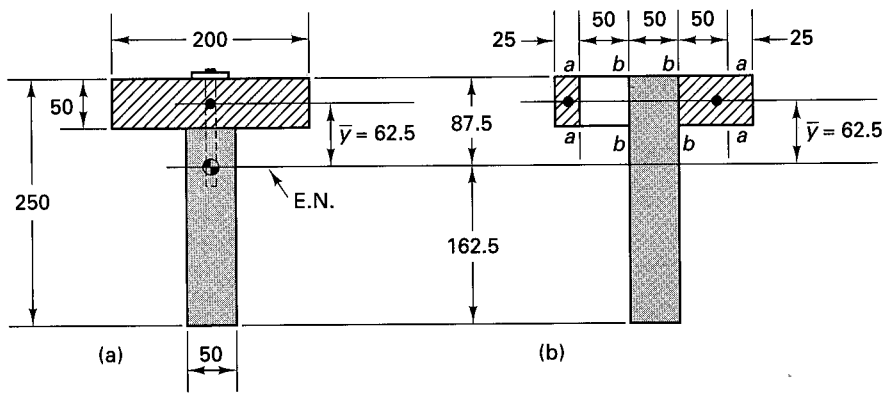


Fig. 10-6

y Q se define como el momento estático del área del tablón superior respecto al eje neutro, q puede ser determinado. La distancia y_c de la parte superior al eje neutro es

$$y_c = \frac{50 \times 200 \times 25 + 50 \times 200 \times 150}{50 \times 200 + 50 \times 200} = 87.5 \text{ mm}$$

$$I = \frac{200 \times 50^3}{12} + 50 \times 200 \times 62.5^2 + \frac{50 \times 200^3}{12} + 50 \times 200 \times 62.5^2$$

$$= 113.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$Q = A_{fghj}\bar{y} = 50 \times 200 \times (87.5 - 25) = 625 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000 \times 625 \times 10^3}{113.54 \times 10^6} = 16.5 \text{ N/mm}$$

Una fuerza de 16.5 N/mm debe entonces transferirse de un tablón al otro a lo largo de la longitud de la viga. Sin embargo, de los datos dados, cada clavo es capaz de resistir una fuerza de 700 N; por consiguiente, un clavo es adecuado para transmitir cortante a lo largo de 700/16.5 = 42 mm de la longitud de la viga. Como la fuerza cortante permanece constante en secciones consecutivas de la viga, los clavos deben espaciarse a intervalos de 42 mm.

SOLUCIÓN PARA UN ARREGLO ALTERNATIVO DE LOS TABLONES Si en vez de usar los dos tablones como antes, se fabrica una viga de la misma sección transversal con cinco piezas como se muestra en la figura 10-6(b), se requerirá un patrón de clavado diferente.

Para comenzar, se determina el flujo de cortante entre uno de los tablones exteriores de 25 × 50 mm y el resto de la viga, y aunque la superficie de contacto *a-a* es vertical, el procedimiento es el mismo. El empuje o tirón sobre un elemento se calcula de la misma manera:

$$Q = A_{fghj}\bar{y} = 25 \times 50 \times 62.5 = 78.1 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000 \times 78.1 \times 10^3}{113.5 \times 10^6} = 2.06 \text{ N/mm}$$

Si se usan los mismos clavos que antes para unir las piezas de 25 × 50 mm a la pieza de 50 × 50 mm, pueden quedar entre sí a una distancia de 700/2.06 = 340 mm. Este clavado se aplica a ambas secciones *a-a*.

Para determinar el flujo de cortante entre la pieza vertical de 50 × 250 mm y cualquiera de las piezas de 50 × 50 mm, debe usarse toda el área de 75 × 50 mm para determinar Q. Es la diferencia de empujes (o tirones) sobre toda esta área lo que causa la fuerza desbalanceada que debe ser transferida en la superficie *b-b*:

$$Q = A_{fghj}\bar{y} = 75 \times 50 \times 62.5 = 234 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{3000 \times 234 \times 10^3}{113.4 \times 10^6} = 6.19 \text{ N/mm}$$

Los clavos deben espaciarse a intervalos de $700/6.19 = 113$ mm a lo largo de la viga en ambas secciones *b-b*. Estos clavos deben insertarse primero y luego colocarse las piezas de 25×50 mm.

Ejemplo 10-2

Una viga con claro de 6 m soporta una carga de 3 kN/m, incluido su peso propio. La sección transversal de la viga estará hecha de varias piezas de madera, como se muestra, en mm, en la figura 10-7(a). Determine la separación de los tornillos de cabeza cuadrada de 10 mm necesaria para unir las partes de esta viga entre sí. Suponga que un tornillo de 10 mm, según estudios de laboratorio, es bueno para transmitir 2 kN de carga lateral paralela al grano de la madera. Para *toda* la sección, I es igual a 2.36×10^9 mm^4.

SOLUCIÓN

Para encontrar la separación entre tornillos de cabeza cuadrada, debe determinarse el flujo de cortante en la sección *a-a*. La carga sobre la viga dada se muestra en la figura 10-7(b) y para mostrar la variación de la fuerza cortante a lo largo de la viga, se construye el diagrama de fuerza cortante en la figura 10-7(c). Luego, para aplicar la fórmula del flujo de cortante, el valor de la integral

$$\int_{\substack{\text{área} \\ fghj}} y\, dA = Q$$

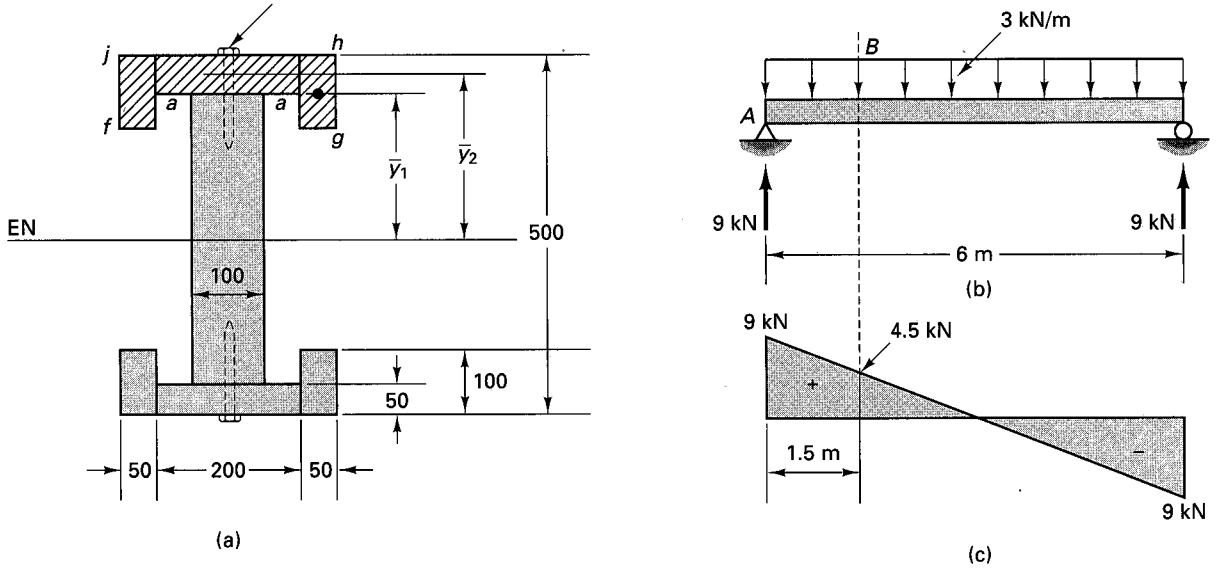


Fig. 10-7

debe ser determinado. Esto se hace considerando el área *rayada* a un lado del corte *a-a* en la figura 10-7(a). El momento estático de esta área se calcula de forma más conveniente multiplicando las áreas de las *dos* piezas de 50×100 mm por las distancias de sus centroides al eje neutro de la viga y sumando a este producto una cantidad similar para la pieza de 50×200 mm. El máximo flujo de cortante ocurre en los soportes, ya que las máximas fuerzas cortantes verticales V de 9 kN actúan ahí:

$$Q = A_{fghj}\bar{y} = 2A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2$$
$$= 2 \times 50 \times 100 \times 200 + 50 \times 200 \times 225 = 4.25 \times 10^6 \text{ mm}^3$$
$$q = \frac{VQ}{I} = \frac{9 \times 4.25 \times 10^9}{2.36 \times 10^9} = 16.2 \text{ N/mm}$$

En los soportes, el espaciamiento de los tornillos debe ser de $2 \times 10^3/16.2 = 123$ mm. Este espaciamiento de los tornillos se aplica sólo en una sección donde la fuerza cortante V es igual a 9 kN. Cálculos similares para una sección donde $V = 4.5$ kN dan $q = 8.1$ N/mm y el espaciamiento resulta de $2 \times 10^3/8.1 = 246$ mm. Así entonces, es apropiado especificar el uso de tornillos de 10 mm a 120 mm entre centros en una distancia de 1.5 m cerca de ambos soportes y a 240 mm entre centros en la parte media de la viga. Un mayor refinamiento al efectuar la transición de un espaciamiento de tornillos al otro puede ser deseable en algunos problemas. El *mismo* espaciamiento de tornillos se usaría en la sección *b-b*, correspondiente al patín inferior, que en la sección *a-a* del superior.

En numerosas aplicaciones prácticas, las vigas se construyen usando pernos o remaches para unir las piezas longitudinales, como se muestra en la figura 10-8(a), o bien soldándolas, como se muestra en la figura 10-8(b). El espaciamiento de los pernos o remaches seleccionados así como el tamaño de las soldaduras se determinan usando procedimientos análogos a los descritos antes. La resistencia de pernos o remaches individuales y soldaduras se vio en la Sección 1-8. Note que los pernos pueden disponerse al tresbolillo a lo largo de la longitud de una viga y que algunos pueden actuar en cortante doble. Las soldaduras pueden ser continuas o intermitentes.

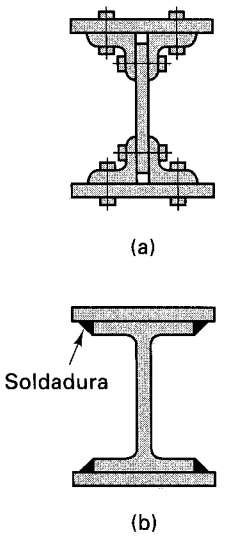


Fig. 10-8 Secciones de viga compuesta: (a) trabe armada, (b) viga I reforzada con placas.

10-4. La fórmula del esfuerzo cortante para vigas

La fórmula del esfuerzo cortante para vigas puede obtenerse modificando la fórmula del flujo de cortante. En forma análoga al procedimiento anterior, un elemento de una viga puede aislarse entre dos secciones adyacentes tomadas perpendicularmente al eje de la viga. Luego, pasando *otra sección longitudinal imaginaria* por este elemento paralelamente al eje de la viga, se obtiene un nuevo elemento, que corresponde al elemento de un "tablón" usado en las deducciones previas. Una vista lateral de tal elemento se muestra en la figura 10-9(a), donde el corte longitudinal imaginario se

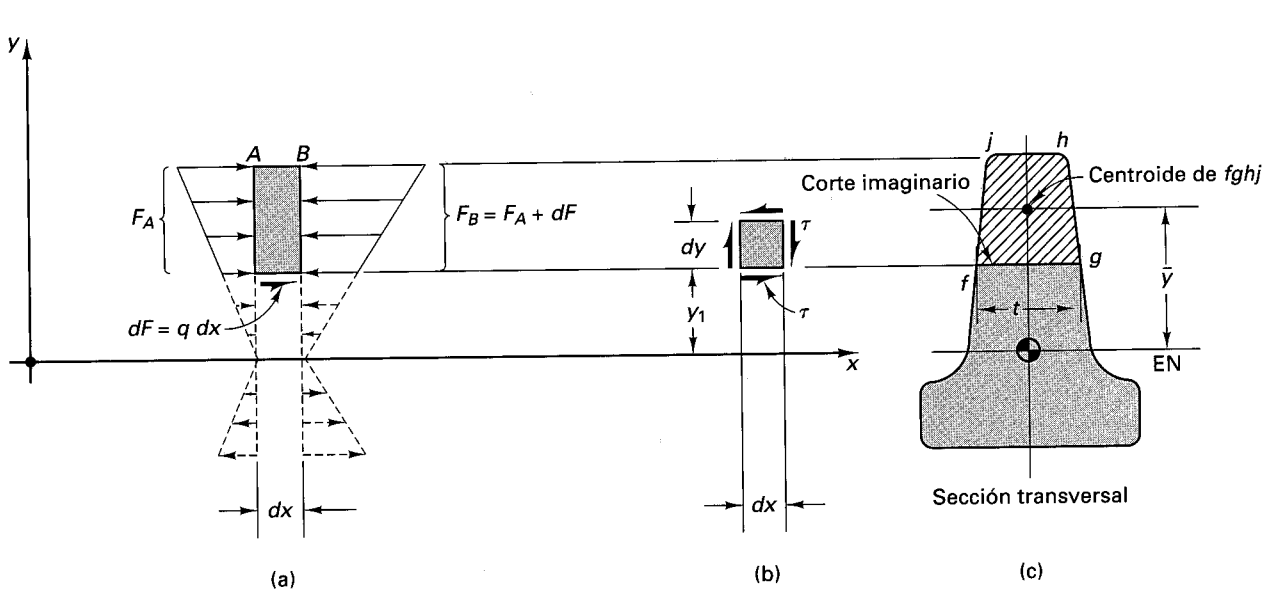


Fig. 10-9 Obtención de los esfuerzos cortantes en una viga.

hace a una distancia y_1 del eje neutro. El área transversal de la viga se muestra en la figura 10-9(c).

Si existen fuerzas cortantes en las secciones por la viga, un momento flexionante diferente actúa en la sección A que en la sección B. Por consiguiente, un mayor empuje o un mayor tirón se desarrolla sobre un lado del *área parcial fghj* que sobre el otro y, como antes, esta fuerza *longitudinal* en una distancia dx es

$$dF = \frac{dM}{I}\int_{\substack{\text{área}\\ fghj}} y\,dA = \frac{dM}{I}A_{fghj}\bar{y} = \frac{dM}{I}Q$$

En una viga *maciza*, la fuerza resistente dF puede desarrollarse sólo *en el plano* del corte longitudinal tomado paralelamente al eje de la viga. Por lo tanto, suponiendo que el esfuerzo cortante τ está *uniformemente distribuido*[3] sobre la sección de ancho t, el esfuerzo cortante en el *plano longitudinal* puede obtenerse dividiendo dF entre el área $t\,dx$. Esto da el esfuerzo cortante horizontal τ. Sin embargo, para un elemento *infinitesimal*, esfuerzos cortantes numéricamente iguales[4] actúan sobre los planos mutuamente perpendiculares; véase la figura 10-9(b). Por consiguiente, la misma rela-

[3]Este procedimiento funciona mejor en situaciones en las que los lados de la sección son paralelos y en las que no hay cambios importantes en la forma de la sección transversal. Con respecto a las limitaciones, véase la Sección 10-6.

[4]Note que el sentido positivo de τ concuerda con el sentido positivo adoptado para la V en vigas en la Sección 7-6.

ción da *simultáneamente* el esfuerzo cortante longitudinal y el esfuerzo cortante *en el plano de la sección vertical en el corte longitudinal*:[5]

$$\tau = \frac{dF}{dx\,t} = \frac{dM}{dx}\frac{A_{fghj}\bar{y}}{It}$$

Esta ecuación puede simplificarse, ya que de acuerdo con la ecuación 10-1, $dM/dx = V$, y por la ecuación 10-5, $q = VQ/I$. Por consiguiente,

$$\tau = \frac{VA_{fghj}\bar{y}}{It} = \frac{VQ}{It} = \frac{q}{t} \qquad (10\text{-}6)$$

La ecuación 10-6 es la importante fórmula para el esfuerzo cortante en una viga.[6] Ella da el esfuerzo cortante *en* el corte longitudinal. Igual que antes, V es la fuerza cortante *total* en una sección e I es el momento de inercia de *toda* el área de la sección transversal respecto al eje neutro. V e I son constantes en una sección de la viga. Q es el momento estático respecto al eje neutro del área *parcial* de la sección transversal situada a un lado del corte longitudinal imaginario, $\bar{y}$ es la distancia del eje neutro de la viga al centroide del área parcial A_{fghj}. Finalmente, t es el ancho del corte longitudinal imaginario, que es usualmente igual al espesor o ancho del miembro. El esfuerzo cortante en cortes longitudinales diferentes toma distintos valores ya que Q y t difieren en tales secciones.

Debe tenerse cuidado al hacer los cortes longitudinales preparatorios para usarlos en la ecuación 10-6. El seccionamiento apropiado de algunas secciones transversales de vigas se muestra en las figuras 10-10(a), (b), (d) y (e). El uso de planos de corte inclinados debe evitarse *a menos* que la sección se haga a través de un espesor pequeño. Cuando el eje de simetría de la sección transversal es vertical y está en el plano de las fuerzas aplicadas, los cortes longitudinales se hacen usualmente en forma horizontal. En tales casos, la solución de la ecuación 10-6 da valores simultáneos de los esfuerzos *horizontales y verticales*, ya que tales planos son mutuamente perpendiculares; véase la ecuación 1-2. Los últimos esfuerzos actúan en el plano de la sección transversal en toda la viga. En conjunto, esos esfuerzos cortantes resisten la fuerza cortante en la misma sección, satisfaciendo así la ecuación de estática $\Sigma F_y = 0$. La validez de esto para un caso especial será demostrada en el ejemplo 10-3.

[5]La presencia de $\bar{y}$ en esta relación puede explicarse en forma diferente. Si la fuerza cortante está presente en una sección de una viga, los momentos en las secciones adyacentes son M y $M + dM$. La magnitud de M no es importante para determinar los esfuerzos cortantes. Por lo tanto, *ningún* momento tiene que ser considerado en una sección *si en la sección adyacente se supone actuando un momento flexionante* dM. Entonces, sobre un área parcial de la sección, como el área sombreada en la figura 10-9(c), este momento flexionante dM causará un *esfuerzo normal promedio* $(dM)\bar{y}/I$, tal como es dado por la fórmula de la flexión. En esta última relación, $\bar{y}$ localiza la fibra que está a una distancia *promedio* del eje neutro en el área *parcial* de una sección. Multiplicar $(dM)\bar{y}/I$ por el área parcial de la sección conduce a la misma expresión para dF que antes.

[6]Esta fórmula fue obtenida por D. I. Jouravsky en 1855. Su desarrollo fue sugerido por la observación de grietas horizontales en durmientes de madera en varios puentes de ferrocarril entre Moscú y San Petersburgo.

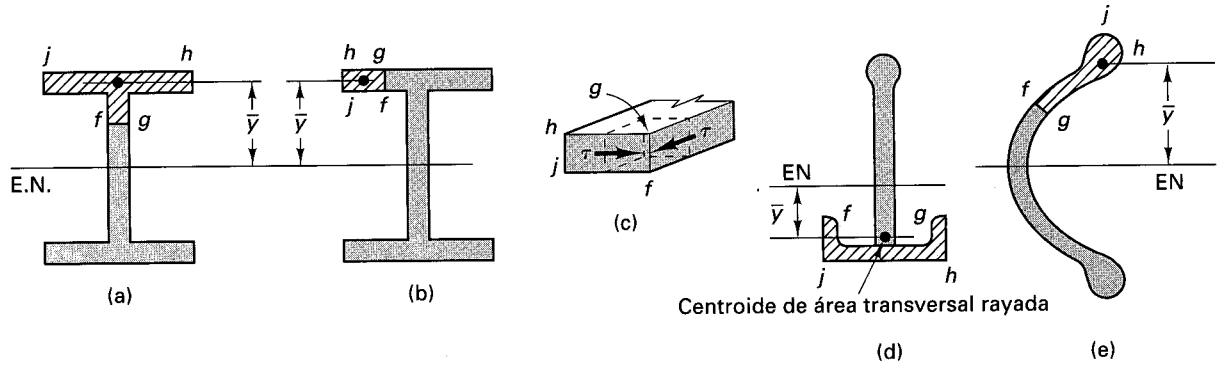


Fig. 10-10 Seccionamiento en áreas parciales de secciones transversales para calcular los esfuerzos cortantes.

Para miembros delgados solamente, la ecuación 10-6 puede usarse para determinar los esfuerzos cortantes con un corte como el *f-g* de la figura 10-10(b). Esos esfuerzos cortantes actúan en un plano vertical y están dirigidos perpendicularmente al plano del papel. Esfuerzos cortantes asociados actúan horizontalmente; véase la figura 10-10(c). Esos esfuerzos cortantes actúan en *direcciones completamente diferentes* a las de los obtenidos haciendo cortes horizontales, como el *f-g* en las figuras 10-10(a) y (d). Como esos esfuerzos cortantes no contribuyen directamente a resistir la fuerza cortante vertical V, su importancia será analizada en la Sección 10-7.

Resumen del procedimiento

Los mismos *tres conceptos básicos* de la mecánica de sólidos antes enunciados, se usan para desarrollar la fórmula de los esfuerzos cortantes en vigas. Sin embargo, su uso es menos directo.

1. Las *condiciones de equilibrio* se usan,
   (a) para determinar la fuerza cortante en una sección,
   (b) usando la relación entre la fuerza cortante y la razón de cambio en el momento flexionante a lo largo de un claro, y
   (c) determinando la fuerza en una sección longitudinal de un elemento de viga para obtener el esfuerzo cortante promedio.
2. La *geometría de la deformación*, como en la flexión pura, se supone tal que las secciones planas permanecen planas después de ocurrida la deformación, de lo que se concluye que las deformaciones unitarias normales en una sección varían linealmente desde el eje neutro. Como, debido al cortante, las secciones transversales no permanecen planas sino que se alabean, esta hipótesis es menos exacta que para la flexión pura. Sin embargo, para magnitudes pequeñas y moderadas del cortante, así como para miembros esbeltos, esta hipótesis es satisfactoria.
3. Las *propiedades de los materiales* se considera que obedecen la ley de Hooke, aunque la extensión a otras relaciones constitutivas es posible para soluciones elementales.

Esas condiciones tratan el problema como unidimensional y la geometría supuesta para la deformación es insensible a los efectos de las fuerzas concentradas y/o cambios en las secciones transversales de vigas. Nuevamente se aplica aquí el *principio de Saint-Venant*. En otras palabras, sólo a distancias mayores que el peralte del miembro desde tales perturbaciones, son exactas las soluciones. Por lo tanto, las soluciones son más adecuadas para miembros esbeltos; véase la sección 10-5. Además, soluciones rigurosas muestran que para secciones longitudinales anchas, las soluciones son algo inexactas debido al complejo alabeo de sus secciones transversales cerca de los lados.

Se da a continuación una aplicación de la ecuación 10-6 para determinar esfuerzos cortantes en una viga rectangular. Con base en los resultados obtenidos en este ejemplo, sigue un análisis general del efecto del cortante sobre el alabeo de secciones inicialmente planas en vigas. Luego se presentan dos ejemplos adicionales sobre la aplicación de la ecuación 10-6.

Ejemplo 10-3

Obtenga una expresión para la distribución del esfuerzo cortante en una viga de sección transversal rectangular maciza que transmite una fuerza cortante V.

SOLUCIÓN

La sección transversal de la viga se muestra en la figura 10-11(a). Un corte longitudinal a través de la viga a una distancia y_1 desde el eje neutro aísla el área parcial *fghj* de la sección transversal. Aquí, $t = b$ y el área infinitesimal de la sección transversal puede expresarse como $b\,dy$. Aplicando la

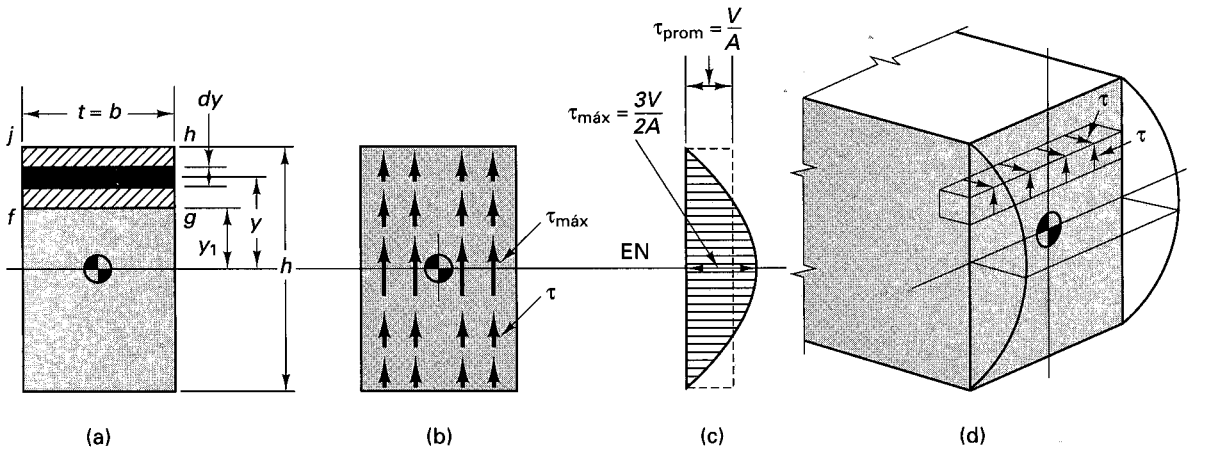


Fig. 10-11

ecuación 10-6 se encuentra el esfuerzo cortante horizontal *en* el nivel y_1 de la viga. *En* el mismo corte, esfuerzos cortantes verticales numéricamente iguales actúan *en el plano de la sección transversal*; véase la ecuación 1-2. Entonces,

$$\tau = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{It}\int_{\substack{\text{area}\\ fghj}} y\,dA = \frac{V}{Ib}\int_{y1}^{h/2} by\,dy$$
$$= \frac{V}{I}\left|\frac{y^2}{2}\right|_{y1}^{h/2} = \frac{V}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y_1^2\right] \tag{10-7}$$

Esta ecuación muestra que en una viga de sección transversal rectangular, tanto los esfuerzos cortantes horizontales como los verticales varían parabólicamente. El valor máximo del esfuerzo cortante se obtiene cuando y_1 es igual a cero. En el *plano de la sección transversal*, figura 10-11(b), éste está representado por $\tau_{máx}$ *en* el eje neutro de la viga. A distancias crecientes desde el eje neutro, los esfuerzos cortantes disminuyen gradualmente. En las fronteras superior e inferior de la viga, los esfuerzos cortantes son nulos ya que $y_1 = \pm h/2$. Esos valores de los esfuerzos cortantes a distintos niveles de la viga pueden representarse por la parábola mostrada en la figura 10-11(c). Una vista isométrica de la viga con esfuerzos cortantes horizontales y verticales se muestra en la figura 10-11(d).

Para satisfacer la condición de estática, $\Sigma F_y = 0$, en una sección de la viga, la suma de todos los esfuerzos cortantes verticales τ multiplicados por sus respectivas áreas dA, debe ser igual a la fuerza cortante vertical V. Que tal es el caso, puede demostrarse integrando $\tau\,dA$ sobre *toda* el área transversal A de la viga, usando la expresión general encontrada para τ previamente:

$$\int_A \tau\,dA = \frac{V}{2I}\int_{-h/2}^{+h/2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)_2^2 - y_1^2\right] b\,dy_1 = \frac{Vb}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 y_1 - \left(\frac{y_1^3}{3}\right)\right]_{-h/2}^{+h/2}$$
$$= \frac{Vb}{2bh^3/12}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 h - \frac{2}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3\right] = V$$

Como la deducción de la ecuación 10-6 fue indirecta, esta prueba de que los esfuerzos cortantes integrados sobre la sección son iguales a la fuerza cortante vertical es reconfortante. Además, como se encuentra una concordancia en los signos, este resultado indica que *la dirección de los esfuerzos cortantes en la sección es la misma que la de la fuerza cortante V*. Esto puede usarse para determinar el sentido de los esfuerzos cortantes.

Como se indicó antes, el esfuerzo cortante máximo en una viga rectangular se presenta en el eje neutro y para este caso, la expresión general para $\tau_{máx}$ puede simplificarse haciendo $y_1 = 0$:

$$\tau_{máx} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{Vh^2}{8bh^3/12} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \tag{10-8a}$$

donde V es la fuerza cortante total y A es el área de *toda* la sección transversal. El mismo resultado puede obtenerse más directamente si se nota que para hacer VQ/It un máximo, Q debe alcanzar su valor máximo, ya que en este caso V, I y t son constantes. De la propiedad de los momentos estáticos de áreas respecto a un eje centroidal, el valor máximo de Q se obtiene considerando la mitad del área transversal respecto al eje neutro de la viga. Por consiguiente,

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V\left(\frac{bh}{2}\right)\left(\frac{h}{4}\right)}{\left(\frac{bh^3}{12}\right)b} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} \qquad (10\text{-}8b)$$

Como las vigas de sección transversal rectangular son usadas frecuentemente en la práctica, la ecuación 10-8b es muy útil. Ella se usa ampliamente en el diseño de vigas de madera ya que la resistencia cortante de la madera sobre planos paralelos al grano es pequeña. Entonces, aunque esfuerzos cortantes iguales existen sobre planos mutuamente perpendiculares, las vigas de madera tienden a rajarse longitudinalmente a lo largo del eje neutro. Nótese que el esfuerzo cortante máximo es $1\frac{1}{2}$ veces tan grande como el *esfuerzo cortante promedio* V/A. Sin embargo, en el análisis de tornillos y remaches, es costumbre determinar las resistencias cortantes dividiendo la fuerza cortante V entre el área A de la sección transversal (véase la Sección 1-8). Tal práctica se considera justificada, ya que las resistencias permisible y última son inicialmente determinadas de esta manera en las pruebas. Por otra parte, en las vigas se aplica generalmente la ecuación 10-6.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Desde el punto de vista de la elasticidad, los esfuerzos y deformaciones unitarias internos en vigas son estáticamente indeterminados. Sin embargo, en la teoría analizada aquí, la introducción de la hipótesis cinemática relativa a las secciones planas cambia esta situación. Aquí, en la ecuación 8-11, se afirma que en una viga, $\sigma_x = -My/I$. Por lo tanto, de las condiciones de que no hay esfuerzo cortante en las fronteras superior e inferior, es decir, que $\tau_{yx} = 0$ en $y = \pm h/2$, se encuentra la constante de integración.

De la ecuación 1-5a, con $-X = 0$,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

Pero

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}$$

Por consiguiente,[7]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial M}{\partial x}\frac{y}{I} = \frac{Vy}{I}$$

[7]En la convención de signos de la teoría de la elasticidad usada aquí, un esfuerzo cortante positivo actúa hacia arriba sobre la cara derecha de un elemento, como se muestra en la figura 1-5. Por analogía, esto requiere que $\partial M/\partial x = -V$.

Entonces,

$$\frac{Vy}{I} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} = 0$$

Integrando, obtenemos

$$\tau_{xy} = -\frac{Vy^2}{2I} + C_1$$

Como

$$\tau_{xy}(\pm h/2) = 0$$

se tiene

$$C_1 = \frac{Vh^2}{8I}$$

y

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{V}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

Esto concuerda con el resultado obtenido antes, ya que aquí $y = y_1$.

10-5. Alabeo de secciones planas debido al cortante

Una solución basada en la teoría matemática de la elasticidad para una viga rectangular sometida simultáneamente a flexión y cortante muestra que las secciones planas perpendiculares al eje de la viga se alabean (es decir, no permanecen planas). Esto también puede concluirse de la ecuación 10-7 obtenida en el ejemplo precedente.

De acuerdo con la ley de Hooke, las deformaciones unitarias cortantes deben estar asociadas con esfuerzos cortantes. Por tanto, los esfuerzos cortantes dados por la ecuación 10-7 dan lugar a deformaciones unitarias cortantes. De acuerdo con esta ecuación, el esfuerzo cortante máximo, y por consiguiente, la deformación unitaria cortante máxima, ocurren en $y = \pm h/2$. Este comportamiento alabea las secciones inicialmente planas de una viga, como se muestra cualitativamente en la figura 10-12, y contradice la hipótesis fundamental de la teoría simplificada de la flexión para flexión pura. Sin embargo, con base en análisis rigurosos, se sabe que el alabeo de las secciones es importante sólo para miembros muy cortos y que es tan pequeño para miembros esbeltos que se puede ignorar. Esto puede ser justificado por los estudios de elemento finito bidimensional en los voladizos rectangulares mostrados en las figuras 10-13 y 10-14. En ambos casos, las vigas están fijas a lo largo de las líneas *AB* en los puntos nodales indicados por puntos en las figuras. Para evitar perturbaciones locales del tipo mostrado antes en la figura 3-10, en cada caso las fuerzas aplicadas *P* están distribuidas parabólicamente según la ecuación 10-7 en los puntos nodales a lo largo de la línea *CD*.

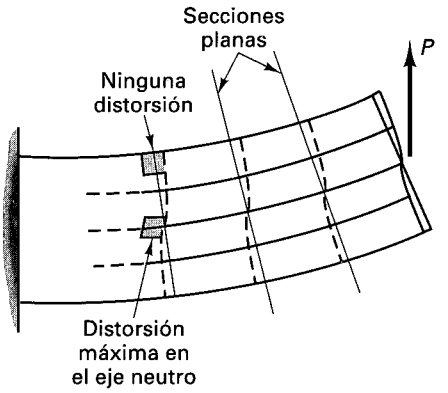


Fig. 10-12 Distorsiones por cortante en una viga.

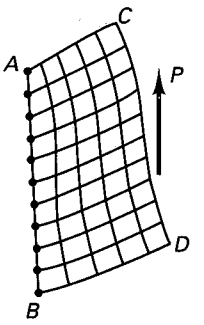


Fig. 10-13 Red deformada para un voladizo corto de una solución por elemento finito.

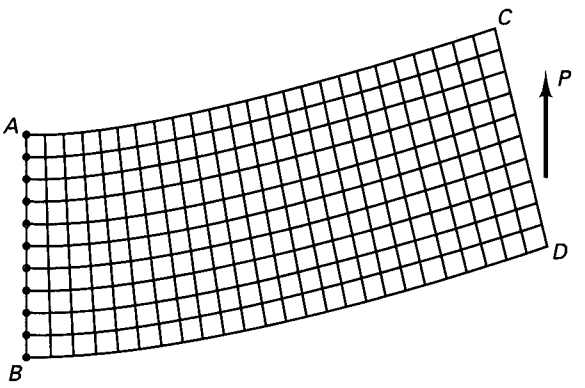


Fig. 10-14 Solución por elemento finito que muestra la deformación de un voladizo moderadamente largo.

Los desplazamientos de los puntos nodales de los elementos para ambas vigas mostradas en las figuras están *dibujados muy exageradamente*. Para los valores numéricos usados, están amplificados por un factor de 3000 en comparación con las dimensiones lineales de los miembros. Un alabeo considerable de las secciones inicialmente planas puede observarse claramente en el voladizo corto en la figura 10-13. En contraste, para el miembro largo en la figura 10-14, el alabeo de las secciones es imperceptible. Este estudio, junto con un examen de los resultados analíticos y las mediciones experimentales en vigas, sugieren que la hipótesis de las "secciones planas" es razonable. Debe notarse también que si la fuerza cortante V a lo largo de la viga es constante y las fronteras no proporcionan restricciones, el alabeo de todas las secciones es el mismo. Por tanto, la dis-

tribución de la deformación unitaria causada por flexión es la misma que en flexión pura. Con base en estas consideraciones puede concluirse que la presencia del cortante en una sección no invalida las expresiones para los esfuerzos de flexión obtenidas antes.

Sin embargo, debe advertirse que ocurren perturbaciones locales en los esfuerzos en los puntos de aplicación de cargas y que entonces el uso de la teoría elástica elemental en vigas cortas es dudoso. (En este momento se recomienda leer la Sección 13-3, en donde se señalan las limitaciones de la teoría de vigas analizada en este texto.)

Ejemplo 10-4

Aplicando la teoría simplificada, determine la distribución del esfuerzo cortante debido a la fuerza cortante V en la zona elastoplástica de una viga rectangular.

SOLUCIÓN

Esta situación ocurre, por ejemplo, en un voladizo cargado como se muestra en la figura 10-15(a). En la zona elastoplástica, el momento flexionante externo es $M = -Px$, mientras que, de acuerdo con la ecuación 8-29, el momento resistente interno es $M = M_p - \sigma_{yp} b y_o^2/3$. Notando que y_o varía con x y diferenciando las ecuaciones anteriores, se tiene la siguiente igualdad:

$$\frac{dM}{dx} = -P = -\frac{2by_o\sigma_{yp}}{3}\frac{dy_o}{dx}$$

Esta relación la necesitaremos después. Sin embargo, primero, procediendo como en el caso elástico, consideremos el equilibrio de un elemento de viga, como se muestra en la figura 10-15(b). Mayores fuerzas longitudina-

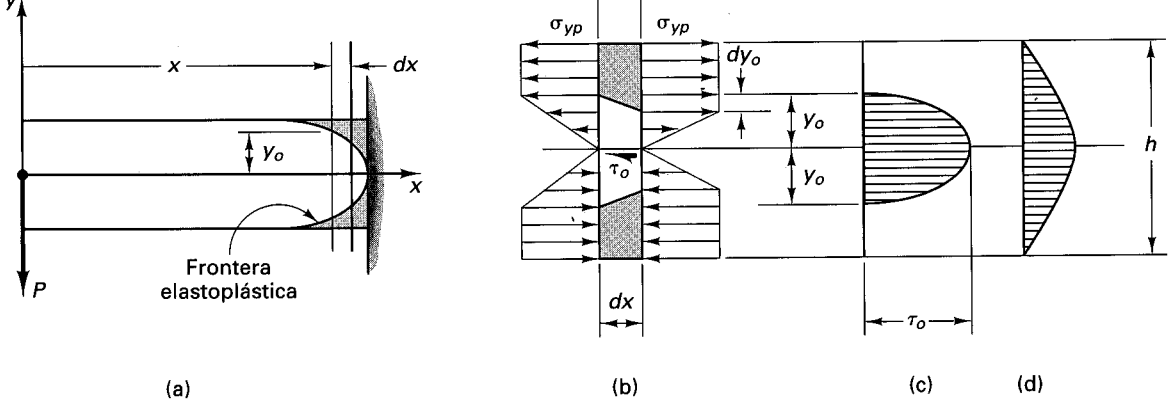


Fig. 10-15 Distribución del esfuerzo cortante en una viga rectangular elastoplástica.

les actúan sobre el lado derecho de este elemento que sobre el izquierdo. Separando la viga en el eje neutro e igualando la fuerza en el corte con la diferencia de las fuerzas longitudinales, obtenemos

$$\tau_o dx\, b = \sigma_{yp} dy_o b/2$$

donde b es el ancho de la viga. Después de sustituir dy_o/dx de la relación encontrada antes y eliminando b, encontramos el esfuerzo cortante horizontal máximo τ_o:

$$\tau_o = \frac{\sigma_{yp}}{2}\frac{dy_o}{dx} = \frac{3P}{4by_o} = \frac{3P}{2A_o} \qquad (10\text{-}9)$$

donde A_o es el área transversal de la parte elástica de la sección transversal. La distribución del esfuerzo cortante para el caso elastoplástico se muestra en la figura 10-15(c). Ésta puede compararse con la del caso elástico, mostrado en la figura 10-15(d). Como esfuerzos normales iguales y opuestos ocurren en las zonas plásticas, no se presenta ningún desbalanceo en las fuerzas longitudinales y no se desarrollan esfuerzos cortantes.

Esta solución elemental ha sido refinada usando un criterio de fluencia más cuidadosamente formulado causado por la acción simultánea de los esfuerzos normales y cortantes.[8]

Ejemplo 10-5

Una viga I está cargada como se muestra en la figura 10-16(a). Si tiene la sección transversal mostrada en la figura 10-16(c), determine los esfuerzos cortantes en los niveles indicados. Desprecie el peso de la viga.

SOLUCIÓN

Del diagrama de cuerpo libre del segmento de viga en la figura 10-16(b), se ve que la fuerza cortante vertical en todas las secciones es de 50 kips. Los momentos flexionantes no entran directamente en el problema presente. El flujo de cortante en los diversos niveles de la viga se calcula en la siguiente tabla usando la ecuación 10-5. Como $\tau = q/t$, de la ecuación 10-6, los esfuerzos cortantes se obtienen dividiendo los flujos de cortante entre los anchos respectivos de la viga:

$$I = 6 \times 12^3/12 - 5.5 \times 11^3/12 = 254\ \text{in}^4$$

Para uso en la ecuación 10-5, $V/I = 50{,}000/254 = 197\ \text{lb/in}^4$. En la siguiente tabla se dan algunos resultados en secciones horizontales seleccionadas:

[8]D. C. Drucker, "The effect of shear on the plastic bending of beams", *J. Appl. Mech.*, **23**, 1956, pp. 509-514.

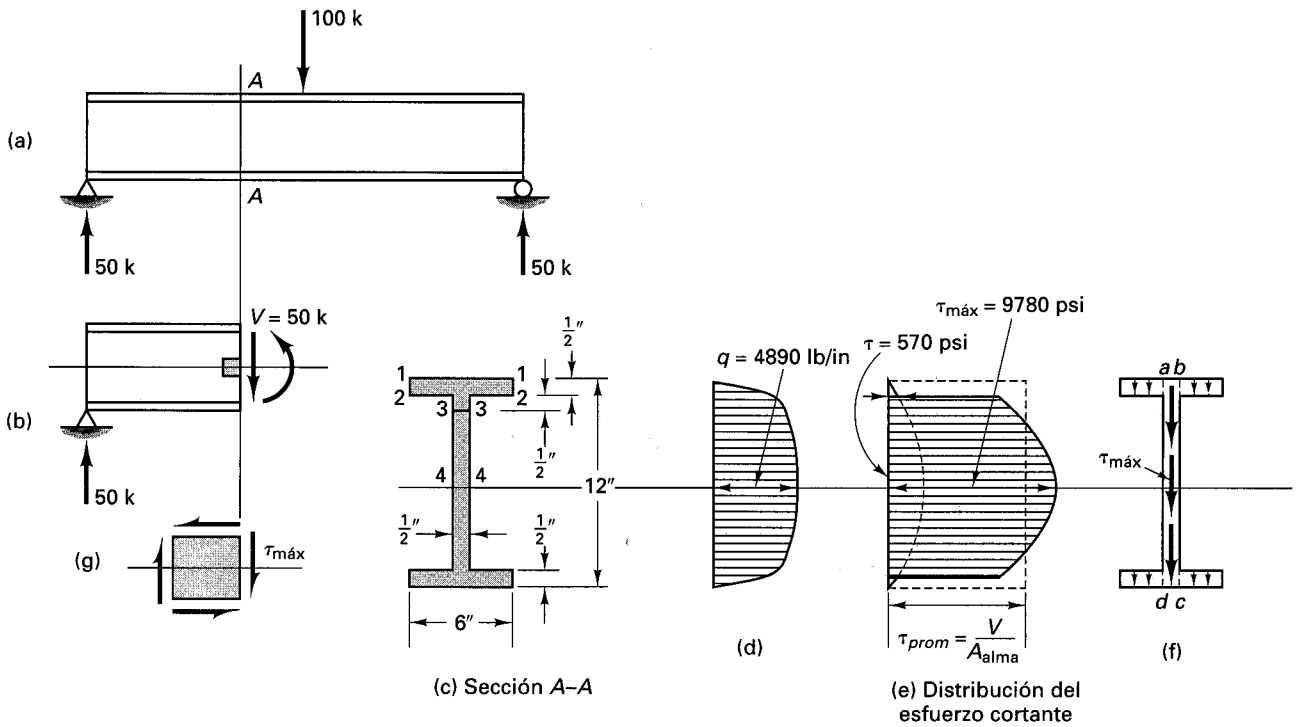


Fig. 10-16

Nivel	A_{fghj}[a]	$\bar{y}$[b]	$Q = A_{fghj}\bar{y}$	$q = VQ/I$	t	τ (psi)
1–1	0	6	0	0	6.0	0
					6.0	570
2–2	$0.5 \times 6 = 3.00$	5.75	17.25	3400	0.5	6800
3–3	$0.5 \times 6 = 3.00$ $0.5 \times 0.5 = 0.25$	5.75 5.25	17.25 1.31 } 18.56	3650	0.5	7300
4–4	$0.5 \times 6 = 3.00$ $0.5 \times 5.5 = 2.75$	5.75 2.75	17.25 7.56 } 24.81	4890	0.5	9780

[a] A_{fghj} es el área parcial de la sección transversal arriba de un cierto nivel en in^2.

[b] $\bar{y}$ es la distancia en mm del eje neutro al centroide del área parcial.

Los signos positivos de τ muestran que, para la sección considerada, los esfuerzos actúan hacia abajo sobre la cara derecha de los elementos. Este sentido de los esfuerzos cortantes coincide con el sentido de la fuerza cortante V. Por esta razón, una adherencia estricta a la convención de signos es a menudo innecesaria. Siempre es cierto que $\int_A \tau\, dA$ es igual a V y tiene el mismo sentido.

Note que en el nivel 2-2, se usan dos anchos para determinar el esfuerzo cortante, uno justo arriba de la línea 2-2 y otro justo abajo. Un ancho de 6 in corresponde al primer caso y 0.5 in al segundo. Este punto de transi-

ción será analizado en la siguiente sección. Los resultados obtenidos, que por virtud de la simetría son también aplicables a la mitad inferior de la sección, están graficados en las figuras 10-16(d) y (e). Por un método similar al usado en el ejemplo anterior, puede demostrarse que las curvas en la figura 10-16(e) son partes de una parábola de segundo grado.

La variación del esfuerzo cortante indicado por la figura 10-16(e) puede interpretarse como se muestra en la figura 10-16(f). El esfuerzo cortante máximo ocurre en el eje neutro y los esfuerzos cortantes verticales sobre el alma de la viga son aproximadamente de la misma magnitud. Los esfuerzos cortantes verticales en los patines son muy pequeños. Por esta razón, el esfuerzo cortante máximo en una viga I es a menudo aproximado dividiendo la fuerza cortante total V entre el área transversal del alma, con la altura del alma supuesta igual a la altura total de la viga, es decir, el área *abcd* en la figura 10-16(f). Por consiguiente,

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{aprox}} = \frac{V}{A_{\text{alma}}} \tag{10-10}$$

En el ejemplo considerado, esto da

$$(\tau_{\text{máx}})_{\text{aprox}} = \frac{50{,}000}{0.5 \times 12} = 8330 \text{ psi}$$

Este esfuerzo difiere en aproximadamente 15% del encontrado con la fórmula exacta. Para la mayoría de las secciones transversales puede encontrarse una mejor aproximación al verdadero esfuerzo cortante máximo dividiendo la fuerza cortante entre el área del alma comprendida sólo entre los patines. Para este ejemplo, este procedimiento da un esfuerzo de 9091 psi, que contiene un error de sólo aproximadamente 8%. Debe ser claro de lo anterior que la división de V entre toda el área de la sección transversal de la viga para obtener el esfuerzo cortante no es permisible.

Un elemento de la viga en el eje neutro se muestra en la figura 10-16(g). En los niveles 3-3 y 2-2, actúan sobre las caras verticales de los elementos esfuerzos de flexión además de los esfuerzos cortantes. Ningún esfuerzo cortante y sólo esfuerzos de flexión actúan sobre los elementos en el nivel 1-1.

Los lados de las secciones transversales se supusieron paralelos en todos los ejemplos precedentes. Si no son paralelos, Q y t varían con el nivel de la sección y el esfuerzo cortante máximo puede no ocurrir al nivel del eje neutro. Sin embargo, usando la ecuación 10-6, el esfuerzo cortante *promedio* máximo siempre puede encontrarse. Por ejemplo, puede demostrarse que para una sección transversal triangular simétrica, tal esfuerzo cortante máximo está a la mitad entre el ápice y la base. Para tales secciones transversales, los esfuerzos varían a través de una sección longitudinal y son particularmente inexactos cerca de los lados inclinados; véase la figura 10-18. Resultados similares pueden desarrollarse en secciones longitudinales tomadas según un ángulo con los ejes.

Los mismos procedimientos que los descritos antes se usan para determinar esfuerzos cortantes longitudinales en vigas compuestas en superficies unidas o pegadas.

10-6. Algunas limitaciones de la fórmula del esfuerzo cortante

La fórmula del esfuerzo cortante para vigas se basa en la fórmula de la flexión. Por consiguiente, todas las limitaciones impuestas a la fórmula de la flexión le son aplicables. El material se supone elástico con el mismo módulo elástico en tensión y en compresión. La teoría desarrollada se aplica sólo a vigas rectas. Además, hay limitaciones adicionales que no están presentes en la fórmula de la flexión. Algunas de esas se analizarán ahora.

Considere una sección a través de la viga I analizada en el ejemplo 10-5. Algunos de los resultados de este análisis están reproducidos en la figura 10-17. Los esfuerzos cortantes calculados antes para el nivel 1-1 son aplicables al elemento infinitesimal *a*. El esfuerzo cortante vertical es cero para este elemento. Igualmente, *ningún* esfuerzo cortante existe *sobre* el plano superior de la viga, ya que la *superficie* superior de la viga es una superficie *libre*. En fraseología matemática, esto significa que las condiciones en la frontera son satisfechas. Para vigas de sección transversal rectangular, la situación en las fronteras es correcta.

Una condición diferente se encuentra cuando se examinan los esfuerzos cortantes determinados para la viga I en los niveles 2-2. Los esfuerzos cortantes fueron de 570 psi para los elementos *b* o *c* mostrados en la figura. Esto requiere esfuerzos cortantes horizontales concordantes sobre las superficies interiores de los patines. Sin embargo, estas superficies *deben estar libres* de esfuerzos cortantes, ya que son *fronteras libres* de la viga. Esto conduce a una contradicción que no puede ser resuelta por los métodos de la mecánica de sólidos. Los procedimientos más avanzados de la teoría matemática de la elasticidad o del análisis tridimensional por elemento finito deben usarse para obtener una solución exacta.

Afortunadamente, el defecto antes mencionado de la fórmula del esfuerzo cortante para vigas no es serio. Los esfuerzos cortantes verticales en los patines son pequeños. Los esfuerzos cortantes grandes ocurren en el alma y, para fines prácticos, están dados correctamente por la ecuación 10-6. *Ningún error apreciable se comete al usar las relaciones obtenidas en este capítulo para miembros de pared delgada* y la mayoría de las vigas pertenecen a este grupo.

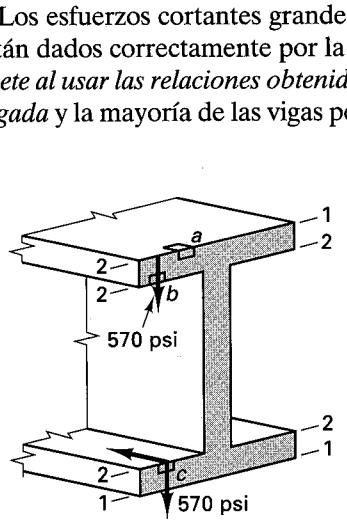


Fig. 10-17 Las condiciones de frontera no se satisfacen en los niveles 2-2.

Además, como se indicó antes, la solución para los esfuerzos cortantes en una viga con sección transversal rectangular es correcta

En aplicaciones mecánicas, las flechas circulares actúan a menudo como vigas. Por tanto, las vigas con sección transversal circular maciza forman una clase importante. Esas vigas no son de "pared delgada". Un examen de las condiciones de frontera de miembros circulares, figura 10-18(a), lleva a la conclusión de que cuando esfuerzos cortantes están presentes, deben actuar paralelamente a la frontera. Como no pueden existir esfuerzos cortantes concordantes *sobre* la superficie libre de una viga, ninguna componente de esfuerzo cortante puede actuar de manera normal a la frontera. Sin embargo, de acuerdo con la ecuación 10-6, esfuerzos cortantes *verticales* de *igual* intensidad actúan en todo nivel, como el *ac* en la figura 10-18(b). Esto es incompatible con las condiciones de frontera para los elementos *a* y *c* y la solución indicada por la ecuación 10-6 es inconsistente.[9] Afortunadamente, los esfuerzos cortantes *máximos* que ocurren al nivel del eje neutro satisfacen las condiciones de frontera y se obtienen con una aproximación del 5% respecto a su valor real.[10]

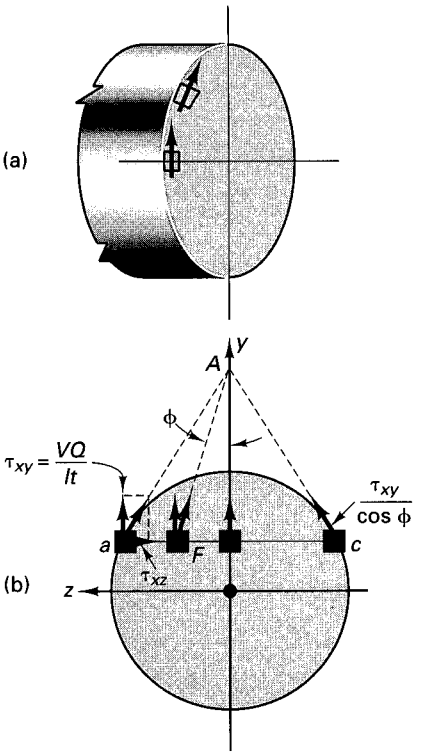


Fig. 10-18 Modificación de los esfuerzos cortantes para satisfacer las condiciones de frontera.

10-7. Esfuerzo cortante en patines de vigas

En una viga I, la existencia de esfuerzos cortantes actuando en un corte longitudinal vertical como el *c-c* en la figura 10-19(a), fue indicada en la figura 10-2(f) y en la Sección 10-4. Esos esfuerzos cortantes actúan perpendicularmente al plano del papel. Su magnitud puede hallarse aplicando la ecuación 10-6 y su sentido se infiere al considerar los momentos flexionantes en secciones adyacentes a través de la viga. Por ejemplo, si para la viga mostrada en la figura 10-19(b) los momentos flexionantes *positivos* crecen hacia el lector, mayores fuerzas *normales* actúan sobre la sección *cercana*. Para los elementos mostrados, $\tau t\, dx$ o $q\, dx$ deben ayudar a la menor fuerza que actúa sobre el área parcial de la sección transversal. Esto determina el sentido de los esfuerzos cortantes en los cortes longitudinales. Sin embargo, esfuerzos cortantes numéricamente iguales actúan sobre los planos mutuamente perpendiculares de un elemento *infinitesimal* y los esfuerzos cortantes sobre tales planos se encuentran o se separan en una esquina, indicada su dirección con las puntas de las flechas. Por consiguiente, el sentido de los esfuerzos cortantes en el plano de la sección también resulta conocido.

La magnitud de los esfuerzos cortantes varía para los diferentes cortes verticales. Por ejemplo, si el corte *c-c* en la figura 10-19(a) está en el borde

[9]La solución elástica exacta de este problema está más allá del alcance de este texto. Sin embargo, una mejor aproximación para los esfuerzos verdaderos puede obtenerse en forma bastante simple. Primero, se hace la hipótesis de que el esfuerzo cortante encontrado con la ecuación 10-6 da una *componente* verdadera del esfuerzo cortante que actúa en la *dirección vertical*. Entonces, como en todo nivel los esfuerzos cortantes en la frontera deben actuar tangencialmente a ésta, las líneas de acción de esos esfuerzos cortantes se intersectan en algún punto, como el *A* en la figura 10-18(b). Así pues, se hace una segunda hipótesis de que todos los esfuerzos cortantes en un nivel dado actúan en una dirección hacia un sólo punto, como el *A* en la figura 10-18(b). Por tanto, el esfuerzo cortante en cualquier punto, como el *F*, es igual a $\tau_{xy}/\cos \phi$. El sistema de esfuerzos hallado de esta manera es consistente.

[10]A. E. H. Love, *Mathematical Theory of Elasticity*, 4ª ed. Nueva York: Dover, 1944, p. 348.

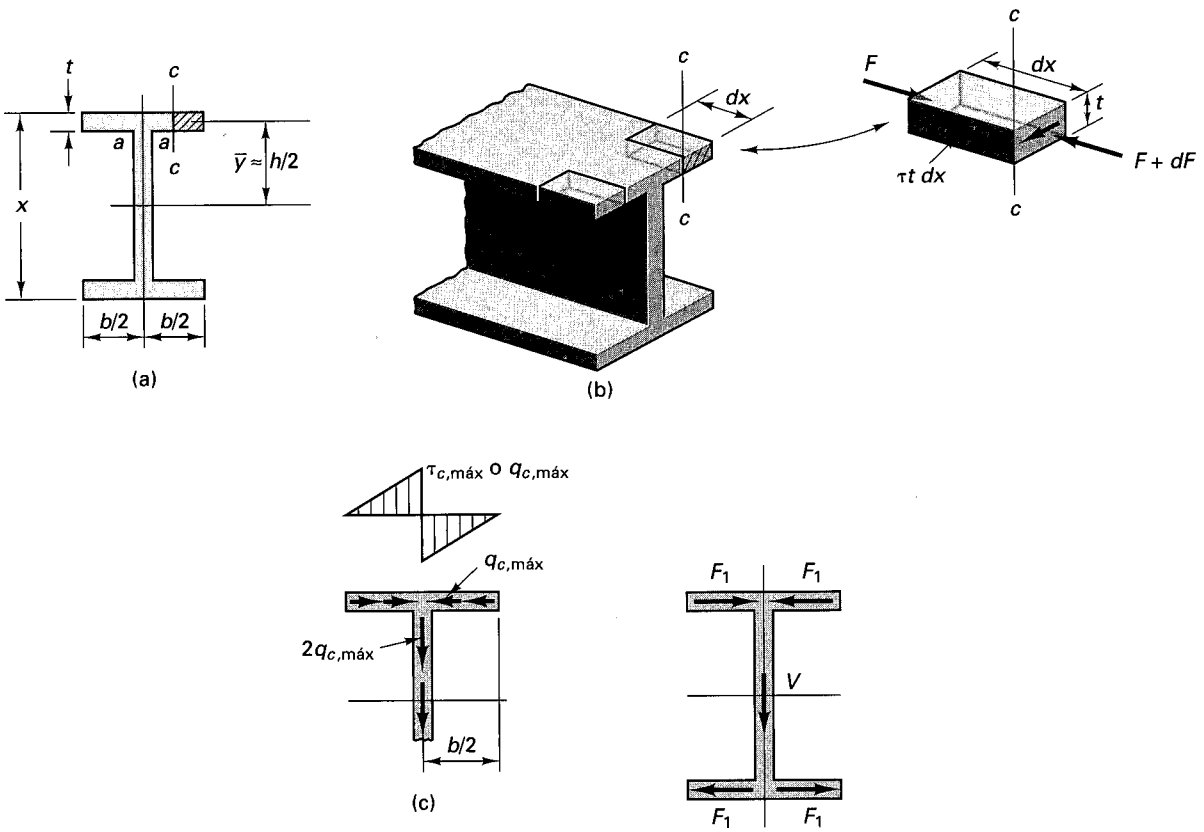


Fig. 10-19 Fuerzas cortantes en los patines de una viga I actuando perpendicularmente al eje de simetría.

de la viga, el área *rayada* de la sección transversal de la viga es cero. Sin embargo, si el espesor del patín es constante y el corte *c-c* se hace cada vez más cerca del alma, esta área crece desde cero con razón constante. Además, como $\bar{y}$ permanece constante para cualquiera de estas áreas, Q también crece linealmente desde cero hacia el alma. Por lo tanto, como V e I son constantes en cualquier sección a través de la viga, el flujo de cortante $q_c = VQ/I$ sigue la misma variación. Si el espesor del patín es constante, el esfuerzo cortante $\tau_c = VQ/It$ variará similarmente. La misma variación de q_c y τ_c se aplica sobre ambos lados del eje de simetría de la sección transversal. Sin embargo, como puede verse en la figura 10-19(b), esas cantidades en el plano de la sección transversal actúan en sentidos *opuestos* sobre los dos lados. La variación de esos esfuerzos cortantes o del flujo de cortante está representada en la figura 10-19(c), donde, por simplicidad, se supone que el alma tiene espesor nulo.

Igual que con todos los esfuerzos, los esfuerzos cortantes mostrados en la figura 10-19(c), al ser integrados sobre el área sobre la que actúan, son

equivalentes a una fuerza. La magnitud de la fuerza horizontal F_1 para *una mitad* del patín, mostrada en la figura 10-19(d), es igual al esfuerzo cortante *promedio* multiplicado por *la mitad del área total del patín*; es decir,

$$F_1 = \left(\frac{\tau_{c-\text{máx}}}{2}\right)\left(\frac{bt}{2}\right) \quad \text{o} \quad F_1 = \left(\frac{q_{c-\text{máx}}}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) \qquad (10\text{-}11)$$

Si una viga I transmite una fuerza cortante vertical, esas fuerzas horizontales actúan en los patines superior e inferior. Sin embargo, debido a la *simetría* de la sección transversal, esas fuerzas iguales se presentan en pares y *opuestas* entre sí y no causan ningún efecto externo aparente.

Para determinar el flujo de cortante en la unión del patín y el alma, como en el corte *a-a* en la figura 10-19(a), debe usarse *toda* el área del patín multiplicada por $\bar{y}$ al calcular el valor de Q. Sin embargo, como al determinar $q_{c,\,\text{máx}}$ se usó la *mitad* del área del patín multiplicada por la misma $\bar{y}$, la *suma* de los *dos flujos cortantes horizontales* viniendo de lados opuestos da el flujo[11] de cortante *vertical* en el corte *a-a*. Por consiguiente, hablando en forma figurada, los flujos de cortante horizontales "giran 90° y se unen para convertirse en el flujo de cortante vertical". Así entonces, los flujos de cortante en los diversos cortes horizontales a través del alma pueden ser determinados de la manera explicada en las secciones precedentes. Además, como la resistencia a la fuerza cortante vertical V en vigas I de pared delgada se desarrolla principalmente en el alma, ésta se muestra así en la figura 10-19(d). El sentido de los esfuerzos cortantes y flujos de cortante *en el alma* coincide con el sentido de la fuerza cortante V. Note que el flujo de cortante vertical "se divide" al llegar al patín inferior. Esto se representa en la figura 10-19(d) por las dos fuerzas F_1, que son el resultado de los flujos de cortante horizontales en los patines.

Las fuerzas cortantes que actúan en una sección de una viga I se muestran en la figura 10-19(d), y, por equilibrio, *las fuerzas aplicadas verticales deben actuar a través del centroide del área de la sección transversal* para que coincidan con V. Si se aplican así las fuerzas, no se presentará *ninguna torsión* en el miembro. Esto es cierto para todas las secciones con un eje de simetría. Para evitar la torsión de tales miembros, las fuerzas aplicadas deben actuar en el plano de simetría de la sección transversal y el eje de la viga. Se analizará a continuación una viga con sección transversal asimétrica.

10-8. Centro de cortante

Considere una viga con la sección transversal de un canal; véase la figura 10-20(a). Se supone que las paredes de este canal son suficientemente delgadas de manera que los cálculos pueden basarse en las dimensiones de sus *líneas centrales*. La flexión de este canal es respecto al eje horizontal y

[11] *No puede* decirse lo mismo con respecto a los esfuerzos cortantes ya que el espesor del patín puede diferir del alma.

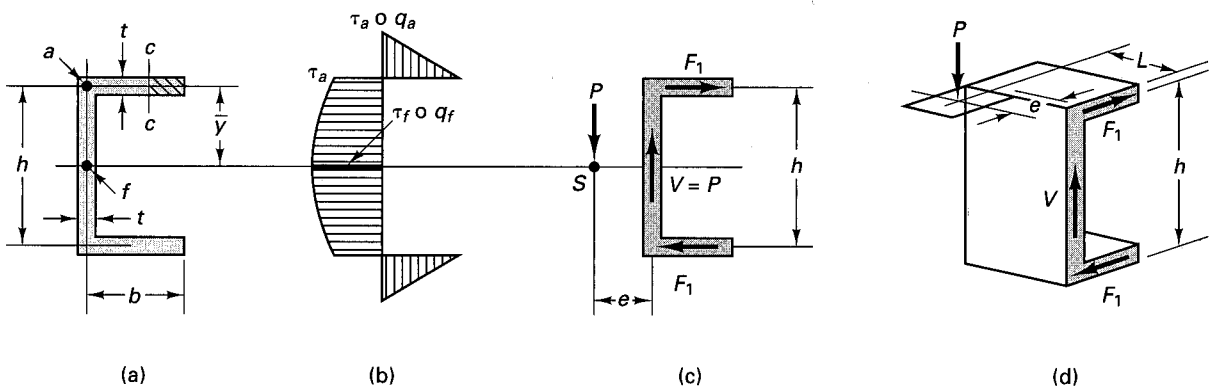


Fig. 10-20 Obtención de la posición del centro de cortante para un canal.

aunque esta sección no tiene un eje vertical de simetría, se *supondrá* que los esfuerzos de flexión están dados por la fórmula usual de la flexión. Suponiendo además que este canal resiste una fuerza cortante vertical, el momento flexionante variará de una sección a la otra a lo largo de la viga.

Considerando un corte vertical arbitrario como el *c-c* en la figura 10-20(a), q y τ pueden encontrarse de la manera usual. A lo largo de los lados horizontales del canal, esas cantidades varían linealmente desde el borde libre, tal como lo hacen en un lado del patín de una viga I. La variación de q y τ es parabólica a lo largo del alma. La variación de esas cantidades se muestra en la figura 10-20(b), donde están graficadas a lo largo de la línea central de la sección del canal.

El esfuerzo cortante *promedio* $\tau_a/2$ multiplicado por las áreas del patín da una fuerza $F_1 = (\tau_a/2)bt$ y la suma de los esfuerzos cortantes verticales sobre el área del alma es la fuerza cortante $V = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau t \, dy$.[12] Esas fuerzas cortantes actuando en el plano de la sección transversal se muestran en la figura 10-20(c) e indican que una fuerza V *y un par* F_1h se desarrollan en la sección del canal. Físicamente, existe una tendencia en el canal de girar alrededor de algún eje longitudinal. Para impedir la torcedura y mantener así la aplicabilidad de la inicialmente supuesta distribución del esfuerzo de flexión, las fuerzas externas deben ser aplicadas de manera que *equilibren el par interno* F_1h. Por ejemplo, considere el segmento de una viga en voladizo de peso despreciable, mostrado en la figura 10-20(d), al cual se aplica una fuerza vertical P paralela al alma a una distancia e desde la *línea central* del alma. Para mantener esta fuerza aplicada en equilibrio, debe desarrollarse una fuerza cortante V *igual y opuesta* en el alma. Igualmente, para *no* ocasionar una *torcedura del canal*, el par Pe debe ser *igual* al par F_1h. En la misma sección a lo largo del canal, el momento flexionante PL es resistido por los *usuales* esfuerzos de flexión (éstos no se muestran en la figura).

[12]Cuando el espesor de un canal es variable, es más conveniente encontrar F_1 y V usando los flujos cortantes respectivos; es decir, $F_1 = (q_a/2)b$ y $V = \int_{-h/2}^{+h/2} q \, dy$. Como los patines son delgados, la fuerza cortante vertical tomada por ellos es despreciable.

Puede obtenerse ahora una expresión para la distancia e que localiza el plano en que la fuerza P debe aplicarse *para no tener torcedura* en el canal. Entonces, recordando que $F_1h = Pe$ y que $P = V$,

$$e = \frac{F_1h}{P} = \frac{(1/2)\tau_a bth}{P} = \frac{bth}{2P}\frac{VQ}{It} = \frac{bth}{2P}\frac{Vbt(h/2)}{It} = \frac{b^2h^2t}{4I} \qquad (10\text{-}12)$$

Nótese que la distancia e es independiente de la magnitud de la fuerza aplicada P, así como de su posición a lo largo de la viga. La distancia e es una propiedad de una sección y se mide hacia afuera desde el *centro* del alma hasta la fuerza aplicada.

Una investigación similar puede hacerse para localizar el plano en que deben aplicarse las fuerzas horizontales para que no causen torsión en el canal. Sin embargo, para los canales considerados, por simetría, puede verse que esta plano coincide con el plano neutro del caso anterior. La intersección de esos dos planos mutuamente perpendiculares con el plano de la sección transversal localiza un punto que se llama *centro de cortante*.[13] El centro de cortante se designa por la letra S en la figura 10-20(c). El centro de cortante para cualquier sección transversal se encuentra sobre una línea longitudinal paralela al eje de la viga. *Cualquier fuerza transversal aplicada por el centro de cortante no ocasiona torsión en la viga.* Una investigación detallada de este problema muestra que cuando un miembro con cualquier sección transversal es sometido a torsión, la torsión tiene lugar alrededor del centro de cortante, que permanece fijo. Por esta razón, el centro de cortante se llama a veces el *centro de torsión*.

Para áreas transversales con un eje de simetría, el centro de cortante está siempre localizado sobre este eje. Para aquellas con dos ejes de simetría, el centro de cortante coincide con el centroide del área transversal. Éste es el caso para la viga I que fue considerada en la sección previa.

La localización exacta del centro de cortante para secciones asimétricas de materiales gruesos es difícil de obtener y se conoce sólo en unos pocos casos. Si el material es *delgado*, como ha sido supuesto en el análisis anterior, pueden siempre encontrarse procedimientos relativamente simples para localizar el centro de cortante de la sección transversal. El procedimiento usual consiste en determinar las fuerzas cortantes, como las F_1 y V anteriores, en una sección, y luego encontrar la posición de la fuerza externa necesaria para mantener esas fuerzas en equilibrio.

Ejemplo 10-6

Encuentre la posición aproximada del centro de cortante para una viga con la sección transversal del canal mostrado en la figura 10-21.

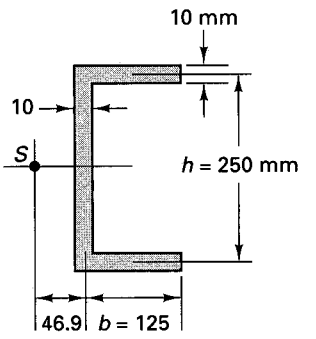


Fig. 10-21

[13]Fue sólo hasta 1921 que A. Eggenschwyler y R. Maillart de Suiza aclararon este concepto.

SOLUCIÓN

En vez de usar la ecuación 10-12 directamente, podemos hacer algunas simplificaciones adicionales. El momento de inercia de un canal de pared delgada respecto a su eje neutro puede encontrarse con suficiente exactitud despreciando el momento de inercia de los patines *respecto a sus propios ejes* (¡únicamente!). Esta expresión para I puede entonces sustituirse en la ecuación 10-12 y, después de algunas simplificaciones, se obtiene una fórmula para la e de canales:

$$I \approx I_{\text{alma}} + (Ad^2)_{\text{patines}} = th^3/12 + 2bt(h/2)^2 = th^3/12 + bth^2/2$$

$$e = \frac{b^2h^2t}{4I} = \frac{b^2h^2t}{4(bth^2/2 + th^3/12)} = \frac{b}{2 + h/3b} \qquad (10\text{-}13)$$

La ecuación 10-13 muestra que cuando el ancho de los patines b es muy grande, e tiende a su valor máximo de $b/2$. Cuando h es muy grande, e tiende a su valor mínimo de cero. De otra manera, e toma un valor intermedio entre esos dos límites. Para los datos numéricos dados en la figura 10-21,

$$e = \frac{125}{2 + 250/(3 \times 125)} = 46.9 \text{ mm}$$

Por consiguiente, el centro de cortante S está a $46.9 - 5.0 = 41.9$ mm desde la cara vertical exterior del canal.

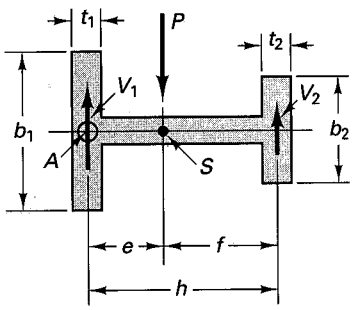
Ejemplo 10-7

Encuentre la posición aproximada del centro de cortante para la sección transversal de la viga I mostrada en la figura 10-22(a). Note que los patines son de distinto tamaño.

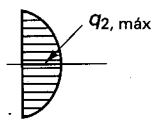
SOLUCIÓN

Esta sección transversal tiene un eje horizontal de simetría y el centro de cortante se encuentra sobre él; queda por determinar su posición sobre el eje. La fuerza aplicada P causa esfuerzos de flexión y cortantes *sólo en los patines* y la contribución del alma para resistir la fuerza aplicada P es despreciable.

Sea V_1 la fuerza cortante resistida por el patín izquierdo de la viga y V_2 la del patín derecho. Por equilibrio, $V_1 + V_2 = P$. También, para no tener torsión en la sección, de $\Sigma M_A = 0$, $Pe = V_2h$ (o $Pf = V_1h$). Así entonces, sólo queda por determinar V_2 para resolver este problema. Esto puede hacerse notando que el patín derecho es realmente una viga rectangular ordinaria. El esfuerzo cortante (o el flujo de cortante) en tal viga está distribuido parabólicamente, como se ve en la figura 10-22(b) y como el área de una parábola es igual a dos tercios de la base multiplicada por la altura máxima, $V_2 = \frac{2}{3}\, b_2(q_2)_{\text{máx}}$. Sin embargo, como la fuerza cortante total $V = P$, por la ecuación 10-5, $(q_2)_{\text{máx}} = VQ/I = PQ/I$, donde Q es el mo-



(a)



Flujo cortante en el patín derecho

(b)

Fig. 10-22

mento estático de la *mitad superior del patín derecho* e I es el momento de inercia de *toda* la sección. Por consiguiente,

$$Pe = V_2 h = \frac{2}{3} b_2 (q_2)_{\text{máx}} h = \frac{\frac{2}{3} h b_2 PQ}{I}$$
$$e = \frac{2hb_2}{3I} Q = \frac{2hb_2}{3I} \frac{b_2 t_2}{2} \frac{b_2}{4} = \frac{h}{I} \frac{t_2 b_2^3}{12} = \frac{hI_2}{I} \tag{10-14}$$

donde I_2 es el momento de inercia del *patín derecho* respecto al eje neutro. Similarmente, puede demostrarse que $f = hI_1/I$, donde I_1 corresponde al *patín izquierdo*. Si el alma de la viga es delgada como se supuso originalmente, $I \approx I_1 + I_2$, y $e + f = h$, como es de esperarse.

Un análisis similar lleva a la conclusión de que el centro de cortante para un ángulo simétrico se localiza en la intersección de las líneas centrales de sus lados, como se muestra en las figuras 10-23(a) y (b). Esto se infiere de que el flujo de cortante en toda sección, como la c-c, está dirigido a lo largo de la línea central de un lado. Esos flujos cortantes dan dos fuerzas idénticas F_1 en los lados. La suma de las componentes verticales de esas fuerzas es igual a la fuerza cortante vertical aplicada por S. Una situación análoga se encuentra también en cualquier ángulo o sección T, como se muestra en las figuras 10-24(a) y (b). La localización de los centros de cortante para diversos miembros es particularmente importante en aplicaciones de la industria aeronáutica.[14]

Como se observó antes, para impedir la torsión de una viga, la fuerza aplicada debe pasar por el centro de cortante. Cuando tal fuerza forma un ángulo con la vertical, es conveniente descomponerla en componentes a lo largo de los ejes principales de la sección transversal, como se muestra en la figura 9-5. Si la fuerza P es aplicada fuera del centro de cortante S, como

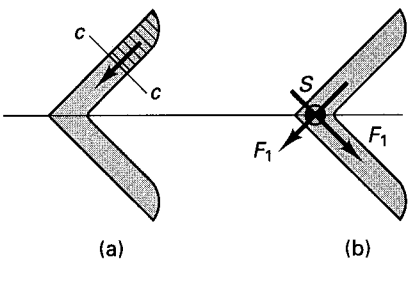


Fig. 10-23 El centro de cortante para un ángulo de lados iguales está en S.

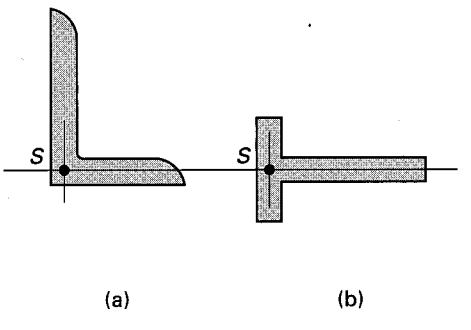


Fig. 10-24 El centro de cortante para las secciones mostradas está en S.

[14]Para mayores detalles, véase E. F. Bruhn, *Analysis and Design of Flight Vehicle Structures*, Cincinnati, Tri-State, 1965; véase también P. Kuhn, *Stresses in Aircraft and Shell Structures*, Nueva York, McGraw-Hill, 1956.

se muestra en la figura 10-25, pueden introducirse dos fuerzas P iguales pero opuestas en S sin cambiar el problema. Entonces, además de los esfuerzos causados por la P aplicada en S, deben considerarse los esfuerzos torsionantes causados por el par Pd, como se indicó en el capítulo 6.

Debe notarse que en general, además de los esfuerzos cortantes vistos en este capítulo, también actúan esfuerzos de flexión sobre los elementos considerados. La transformación de este tipo de estado de esfuerzo se analiza en el capítulo 11. En el resto de este capítulo se considerarán sólo la superposición de esfuerzos cortantes.

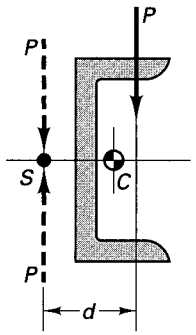


Fig. 10-25 Flexión torsional de un canal.

10-9. Esfuerzos cortantes directos y torsionantes combinados

El análisis de los esfuerzos cortantes combinados directo y torsionante consta de dos partes que son luego superpuestas. En una de esas partes, los esfuerzos cortantes directos se determinan usando los procedimientos descritos antes en este capítulo; en la segunda, para los esfuerzos cortantes causados por pares de torsión se usan los métodos de análisis vistos en el capítulo 6.

Los dos análisis para los esfuerzos cortantes combinados deben determinarse para la *misma área elemental* independientemente de la causa. Multiplicando esos esfuerzos por las áreas respectivas se obtienen *fuerzas*. Como estas fuerzas pueden sumarse vectorialmente, al invertir el proceso (es decir, dividir la suma vectorial entre el área inicial), se obtienen los esfuerzos cortantes combinados. Siendo tal el caso, los esfuerzos cortantes que actúan sobre el *mismo plano* de un elemento infinitesimal pueden ser combinados vectorialmente.[15] Generalmente, los esfuerzos cortantes torsionantes máximos así como el esfuerzo cortante directo máximo en vigas ocurren en las fronteras de secciones transversales y son colineales. Por lo tanto, una suma algebraica de esos esfuerzos da el esfuerzo cortante combinado en un punto. Sin embargo, en el interior de tales miembros, es necesario efectuar una suma vectorial de los esfuerzos directos y torsionantes.

Al tratar problemas de vigas, como se indicó antes, no debe olvidarse que además de los esfuerzos cortantes analizados, actúan también esfuerzos normales causados por flexión sobre los elementos considerados. Los procedimientos para combinar tales esfuerzos normales con los esfuerzos cortantes se verán en el siguiente capítulo.

Ejemplo 10-8

Encuentre el esfuerzo cortante máximo debido a las fuerzas aplicadas en el plano A-B de la flecha de acero de alta resistencia de 10 mm de diámetro mostrada en la figura 10-26(a).

[15]El problema inverso de resolver un esfuerzo cortante fue considerado en conexión con la figura 6-34.

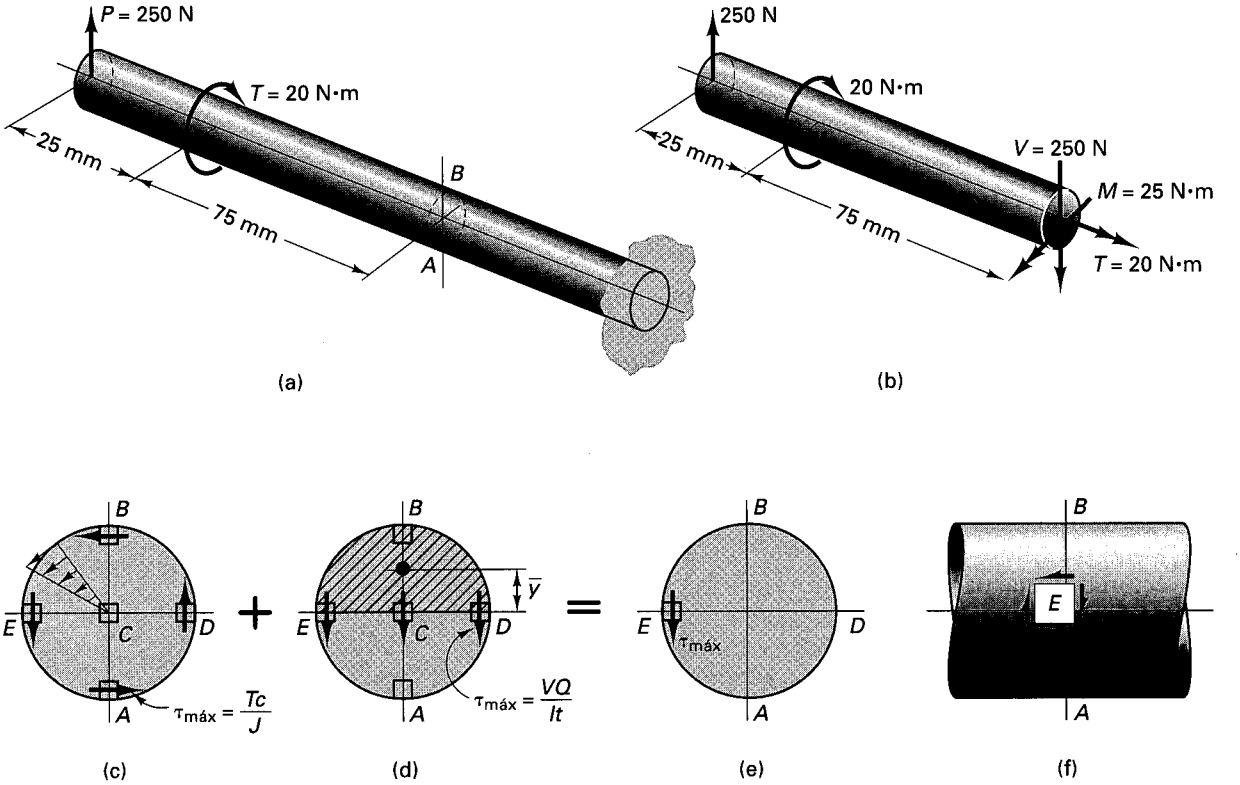


Fig. 10-26

SOLUCIÓN

Como sólo se requieren los esfuerzos debidos a las fuerzas aplicadas, el peso de la flecha no tiene que ser considerado. El cuerpo libre de un segmento de la flecha se muestra en la figura 10-26(b). El sistema de fuerzas en el corte necesario para mantener este segmento en equilibrio consiste en un par de torsión $T = 20$ N·m, una fuerza cortante $V = 250$ N y un momento flexionante $M = 25$ N·m.

Debido al par de torsión T, los esfuerzos cortantes en el corte A–B varían linealmente desde el eje de la flecha y alcanzan el valor máximo dado por la ecuación 6-3, $\tau_{máx} = Tc/I_p$. Esos esfuerzos cortantes máximos que coinciden en sentido con el par de torsión *resistente* T, están mostrados en los puntos A, B, D y E en la figura 10-26(c).

El esfuerzo cortante directo causado por la fuerza cortante V puede obtenerse usando la ecuación $\tau = VQ/It$. Para los elementos A y B, figura 10-26(d), $Q = 0$; por consiguiente $\tau = 0$. El esfuerzo cortante alcanza su valor máximo en el nivel ED. Para este esfuerzo, Q es igual al área rayada mostrada en la figura 10-26(d) multiplicada por la distancia de su centroide al eje neutro. La última cantidad es $\bar{y} = 4c/3\pi$, donde c es el radio del área de la sección transversal; véase la Tabla 2 en el apéndice. Por lo tanto,

$$Q = \frac{\pi c^2}{2}\frac{4c}{3\pi} = \frac{2c^3}{3}$$

Además, como $t = 2c$ e $I = \pi c^4/4$, el esfuerzo directo máximo es

$$\tau_{máx} = \frac{VQ}{It} = \frac{V}{2c}\frac{2c^3}{3}\frac{4}{\pi c^4} = \frac{4V}{3\pi c^2} = \frac{4V}{3A} \qquad (10\text{-}15)$$

donde A es el área *total* transversal de la barra. (Una expresión similar fue deducida en el ejemplo 10-3 para una viga de sección rectangular.) En la figura 10-26(d), este esfuerzo cortante se muestra actuando hacia abajo sobre las áreas elementales en E, C y D. Esta dirección concuerda con la dirección de la fuerza cortante V.

Para encontrar el esfuerzo cortante máximo combinado en el plano A-B, los esfuerzos mostrados en las figuras 10-26(c) y (d) se superponen. Por inspección se ve que el esfuerzo cortante máximo está en E ya que en los dos diagramas, los esfuerzos cortantes en E actúan con el mismo sentido. No hay esfuerzos cortantes directos en A y B, mientras que en C no hay esfuerzo cortante torsional. Los dos esfuerzos cortantes en D actúan con sentidos *opuestos*.

Los esfuerzos cortantes combinados en los cinco puntos A, B, C, D y E, a diferencia de la mayor parte de los puntos interiores, no requieren de una suma vectorial formal para determinar sus magnitudes. Como los esfuerzos cortantes torsionales en los puntos interiores son menores que aquellos en la frontera, el esfuerzo cortante combinado máximo ocurre en E:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 10^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{I_p}{2} = 491 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 = 78.5 \text{ mm}^2$$

$$(\tau_{máx})_{torsión} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{20 \times 10^3 \times 5}{982} = 102 \text{ MPa}$$

$$(\tau_{máx})_{directo} = \frac{VQ}{It} = \frac{4V}{3A} = \frac{4 \times 250}{3 \times 78.5} = 4 \text{ MPa}$$

$$\tau_E = 102 + 4 = 106 \text{ MPa}$$

Una representación plana del esfuerzo cortante en E con los demás esfuerzos sobre los planos longitudinales se muestra en la figura 10-26(f). Ningún esfuerzo normal actúa sobre este elemento ya que está localizado sobre el eje neutro.

10-10. Esfuerzos en resortes helicoidales estrechamente enrollados[16]

Los resortes helicoidales, como el mostrado en la figura 10-27(a), son a menudo usados como elementos de máquinas. Con ciertas limitaciones, los esfuerzos en esos resortes pueden analizarse con un método similar al usado

[16]Esta sección es sobre un tema especializado y es opcional.

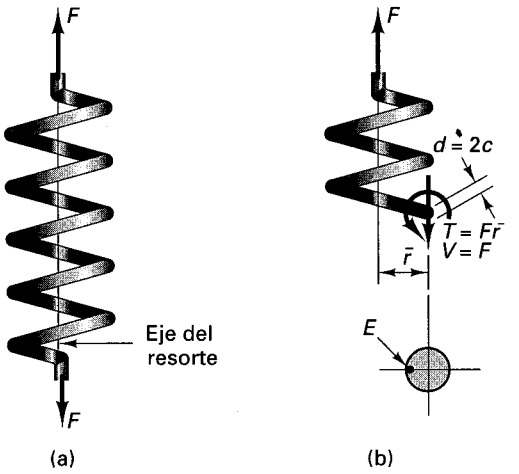


Fig. 10-27 Resorte helicoidal estrechamente enrollado.

en el ejemplo precedente. El análisis se limitará a resortes fabricados con barras o alambres de sección transversal circular.[17] Además, *se supondrá que cualquier espira de un resorte se encuentra en un plano que es casi perpendicular al eje del resorte.* Esto requiere que las espiras adyacentes estén muy cerca una de otra. Con esta limitación, una sección perpendicular al eje del resorte es *casi vertical.*[18] Por tanto, para mantener el equilibrio de un segmento del resorte, sólo se requieren una fuerza cortante $V = F$ y un par de torsión $T = F\bar{r}$ en *cualquier* sección de la barra; véase la figura 10-27(b). Note que $\bar{r}$ es la distancia del eje del resorte al *centroide del área transversal de la barra.*

Debe notarse que en el trabajo previo ha sido reiterado que si se tiene presente una fuerza cortante en una sección, habrá un cambio en el momento flexionante a lo largo del miembro. Aquí actúa una fuerza cortante en cada sección de la barra y sin embargo parece no ocurrir ningún momento flexionante ni cambio de éste en la barra. Esto se debe a que la barra es *curva.* Un elemento de la barra visto desde arriba se muestra en la figura 10-28. En ambos extremos del elemento, los pares de torsión son iguales a $F\bar{r}$ y, usando una representación vectorial, actúan en las direcciones mostradas. La componente de esos vectores hacia el eje O del resorte, descompuesta en el punto de intersección de los vectores, $2F\bar{r}\,d\phi/2 = F\bar{r}\,d\phi$, se opone al par desarrollado por las fuerzas cortantes verticales $V = F$, que están a $\bar{r}\,d\phi$ entre sí.

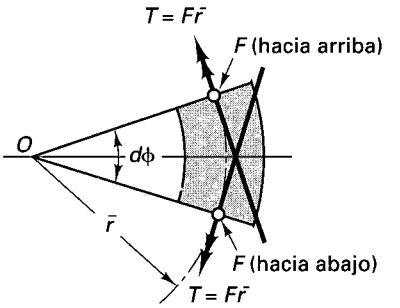


Fig. 10-28

El esfuerzo cortante máximo en una sección arbitraria por la barra podría obtenerse como en el ejemplo anterior, superponiendo los esfuerzos cortantes torsionantes y directos. Este esfuerzo cortante máximo ocurre en

[17]Para un amplio análisis de resortes, véase A. M. Wahl, *Mechanical Springs,* Cleveland, Penton, 1944.

[18]Esto elimina la necesidad de considerar una fuerza axial y un momento flexionante en la sección tomada a través del resorte.

el interior de la espira en el punto E, como se muestra en la figura 10-27(b). Sin embargo, en el análisis de resortes, *es usual suponer que el esfuerzo cortante causado por la fuerza cortante directa está distribuido uniformemente sobre el área de la sección transversal de la barra.* Por consiguiente, el esfuerzo cortante directo nominal para cualquier punto sobre la sección transversal es $\tau = F/A$. La superposición de este esfuerzo cortante directo *nominal* y el torsionante en E da el esfuerzo cortante combinado máximo. Entonces, como $T = F\bar{r}$, $d = 2c$ e $I_p = \pi d^4/32$.

$$\tau_{máx} = \frac{F}{A} + \frac{Tc}{I_p} = \frac{Tc}{I_p}\left(\frac{FI_p}{ATc} + 1\right) = \frac{16F\bar{r}}{\pi d^3}\left(\frac{d}{4\bar{r}} + 1\right) \qquad (10\text{-}16)$$

Se ve en esta ecuación que cuando el diámetro d de la barra es pequeño en relación al radio $\bar{r}$, de la espira, el efecto del esfuerzo cortante directo también es pequeño. Por otra parte, si el enunciado inverso es cierto, el primer término en el paréntesis resulta importante. Sin embargo, en el último caso, los resultados dados por la ecuación 10-16 contienen un fuerte error y la ecuación 10-16 no debe usarse ya que está basada en la fórmula de la torsión para *barras rectas*. Conforme d se vuelve numéricamente comparable a $\bar{r}$, la longitud de las fibras interiores de la espira difieren fuertemente de la longitud de las fibras exteriores y no es aplicable entonces la hipótesis sobre las deformaciones usada en la fórmula de la torsión.

El problema de un resorte ha sido resuelto exactamente[19] por los métodos de la teoría matemática de la elasticidad y aunque esos resultados son complicados, para cualquier resorte pueden hacerse depender de un sólo parámetro $m = 2\bar{r}/d$, que se llama *índice de resorte*. Así entonces, la ecuación 10-16 puede reescribirse como

$$\tau_{máx} = K\frac{16F\bar{r}}{\pi d^3} \qquad (10\text{-}17)$$

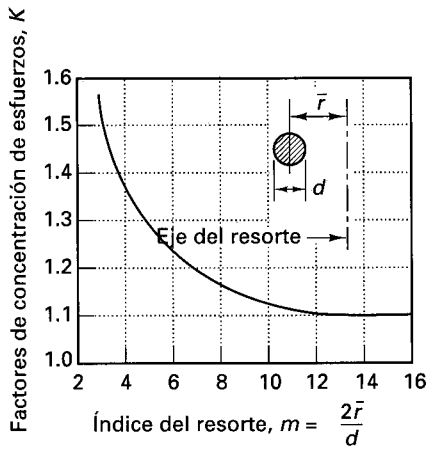


Fig. 10-29 Factores de concentración de esfuerzos para resortes helicoidales a tensión o compresión de alambre redondo.

[19]O. Goehner, "Die Berechnung Zylindrischer Schraubendfedern", *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure,* **76**, núm. 1, Marzo, 1932, p. 269.

donde K puede interpretarse como un factor de concentración de esfuerzos para resortes helicoidales estrechamente enrollados hechos de barras circulares. Una gráfica de K *versus* el índice de resorte se muestra[20] en la figura 10-29. Para resortes gruesos, el índice de resorte es pequeño; por consiguiente, el factor K de concentración de esfuerzos resulta importante. En todos los casos, el factor K toma en cuenta la cantidad correcta de esfuerzo cortante directo. Esfuerzos muy altos son comúnmente permitidos en resortes porque se usan en su fabricación materiales de alta resistencia. Para aceros de resortes de buena calidad, los esfuerzos cortantes de trabajo varían entre 200 y 700 MPa (30 a 100 ksi).

10-11. Deflexiones de resortes helicoidales estrechamente enrollados

En esta sección se analizarán la deflexión de los resortes helicoidales estrechamente enrollados. La atención se centrará en los resortes helicoidales estrechamente enrollados con un índice grande de resorte (es decir, el diámetro del alambre se supondrá pequeño en comparación con el radio de la espira). Esto permite el tratamiento de un elemento de resorte entre dos secciones adyacentes a través del alambre como una *barra circular recta* en torsión. El efecto del cortante directo sobre la deflexión del resorte será despreciado. Esto es usualmente permisible si tal efecto es pequeño.

Consideremos un resorte helicoidal como el mostrado en la figura 10-30. Un elemento típico AB de este resorte está sometido en toda su longitud al par de torsión $T = F\bar{r}$. Este par ocasiona una rotación relativa entre dos planos adyacentes, A y B, y con suficiente exactitud, la cantidad de rotación puede obtenerse usando la ecuación 6-14, $d\phi = T\,dx/I_pG$, para barras circulares rectas. En esta ecuación, el par aplicado $T = F\bar{r}$, dx es la longitud del elemento, G es el módulo de elasticidad por cortante e I_p es el momento polar de inercia del *área de la sección transversal del alambre.*

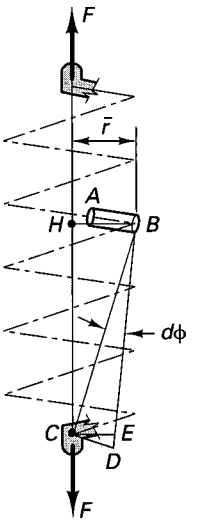


Fig. 10-30 Obtención de la deflexión de un resorte helicoidal.

Si el plano A del alambre se considera fijo, la rotación del plano B está dada por la expresión anterior. La contribución de este elemento al movimiento de la fuerza F en C es igual a la distancia BC multiplicada por el ángulo $d\phi$ (es decir, $CD = BC\,d\phi$). Sin embargo, como el elemento AB es pequeño, la distancia CD es también pequeña y puede considerarse perpendicular (aunque es en realidad un arco) a la línea BC. Además, sólo la componente vertical de esta deflexión es importante ya que en un resorte de muchas espiras, para cualquier elemento a un lado del resorte, hay un elemento equivalente correspondiente en el otro lado. Los elementos diametralmente opuestos del resorte equilibran la componente horizontal de

[20]Una expresión analítica que da el valor de K con aproximación del 1 o 2% respecto al valor verdadero, es usada con frecuencia. Esta expresión en términos del índice de resorte m es $K_1 = (4m - 1)/(4m - 4) + 0.615/m$. Esta expresión fue obtenida por A. M. Wahl en la década de los 40 con base en algunas hipótesis simplificadoras y se conoce como el *factor de corrección de Wahl* por curvatura en resortes helicoidales.

la deflexión y permiten sólo la deflexión vertical de la fuerza F. Por lo tanto, conocido el incremento *vertical* ED de la deflexión de la fuerza F debido a un elemento AB del resorte y sumando tales incrementos de *todos* los elementos, se obtiene la deflexión total del resorte.

De los triángulos semejantes CDE y CBH,

$$\frac{ED}{CD} = \frac{HB}{BC} \quad \text{o} \quad ED = \frac{CD}{BC} HB$$

Sin embargo, $CD = BC\, d\phi$, $HB = \bar{r}$, y ED puede ser denotado por $d\Delta$, ya que representa una deflexión vertical infinitesimal del resorte debido a la rotación de un elemento AB. Entonces, $d\Delta = \bar{r}\, d\phi$ y

$$\Delta = \int d\Delta = \int \bar{r}\, d\phi = \int_0^L \bar{r} \frac{T\, dx}{I_p G} = \frac{TL\bar{r}}{I_p G}$$

Sin embargo, $T = F\bar{r}$, y para un resorte estrechamente enrollado, la *longitud L del alambre* puede considerarse con suficiente exactitud como $2\pi\bar{r}N$, donde N es el número de espiras *vivas* o activas del resorte. Por consiguiente, la deflexión Δ del resorte es

$$\Delta = \frac{2\pi F \bar{r}^3 N}{I_p G} \tag{10-18a}$$

o, si el valor de I_p del resorte se sustituye,

$$\Delta = \frac{64 F \bar{r}^3 N}{G d^4} \tag{10-18b}$$

Las ecuaciones 10-18a y 10-18b dan la deflexión de un resorte helicoidal estrechamente enrollado a lo largo de su eje cuando el resorte está sometido a una fuerza de tensión o de compresión F. En esas fórmulas, el efecto del esfuerzo cortante directo sobre la deflexión se desprecia (es decir, las fórmulas dan sólo el efecto de las deformaciones por torsión).

El comportamiento de un resorte puede ser convenientemente definido por su *constante de resorte* k. De la ecuación 10-18b, la constante de resorte para un resorte helicoidal hecho con un alambre de sección transversal circular es

$$k = \frac{F}{\Delta} = \frac{G d^4}{64 \bar{r}^3 N} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{\text{lb}}{\text{in}}\right]$$

Ejemplo 10-9

Encuentre el esfuerzo máximo en la barra de acero de 15 mm de diámetro mostrada en la figura 10-31 causado por una masa de 3 kg que cae libremente desde una altura de 0.5 m. El resorte helicoidal de acero de 35 mm de diámetro exterior insertado en el sistema está hecho de alambre redondo de 5 mm, y tiene 10 espiras. Sean $E = 200$ GPa y $G = 80$ GPa.

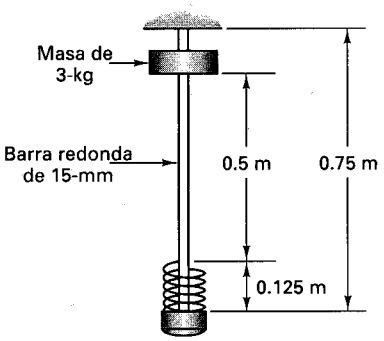


Fig. 10-31

SOLUCIÓN

La deflexión estática de la masa de 3 kg que ejerce una fuerza de $3g = 29.4$ N sobre el resorte se calcula primero. Ésta consta de dos partes: la deflexión de la barra dada por la ecuación 3-4 y la deflexión del resorte dada por la ecuación 10-18b. Para su uso en la ecuación 10-18b, $\bar{r} = 15$ mm. Entonces, de la ecuación 3-20, se encuentra la fuerza dinámica que actúa sobre el resorte y la barra. Esta fuerza se usa para encontrar el esfuerzo en la barra. El área transversal de la barra es $A = \pi \times 15^2/4 = 177$ mm^2.

$$\Delta_{est} = \Delta_{barra} + \Delta_{res} = \frac{PL}{AE} + \frac{64F\bar{r}^3N}{Gd^4}$$

$$= \frac{29.4 \times 750}{177 \times 200 \times 10^3} + \frac{64 \times 29.4 \times 15^3 \times 10}{80 \times 10^3 \times 5^4} = 1.27 \text{ mm}$$

$$P_{din} = W\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}\right) = 29.4\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 500}{1.27}}\right) = 855 \text{ N}$$

$$\sigma_{din} = \frac{P_{din}}{A} = \frac{855}{177} = 4.8 \text{ MPa}$$

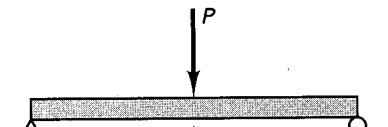
Para una caída libre de la masa de 0.5 m sin el resorte, el esfuerzo elástico en la barra sería de 210 MPa. Para el sistema con el resorte, la mayor parte de la reducción en el esfuerzo es debida a Δ_{res}.

PROBLEMAS

Sección 10-3

10-1. Suponiendo que un miembro consiste en cinco tablones de 50 × 150 mm de madera unidos entre sí por medio de tornillos, como se muestra en la vista transversal de la figura 10-4(a), demuestre que $A_{fghj}\bar{y}_1 = A_{fgpn}\bar{y}_2$, donde $\bar{y}_1$ es la distancia del centroide de toda el área al centroide del área A_{fghj} y $\bar{y}_2$ es la correspondiente distancia para el área A_{fgpn}.

10-2. La sección transversal de una viga hecha con un tablón de 6 × 6 in reforzado con otro de 2 × 6 in se muestra en la figura. ¿Qué fuerzas se ejercen sobre clavos comunes 20d, espaciados a 6 in y colocados al tresbolillo, cuando se aplica la fuerza P = 500 lb en el centro del claro? Calcule el flujo de cortante de dos maneras: usando la sección transversal del tablón menor y luego usando la sección transversal del mayor.



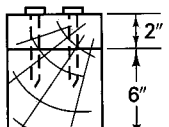
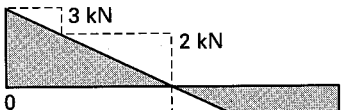


Fig. P10-2



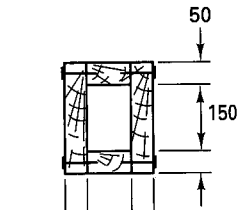


Fig. P10-3

10-3. El diagrama de fuerza cortante para la viga en caja que soporta una carga uniformemente distribuida es aproximado para el diseño por el diagrama escalonado mostrado en la figura. Si la viga está formada por cuatro piezas clavadas entre sí, como se muestra en la sección transversal, ¿qué espaciamiento debe usarse a lo largo del claro? Suponga que cada clavo resiste 300 N en cortante.

10-4. Una viga en caja cuadrada de 10 in está hecha con cuatro piezas de madera de 2 in de espesor. Dos posibles diseños se consideran, como se muestra en la figura. El diseño mostrado en (a) puede girarse 90° en la aplicación. (a) Seleccione el diseño que requiere la cantidad mínima de clavos para transmitir el cortante. (b) Si la fuerza cortante que debe transmitir este miembro es de 800 lb, ¿cuál es el espaciamiento de los clavos en el mejor diseño? Los clavos 20d que serán usados resisten 140 lb en cortante cada uno.

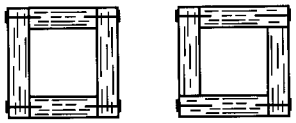


Fig. P10-4

10-5. Una viga está cargada en forma tal que el diagrama de momento varía como se muestra en la figura. Para la sección transversal mostrada, determine la separación entre tornillos en la región crítica del claro. Los tornillos están dispuestos en pares y la fuerza cortante permisible para los tornillos de alta resistencia es de 120 kN.

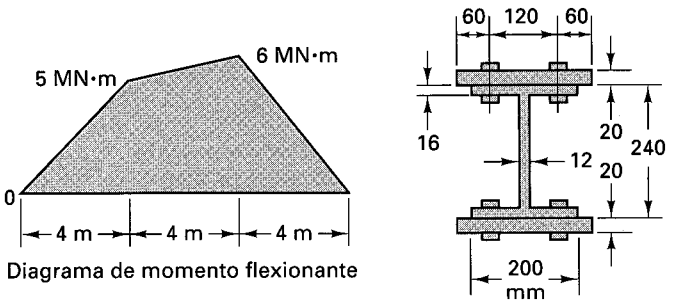


Fig. P10-5

10-6. Una viga de madera con longitud total de 4.5 m contiene un voladizo de 3 m que tiene en su extremo libre una fuerza concentrada $P = 3945$ N. (Véase la figura.) La viga está hecha con tablones de 50 mm de espesor clavados entre sí con clavos que tienen una resistencia al cortante de 400 N cada uno. El momento de inercia de toda la sección transversal es aproximadamente de 740×10^6 mm^4. (a) ¿Cuál debe ser el espaciamiento longitudinal de los clavos que conectan el tablón A con los tablones B y C en la región de alta fuerza cortante? (b) Para la misma región, ¿cuál debe ser el espaciamiento longitudinal de los clavos que conectan el tablón D con los tablones B y C? En los cálculos, desprecie el peso de la viga.

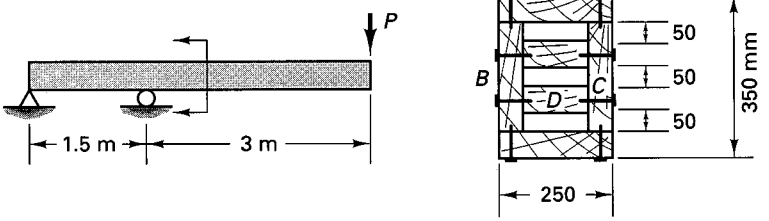


Fig. P10-6

10-7. Dos vigas W 200 × 36 están dispuestas como se muestra en la figura. Determine las capacidades por flexión y por cortante de este miembro si el esfuerzo permisible de flexión es de 160 MPa y la capacidad por cortante de cada perno es de 90 kN. Los pernos están dispuestos en pares y están espaciados a 150 mm entre centros.

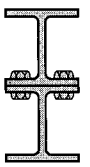


Fig. P10-7

10-8. Una trabe armada está hecha con dos cubreplacas de $14 \times \frac{1}{2}$ in, cuatro ángulos de $6 \times 4 \times \frac{1}{2}$ in y una placa de alma de $39\frac{1}{2} \times \frac{3}{8}$ in, como se muestra en la figura. Si en la sección considerada se transmite una fuerza cortante vertical total de 150 k, ¿cuál debe ser el espaciamiento de los remaches A y B? Para la trabe, $I = 14{,}560\ \text{in}^4$ respecto al eje neutro. Suponga remaches de 3/4 in y note que un remache resiste 6.63 k en cortante simple, 13.25 k en cortante doble y 11.3 k por aplastamiento sobre una placa de 3/8 in.

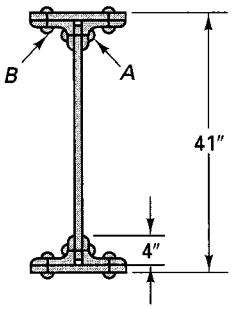


Fig. P10-8

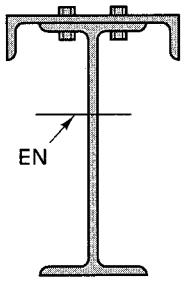


Fig. P10-9

10-9. Una viga simplemente apoyada tiene una sección transversal que consta de una C 310 × 31 más una W 460 ×74 unidas entre sí por tornillos de 19 mm de diámetro separados entre sí a 150 mm en cada fila, como se muestra en la figura. Si esta viga se carga con una fuerza concentrada hacia abajo de 500 kN en el centro del claro, ¿cuál es el esfuerzo cortante en los tornillos? Desprecie el peso de la viga.

10-10. Una trabe con patines T se usa para soportar una carga de 900 kN en el centro de un claro simple de 7 m. Las dimensiones de la trabe se dan en la figura en una vista de su sección transversal. Si los remaches de 22 mm de diámetro están separados entre sí longitudinalmente a cada 125 mm, ¿qué esfuerzo cortante se desarrolla en los remaches debido a la carga aplicada? El momento de inercia de la trabe respecto al eje neutro es aproximadamente de $4300 \times 10^6\ \text{mm}^4$.

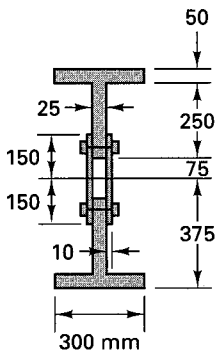


Fig. P10-10

10-11. Una trabe armada resistente al cortante para una aeronave está hecha de cuatro ángulos de $50 \times 40 \times 3$ mm ($A = 270\ \text{mm}^2$ para cada ángulo) y un alma de 1.63 mm de espesor, como se muestra en la figura. Despreciando el forro, el momento de inercia de esta sección es de $47.6 \cdot E + 06\ \text{mm}^4$. Los remaches A son de 4.76 mm

de diámetro y están espaciados longitudinalmente a 30 mm en cada fila. Esos remaches resisten 3.56 kN cada uno en cortante simple. Si una fuerza cortante de 25 kN debe transmitirse por esta sección, ¿qué factor de seguridad se tiene en los remaches? En los cálculos no haga reducción en áreas por los agujeros de los remaches.

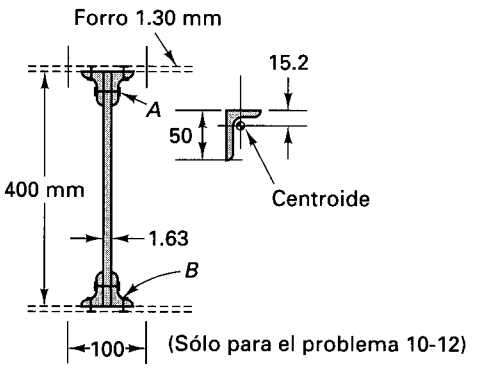


Fig. P10-11 y P10-12

10-12. Suponga que en el problema anterior, 100 mm del forro pueden incluirse arriba y abajo en el momento de inercia de la sección. Luego, suponiendo un espaciamiento de 30 mm para los remaches A y 50 mm para cada fila de los remaches B, calcule los esfuerzos cortantes en los remaches debido a una fuerza cortante V = 25 kN.

Secciones 10-4 y 10-5

10-13. Demuestre que una fórmula, análoga a la ecuación 10-8a, para vigas con sección transversal circular maciza de área A, es $\tau_{máx} = \frac{4}{3}V/A$.

10-14. Demuestre que una fórmula, análoga a la ecuación 10-8a, para tubos circulares de pared delgada que actúan como vigas con área transversal neta A es $\tau_{máx} = 2V/A$.

10-15. Una viga T tiene la sección transversal mostrada en la figura. Calcule los esfuerzos cortantes para las seis secciones horizontales indicadas cuando la viga transmite una fuerza cortante vertical de 240 kN. Grafique los resultados como en la figura 10-16(e).

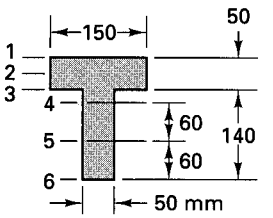


Fig. P10-15

10-16. Una viga en caja tiene la sección transversal mostrada en la figura. Calcule los esfuerzos cortantes en varias secciones horizontales cuando el momento flexionante de la viga cambia a lo largo de ésta a razón de 500 kN · m/m y grafique los resultados como en la figura 10-16(e).

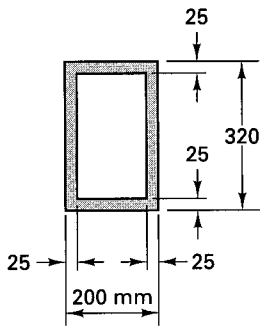


Fig. P10-16

10-17. Un perfil extruido de pared delgada tiene una sección transversal en forma de triángulo isósceles, como se muestra en la figura. Usando la ecuación 10-6, determine los esfuerzos cortantes a media altura y al nivel del centroide de la sección transversal correspondientes a la fuerza cortante vertical $V = 100$ kN. Calcule las propiedades aproximadas de la sección usando las *dimensiones de línea central* mostradas en el detalle. (*Sugerencia*: Para un área rectangular inclinada, $I = bLh^2/12$, donde b es el ancho, L la longitud y h la altura vertical. Justifique esto antes de usarlo.)

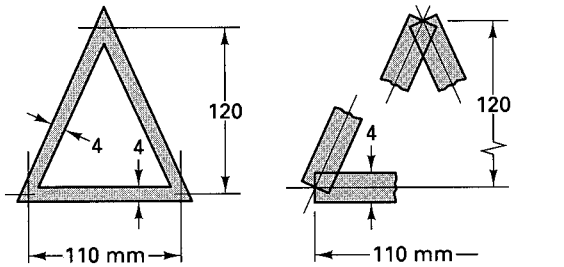


Fig. P10-17

10-18. Una viga tiene un área transversal en forma de triángulo isósceles cuya base b es igual a la mitad de su altura h. (a) Usando cálculo y la fórmula convencional de análisis de esfuerzos, determine la localización del esfuerzo cortante máximo causado por una fuerza cortante vertical V. Dibuje la manera en que varía el esfuerzo cortante a través de la sección. (b) Si $b = 25$ mm, $h = 50$ mm y $\tau_{máx}$ está limitado a 100 MPa, ¿cuál es la fuerza cortante máxima vertical V que esta sección puede tomar?

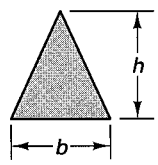


Fig. P10-18

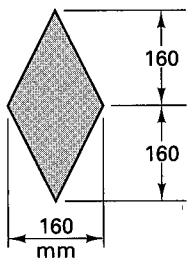
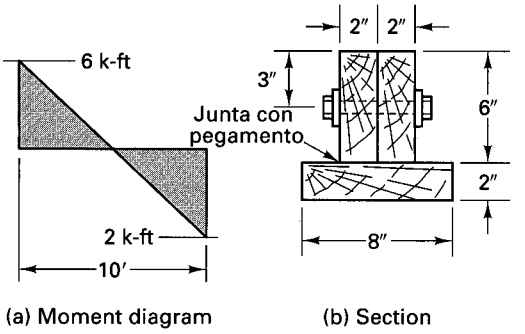


Fig. P10-19

10-19. Una viga tiene una sección transversal en forma de rombo, como se muestra en la figura. Suponga que esta viga transmite una fuerza cortante vertical de 5000 N y determine los esfuerzos cortantes a cada 40 mm, comenzando desde arriba. Registre los resultados sobre una gráfica similar a la mostrada en la figura 10-16(e).

10-20. Una viga está cargada de tal manera que el diagrama de momentos varía como se muestra en la figura. (a) Encuentre la fuerza cortante longitudinal máxima que actúa sobre los tornillos de $\frac{1}{2}$ in de diámetro separados entre sí a 12 in. (b) Encuentre el esfuerzo cortante en la junta unida con pegamento.



(a) Moment diagram (b) Section

Fig. P10-20

10-21. Una viga tiene las dimensiones transversales mostradas en la figura. Si los esfuerzos permisibles son de 100 MPa en tensión, 200 MPa en compresión y de 50 MPa en cortante, ¿cuál es la fuerza cortante máxima permisible y el momento flexionante máximo permisible para esta viga? Considere sólo la carga vertical de la viga y limite los cálculos para el cortante a las secciones *a-a* y *b-b*.

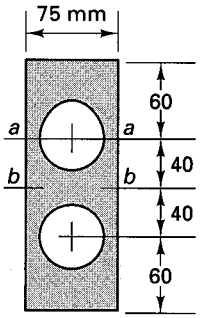


Fig. P10-21

10-22. Una viga I de madera está hecha con un patín inferior estrecho debido a limitaciones de espacio, como se muestra en la figura. El patín inferior está sujeto al alma con clavos espaciados longitudinalmente a cada 6 in y los tablones verticales en el patín inferior están unidos con pegamento. Determine el esfuerzo en las juntas pegadas y la fuerza tomada por cada clavo en la junta clavada si la viga está sometida a una fuerza cortante vertical de 400 lb. El momento de inercia de toda la sección respecto al eje neutro es de 2640 in^4.

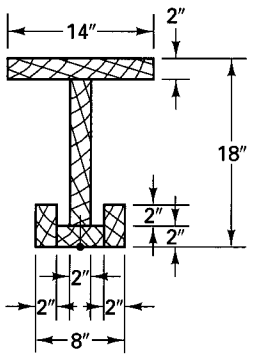


Fig. P10-22

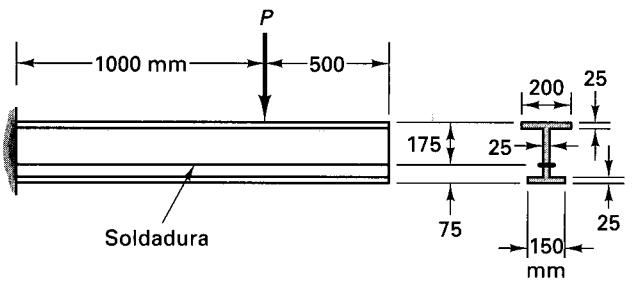


Fig. P10-23

10-23. Una viga de acero en voladizo está fabricada con dos T estructurales soldadas entre sí como se muestra en la figura. Determine la fuerza P permisible que la viga puede tomar si el esfuerzo permisible por flexión es de 150 MPa; en cortante, es de 100 MPa y a lo largo de la soldadura es de 2 MN/m. Desprecie el peso de la viga.

10-24. Una viga en caja está hecha clavando tableros laterales de madera contrachapada a dos piezas longitudinales, como se muestra en la figura. Si el esfuerzo cortante permisible para la madera contrachapada es de 1.5 MPa y la resistencia cortante permisible por clavo es de 500 N, determine la fuerza cortante vertical permisible máxima para este miembro.

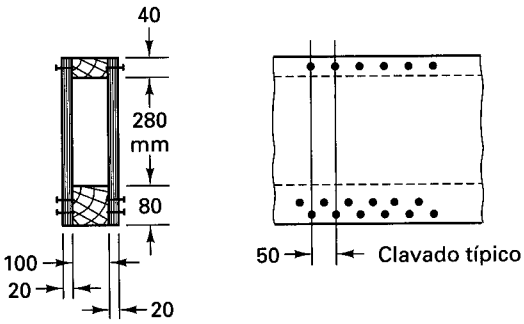


Fig. P10-24

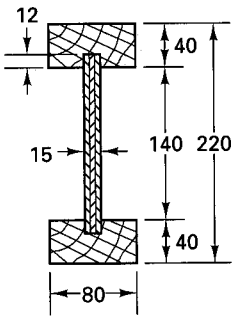


Fig. P10-25

10-25. Un larguero de madera con sus dimensiones transversales, en mm, dadas en la figura, estará hecho con patines de pino Douglas y alma de madera contrachapada grado estructural. Si el esfuerzo cortante permisible en la madera contrachapada es de 2 MPa, ¿qué resistencia debe especificarse para el pegamento en las interfaces entre los patines y el alma para tener un diseño balanceado en cortante?

10-26. Una viga está hecha de cuatro piezas de 50 × 100 mm de pino Douglas unidas con pegamento a un alma de 25 × 500 mm de madera contrachapada de pino Douglas, como se muestra en la figura. Determine la fuerza cortante máxima permisible y el momento flexionante máximo permisible que esta sección puede tomar si el esfuerzo de flexión permisible es de 10 MPa; el esfuerzo cortante permisible en la madera contrachapada es de 600 kN/m^2 y el esfuerzo cortante permisible en las juntas con pegamento es de 300 kN/m^2. Todas las dimensiones en la figura están en milímetros.

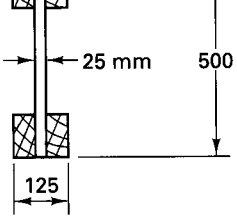


Fig. P10-26

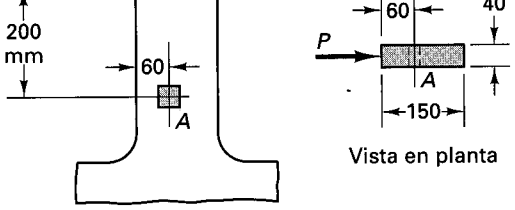


Fig. P10-27

10-27. Calcule los esfuerzos de flexión y cortantes debido a la fuerza aplicada P actuando sobre el elemento A del voladizo mostrado en la figura y muestre esos elementos actuando sobre un croquis aislado del elemento.

10-28. Una viga W14 × 90 soporta una carga uniformemente distribuida de 4 k/ft, incluido su peso propio, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos de flexión y cortantes que actúan sobre los elementos *A* y *B*. Muestre la magnitud y sentido de las cantidades calculadas sobre elementos infinitesimales.

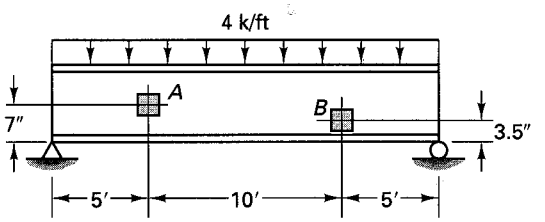


Fig. P10-28

10-29. Aísle el elemento sombreado de 100 × 150 × 200 mm de la viga rectangular que tiene una sección transversal de 200 × 300 mm y está cargada como se muestra en la figura. Sobre un diagrama de cuerpo libre, indique la localización, magnitud y sentido de todas las fuerzas resultantes debido a los esfuerzos de flexión y cortantes que actúan sobre este segmento. Ignore el peso de la viga.

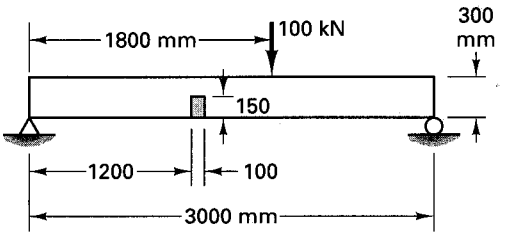


Fig. P10-29

10-30. Dos placas de acero están unidas a un núcleo de aluminio formando una viga sandwich que tiene la sección transversal mostrada en la figura. Si esta viga está cargada de manera que el momento flexionante cambia a razón de 5 kN·m/m, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo desarrollado en el miembro? Para el acero, E_{ac} = 210 GPa; para el aluminio, E_{al} = 70 GPa. (*Sugerencia*: El patrón de la distribución de esfuerzos puede establecerse, como se muestra en la figura 8-7(c) y sólo el cambio en momento flexionante por distancia unitaria a lo largo de la viga tiene que ser considerado, como se muestra en la figura 10-2(d). Alternativamente, puede usarse una sección transformada, como se vio en la sección 8-9.)

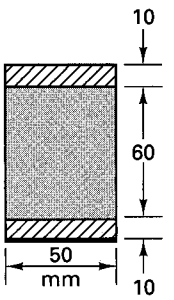


Fig. P10-30

10-31. La sección transversal de una viga de dos materiales diferentes tiene las dimensiones mostradas en la figura. El módulo elástico para los miembros verticales del alma es $E_w = 200$ MPa y el del material para las cinco piezas de los patines es $E_f = 100$ MPa. Si la fuerza cortante vertical transmitida por este miembro es de 20 kN, (a) ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en el alma? (b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo entre las almas y el material de los patines? (Véase la sugerencia en el problema anterior.)

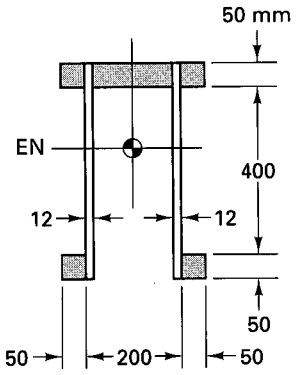


Fig. P10-31

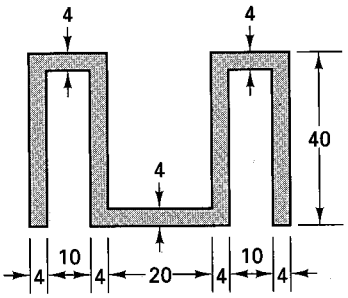


Fig. P10-32

10-32. Una viga de aluminio extruido tiene las dimensiones transversales, en mm, mostradas en la figura. Debido a una fuerza cortante vertical $V = 10$ kN, determine los esfuerzos cortantes en las paredes verticales del miembro en la sección horizontal que pasa por el centroide de la sección.

10-33. Las dimensiones de la sección transversal de una viga de material sintético termoplástico se dan en mm en la figura. En todas partes, el espesor del miembro es de 3 mm. (a) Calcule el momento de inercia I de toda la sección transversal respecto al eje centroidal horizontal. Use dimensiones de línea central como se muestra en el problema 10-17. (b) Determine las magnitudes de los esfuerzos cortantes en las secciones *a-a*, *b-b* y *c-c* debido a la fuerza cortante vertical $V = 10$ kN.

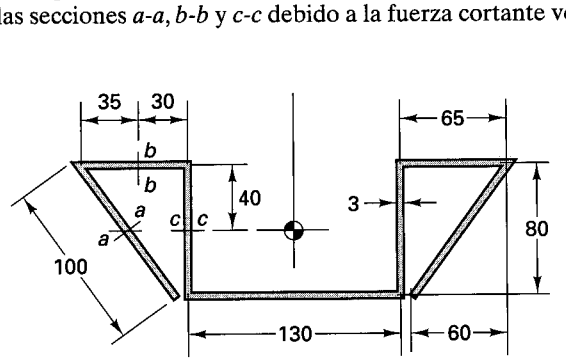


Fig. P10-33

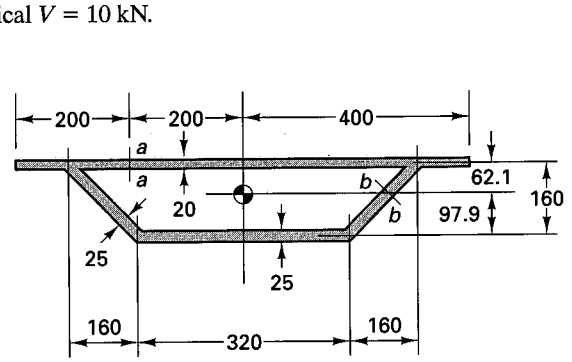


Fig. P10-34

10-34. Una viga en caja metálica tiene la sección transversal mostrada, en mm, en la figura. Si V/I es 0.006 N/mm^4, ¿qué esfuerzos cortantes se presentan en las secciones *a–a* y *b–b*? Se da el centroide de la sección transversal. Use dimensiones de línea central para calcular las propiedades del área. (Véase el problema 10-17.) (*Sugerencia*: Aproveche la simetría.)

10-35. Una viga metálica está hecha de cuatro ángulos de 30 × 24 × 4 mm y unida con un número adecuado de pernos a una placa de alma de 100 × 4 mm, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos cortantes en la sección *a-a*. Sea $V/I = 0.01\ \text{N/mm}^4$.

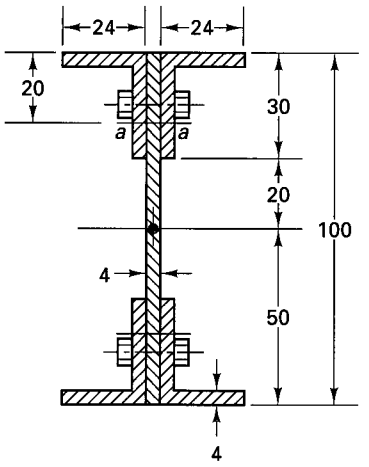


Fig. P10-35

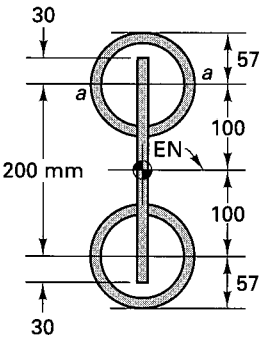


Fig. P10-36

10-36. Una viga es fabricada ranurando longitudinalmente tubos estándar de acero de 102 mm de diámetro nominal y soldándolos a una placa de alma de 260 × 10 mm, como se muestra en la figura. Si, en cierta sección, esta viga transmite una fuerza cortante vertical de 200 kN, determine el esfuerzo cortante en el tubo y en la placa del alma a un nivel 100 mm arriba del eje neutro.

10-37. Una viga compuesta simplemente apoyada que soporta una carga uniforme sobre un claro de 10 m se fabrica atornillando un tablón de 100 × 300 mm al patín superior de una viga de acero, como se muestra en la figura. (Todas las dimensiones en la figura están en milímetros.) Extensómetros situados a medio claro sobre las superficies interiores de los patines de acero registran las deformaciones unitarias siguientes: Extensómetro *A*: $\varepsilon = -420 \times 10^{-6}$; extensómetro *B*: $\varepsilon = +700 \times 10^{-6}$. (a) Calcule la fuerza total que actúa sobre la madera en esta sección. (b) Si los tornillos se colocan dos por fila a 600 mm de distancia uniforme entre ellos, ¿cuál es la fuerza cortante promedio tomada por cada tornillo? Suponga que cada tornillo contribuye igualmente a resistir la fuerza total. Sean $E_{ac} = 200$ GPa y $E_{mad} = 10$ GPa.

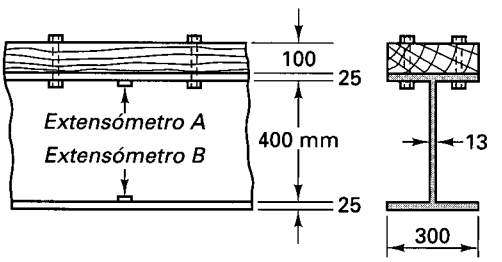


Fig. P10-37

Secciones 10-7 y 10-8

10-38. Una viga que tiene una sección transversal con las dimensiones en mm mostradas en la figura, está en una región donde se tiene una fuerza cortante vertical constante de 100 kN. (a) Calcule el flujo de cortante q que actúa en cada una de las cuatro secciones indicadas en la figura. (b) Suponiendo un momento flexionante positivo de 27 kN·m en una sección y un momento mayor en la sección adyacente situada a 10 mm de distancia, esboce croquis isométricos de cada segmento de la viga aislados por las secciones a 10 mm entre sí y las cuatro secciones mostradas en la figura, y en los croquis indique todas las fuerzas que actúan sobre los segmentos. Desprecie los esfuerzos cortantes verticales en los patines.

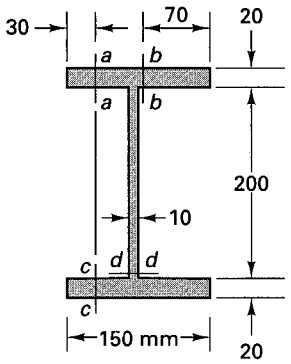


Fig. P10-38

10-39. Una viga con la sección transversal que tiene las dimensiones mostradas en la figura, transmite una fuerza cortante vertical $V = 7$ k aplicada en el centro de cortante. (a) Determine los esfuerzos cortantes en las secciones $a-a$, $b-b$ y $c-c$. El momento de inercia I respecto al eje neutro es de 35.7 in^4. El espesor del material es de $\frac{1}{2}$ in en todas partes. (b) Esboce la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de la línea central del miembro.

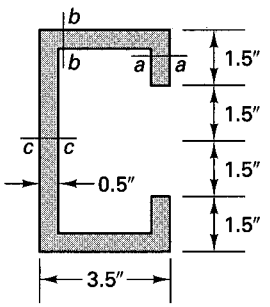


Fig. P10-39

10-40 al 10-44. Determine la posición del centro cortante para las vigas que tienen las secciones transversales mostradas en las figuras. Todos los miembros deben considerarse de pared delgada y los cálculos deben basarse en las dimensiones a lo largo de la línea central.

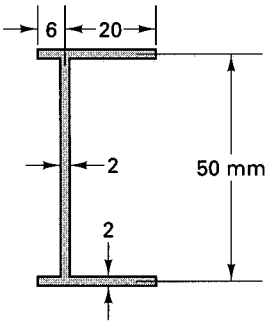


Fig. P10-40

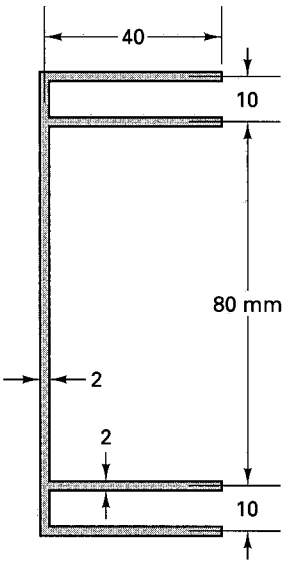


Fig. P10-41

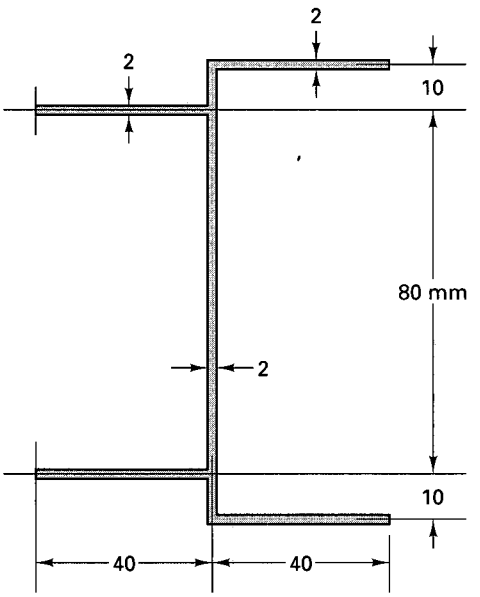


Fig. P10-42

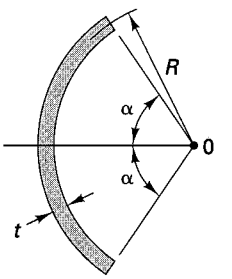


Fig. P10-43

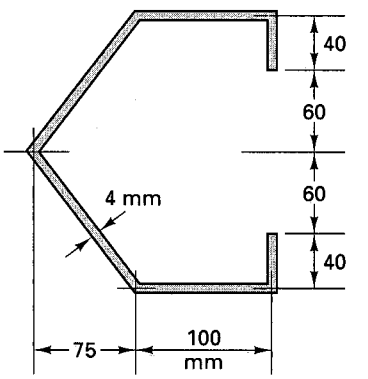


Fig. P10-44

10-45. Demuestre que para la sección transversal Z mostrada en la parte (a) de la figura, el centro cortante se encuentra sobre el eje vertical que pasa por el centroide de la sección. Demostrar que la fuerza resultante debido al flujo interno del cortante es cero en cada patín constituye una prueba. (*Sugerencia*: Aplique la fuerza cortante vertical V_y mostrada en la figura. Como la posición del centro cortante es independiente de la magnitud de la fuerza cortante V_y, ésta puede escogerse arbitrariamente. Igualmente, es la razón de cambio de M, como en la figura 10-2(d), más que su magnitud, lo que es de importancia. Por lo tanto, sea el cambio en momento ΔM en una distancia unitaria del claro igual a $V_y \times 1 = 10$ lb-in. Usando esta ΔM, calcule los esfuerzos a lo largo de la línea central de la sección Z usando la fórmula generalizada de la flexión, o sea la ecuación 9-33. Tales cálculos deben verificar la distribución del esfuerzo normal mostrada en la parte (b) de la figura. Integrando esos esfuerzos a lo largo de la línea central, como en la figura 10-20(b), se encuentra el flujo cortante en el plano de la sección que se muestra en la parte (c) de la figura. Las fuerzas resultantes de esos esfuerzos cortantes se cancelan en ambos patines.) Note que para la sección dada, $I_z = 2.133$ in^4, $I_y = 0.533$ in^4 e $I_{yz} = 0.800$ in^4.

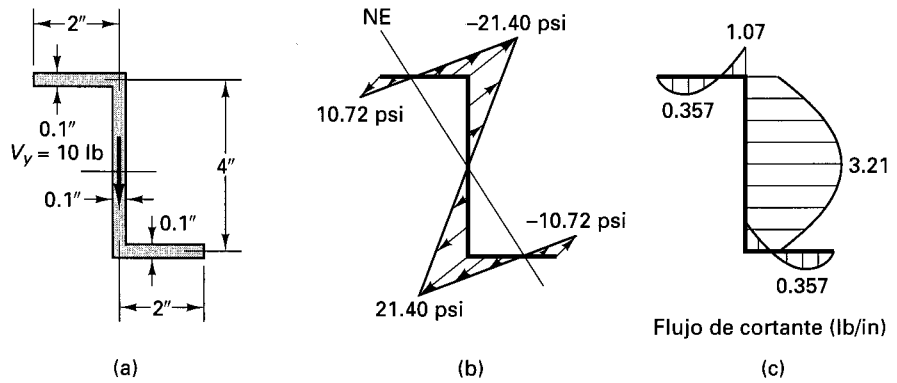


Fig. P10-45

10-46. Demuestre que para la sección transversal Z en el problema anterior, el centro de cortante se encuentra sobre la línea horizontal que pasa por el centroide de la sección. Demostrar que una fuerza horizontal es igualmente dividida entre los dos patines constituye una solución del problema. (*Sugerencia*: Aplique una fuerza horizontal V_z, digamos de 50 N, a través del centroide de la sección, y, como en el problema anterior, calcule los esfuerzos normales y cortantes en el plano de la sección transversal. Una gráfica auxiliar de los esfuerzos cortantes a lo largo de la línea central de la sección es útil en la solución. Note que la fuerza cortante resultante en el alma es cero.)

10-47 y 10-48. Determine la localización del centro de cortante para las vigas con secciones transversales idealizadas mostradas en las figuras respectivas. Desprecie las áreas de las placas que conectan los largueros longitudinales, cada uno de los cuales tiene un área efectiva A concentrada en un punto para resistir las fuerzas longitudinales. Hay dos áreas en la figura 10-47 y ocho en la figura 10-48. (Este tipo de idealización es usada a menudo en el diseño de aviones.)

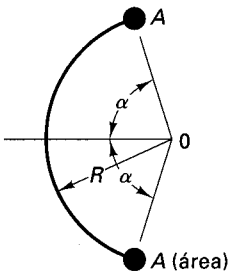


Fig. P10-47

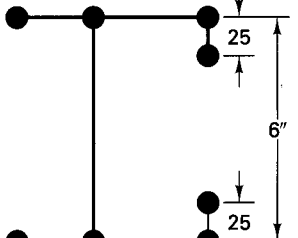


Fig. P10-48

Sección 10-9

10-49 al 10-51. Voladizos del tipo mostrado en la figura para el problema 10-49 están sometidos a fuerzas horizontales P que causan flexión, cortante directo y torsión. Determine los esfuerzos en las superficies debido a esas acciones en los puntos A y B y muestre los resultados sobre elementos infinitesimales aislados. Los elementos A deben verse desde arriba y los elementos B desde la izquierda. Use dimensiones de la línea central para la caja al calcular los esfuerzos torsionantes en el problema 10-49. Los detalles de aplicación de las fuerzas P no se muestran.

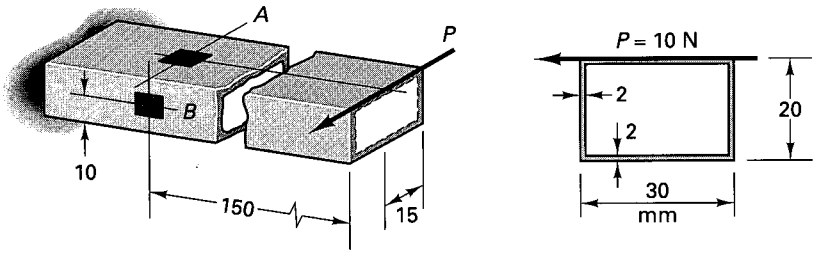


Fig. P10-49

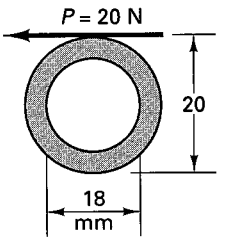


Fig. P10-50

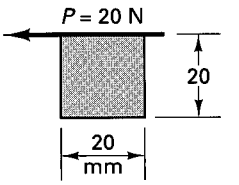


Fig. P10-51

Secciones 10-10 y 10-11

10-52. Un resorte helicoidal para una válvula está hecho de alambre de acero de $\frac{1}{4}$ in de diámetro y tiene un diámetro exterior de 2 in. En operación, la fuerza de compresión aplicada a este resorte varía entre un mínimo de 20 lb y un máximo de 70 lb. Si el resorte tiene ocho espiras activas, ¿cuál es la elevación (o recorrido) de la válvula y cuál es el esfuerzo cortante máximo en el resorte cuando está en operación? $G = 11.6 \times 10^6$ psi.

10-53. Si un resorte helicoidal de tensión consiste en 16 espiras de 6 mm de alambre de acero con 30 mm de diámetro exterior y está unido al extremo de otro resorte helicoidal de tensión con 18 espiras de 8 mm de alambre de acero con 40 mm de diámetro exterior, ¿cuál es la constante de resorte para este sistema de dos resortes? ¿Cuál es la fuerza máxima que puede aplicarse a esos resortes sin que se exceda un esfuerzo cortante de 480 MPa? $G = 82$ GN/m^2.

10-54. Un pesado resorte helicoidal de acero está hecho con una barra de 1 in de diámetro y tiene un diámetro exterior de 9 in. Como se fabrica originalmente, tiene un paso $p = 3\frac{1}{2}$ in; véase la figura. Si se aplica una fuerza P a este resorte de tal magnitud que el anillo exterior de $\frac{1}{8}$ in de espesor se plastifica, estime la reducción del paso del resorte al quitar la carga. Suponga un material linealmente elastoplástico con $\tau_{yp} = 50$ ksi y $G = 12 \times 10^3$ ksi. Desprecie los efectos de la concentración de esfuerzos y del cortante directo sobre la deflexión.

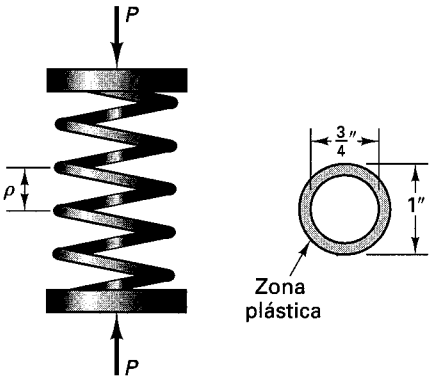


Fig. P10-54

11

Transformación de esfuerzos y deformaciones unitarias

11-1. Introducción

En las dos partes de este capítulo se analiza un procedimiento formal para cambiar las componentes del estado de esfuerzo o deformación unitaria dados en un conjunto de ejes coordenados, a otro conjunto de ejes girados. Esta transformación del esfuerzo o de la deformación unitaria entre dos diferentes conjuntos de ejes coordenados es un proceso matemático y no requiere necesariamente del uso de fórmulas deducidas antes. La conexión entre las fórmulas establecidas para el análisis de esfuerzos y la transformación del esfuerzo, se considera en el capítulo 13. La transformación del esfuerzo se analiza en la Parte A de este capítulo; la transformación de la deformación unitaria, en la Parte B. En ambos casos, *el análisis se confina principalmente a problemas en dos dimensiones*. La posibilidad de transformar un estado dado de esfuerzo que implique esfuerzos normales y cortantes a cualquier otro conjunto de ejes coordenados girados, permite examinar el efecto de tales esfuerzos sobre un material. De esta manera pueden hacerse hipótesis relativas a los criterios de fluencia o de fractura. Este importante tema se tratará en el siguiente capítulo.

Parte A TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS

11-2. El problema básico

En varios de los capítulos precedentes se consideraron los esfuerzos causados por acciones separadas que dan lugar a esfuerzos normales y/o cortantes. La superposición de esfuerzos normales actuando sobre el mismo elemento, cuando fuerzas axiales y momentos flexionantes ocurren simultáneamente, fue analizada en el capítulo 9. De manera similar, la superposición de los esfuerzos cortantes causados por pares de torsión y fuerzas cortantes, fue considerada en el capítulo 10. Además, en el capítulo 5, Sección 5-7, se demostró que un estado de cortante puro puede transformarse en un estado *equivalente* de esfuerzos normales (fig. 5-11). En el análisis de esfuerzos surge a menudo un problema más general, como se muestra en la figura 11-1(a). En el caso que se ilustra, el elemento A está sometido a un esfuerzo normal σ_x debido a una tensión axial y un momento de flexión, y *simultáneamente* experimenta un esfuerzo cortante directo τ_{xy}. El esfuerzo normal combinado σ_x se obtiene por superposición. Sin embargo, la combinación del esfuerzo normal σ_x con el esfuerzo cortante τ_{xy} requiere un tratamiento especial. Esencialmente, se requiere una combinación de esfuerzos sobre un plano inclinado, como el que se muestra en la figura 11-1(b). Como un plano inclinado puede escogerse arbitrariamente, el estado de esfuerzo en un punto puede describirse en un *número infinito de maneras* que son todas *equivalentes*.

El esfuerzo tiene una magnitud y un sentido y está *también* asociado con el área sobre la que actúa. Tales entidades matemáticas son *tensores* y son de un orden superior a los vectores.[1] Sin embargo, las componentes del esfuerzo sobre la *misma área* son vectores. Esas componentes de esfuerzo pueden superponerse por *adición vectorial*. Esto se hizo así en los capítulos 9 y 10. Por tanto, los esfuerzos pueden llamarse *vectores esfuerzo* o *tracciones*, siempre que actúen sobre la misma superficie en o sobre un cuerpo. Sólo un cambio en la orientación de un área muestra el carácter no vectorial del esfuerzo como un todo.

En el análisis que sigue se evita el uso directo de vectores esfuerzo multiplicando los esfuerzos por sus áreas respectivas para obtener fuerzas que sí son vectores y luego sumándolas vectorialmente. Para obtener las componentes de fuerzas sobre un plano inclinado, el proceso se invierte dividiendo esas componentes de fuerzas entre el área inclinada para obtener los esfuerzos en esos planos.

Este procedimiento será primero ilustrado con un ejemplo numérico. Luego se generalizará el enfoque desarrollado para obtener relaciones algebraicas para una transformación de esfuerzos que determine los esfuerzos sobre cualquier plano inclinado a partir de un estado de esfuerzo dado.

[1]Los *escalares* son tensores de rango cero, los *vectores* son tensores de primer rango y los esfuerzos y las deformaciones unitarias son tensores de segundo rango. Véase la Sección 1-4.

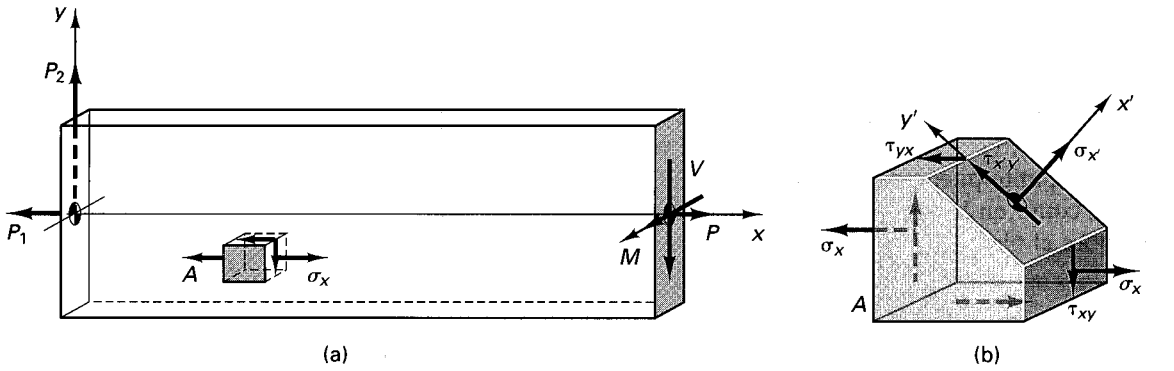


Fig. 11-1 Estado de esfuerzo en un punto sobre diferentes planos.

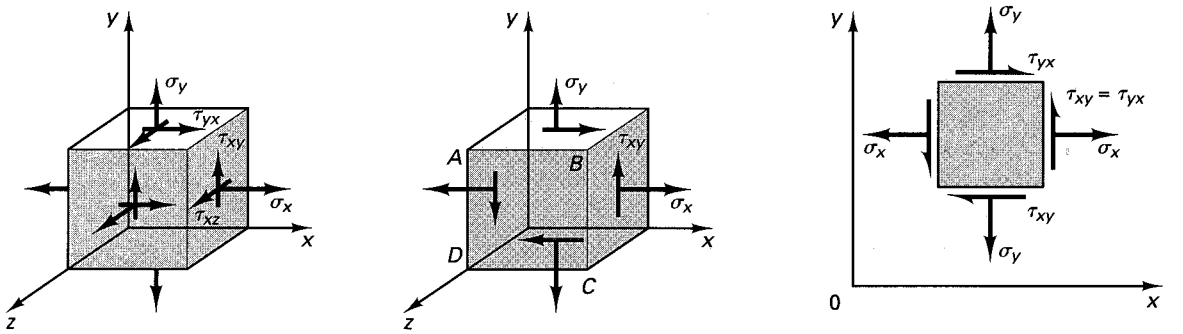


Fig. 11-2 Representaciones de los esfuerzos que actúan sobre un elemento.

Los métodos usados en esas deducciones no implican las propiedades del material. Por lo tanto, si los esfuerzos iniciales son dados, las relaciones obtenidas serán aplicables si el material se comporta elástica o plásticamente o incluso si el material no es sólido. Sin embargo, los planos sobre los que los esfuerzos normales o cortantes alcanzan su *intensidad máxima* tienen un efecto particularmente importante sobre los materiales.

El estado de esfuerzo general mostrado en la figura 11-2(a) no será considerado en la deducción de las leyes de la transformación de esfuerzos en un punto. Más bien, se estudiará el problema de esfuerzos bidimensionales indicado en la figura 11-2(b). En aplicaciones prácticas, éste es un caso particularmente importante ya que es usualmente posible seleccionar un elemento crítico en la frontera exterior de un miembro. La cara exterior de un elemento tal, como la $ABCD$ en la figura, está generalmente libre de esfuerzos superficiales importantes, mientras que los esfuerzos que actúan justo sobre la superficie paralelamente a ésta son usualmente los más grandes. La representación en un plano de los esfuerzos, como se muestra en la figura 11-2(c), será usada en la mayor parte de las deducciones y ejemplos.

Ejemplo 11-1

Sea el estado de esfuerzo para un elemento de espesor unitario el mostrado en la figura 11-3(a). Una representación alternativa del estado de esfuerzo en el mismo punto puede darse sobre una cuña infinitesimal con un ángulo $\alpha = 22\frac{1}{2}°$, como en la figura 11-3(b). Encuentre los esfuerzos que deben actuar sobre el plano AB de la cuña para mantener al elemento en equilibrio.

SOLUCIÓN

La cuña ABC es parte del elemento en la figura 11-3(a); por tanto, los esfuerzos sobre las caras AC y BC son conocidos. Los esfuerzos desconocidos normal y cortante que actúan sobre la cara AB son designados en la figura por δ_α y τ_α, respectivamente. Sus sentidos se suponen arbitrariamente.

Para determinar σ_α y τ_α, sólo por conveniencia, sea el área de la cara definida por la línea AB igual a 1 m^2. Entonces, el área correspondiente a la línea AC es igual a $1 \times \cos \alpha = 0.924$ m^2 y a la BC es igual a $1 \times \text{sen } \alpha = 0.383$ m^2. (Más rigurosamente, el área correspondiente a la línea AB debe tomarse como dA, pero esta cantidad se cancela en las subsecuentes expresiones algebraicas.) Las fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4, figura 11-3(c), pueden obtenerse multiplicando los esfuerzos por sus áreas respectivas. Las fuerzas equilibrantes desconocidas N y S actúan, respectivamente, normal y tangencialmente al plano AB. Entonces, aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a las fuerzas que actúan sobre la cuña, obtenemos las fuerzas N y S:

$$F_1 = 3 \times 0.924 = 2.78 \text{ MN} \quad F_2 = 2 \times 0.924 = 1.85 \text{ MN}$$

$$F_3 = 2 \times 0.383 = 0.766 \text{ MN} \quad F_4 = 1 \times 0.383 = 0.383 \text{ MN}$$

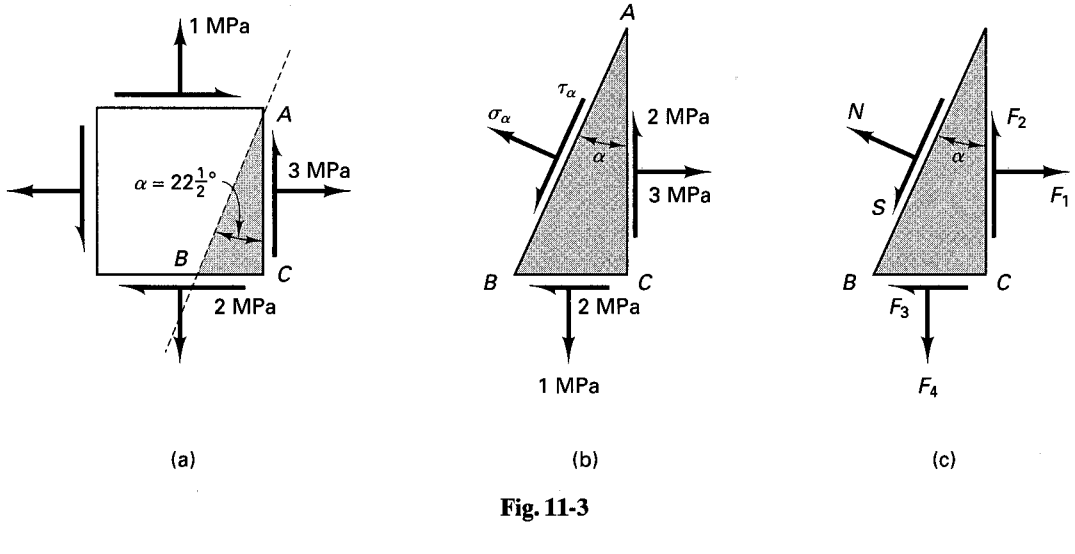


Fig. 11-3

$$\sum F_N = 0 \qquad N = F_1 \cos\alpha - F_2 \operatorname{sen}\alpha - F_3 \cos\alpha + F_4 \operatorname{sen}\alpha$$

$$= 2.78(0.924) - 1.85(0.383) - 0.766(0.924) + 0.383(0.383)$$

$$= 1.29 \text{ MN}$$

$$\sum F_S = 0 \qquad S = F_1 \operatorname{sen}\alpha + F_2 \cos\alpha - F_3 \operatorname{sen}\alpha - F_4 \cos\alpha$$

$$= 2.78(0.383) + 1.85(0.924) - 0.766(0.383) - 0.383(0.924)$$

$$= 2.12 \text{ MN}$$

Las fuerzas N y S actúan sobre el plano definido por AB, que se supuso inicialmente con un área de 1 m^2. Sus signos positivos indican que sus direcciones supuestas se escogieron correctamente. Dividiendo esas fuerzas entre el área en que actúan, se obtienen los esfuerzos que actúan sobre el plano AB. Así entonces, $\sigma_\alpha = 1.29$ MPa y $\tau_\alpha = 2.12$ MPa y actúan en la dirección mostrada en la figura 11-3(b).

Con el procedimiento anterior se logró algo sorprendente: Se transformó la *descripción* del estado de esfuerzo de un conjunto de planos a otro. Cualquier sistema de esfuerzos perteneciente a un elemento infinitesimal describe el estado de esfuerzo en el mismo punto de un cuerpo.

El procedimiento de aislar una cuña y usar las ecuaciones del equilibrio de fuerzas para determinar los esfuerzos sobre planos inclinados es fundamental. Las convenciones ordinarias de signos de la estática son suficientes para resolver cualquier problema. Se aconseja al lector volver a consultar este enfoque siempre que surjan dudas en los procedimientos más avanzados desarrollados en el resto de este capítulo.

11-3. Transformación de esfuerzos en problemas bidimensionales

Siguiendo el mismo procedimiento que en el último ejemplo, pueden obtenerse ecuaciones en forma algebraica para los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre un plano inclinado. Tales expresiones se llaman ecuaciones de transformación de esfuerzos. Esas ecuaciones se basan en los esfuerzos inicialmente dados que actúan sobre un elemento de orientación conocida y en el plano que se está investigando, definido por una normal a él. La dependencia de los esfuerzos respecto a la inclinación del plano es clara.

Las ecuaciones algebraicas se desarrollan usando un elemento de espesor unitario en la figura 11-4(a) en un estado de esfuerzo bidimensional

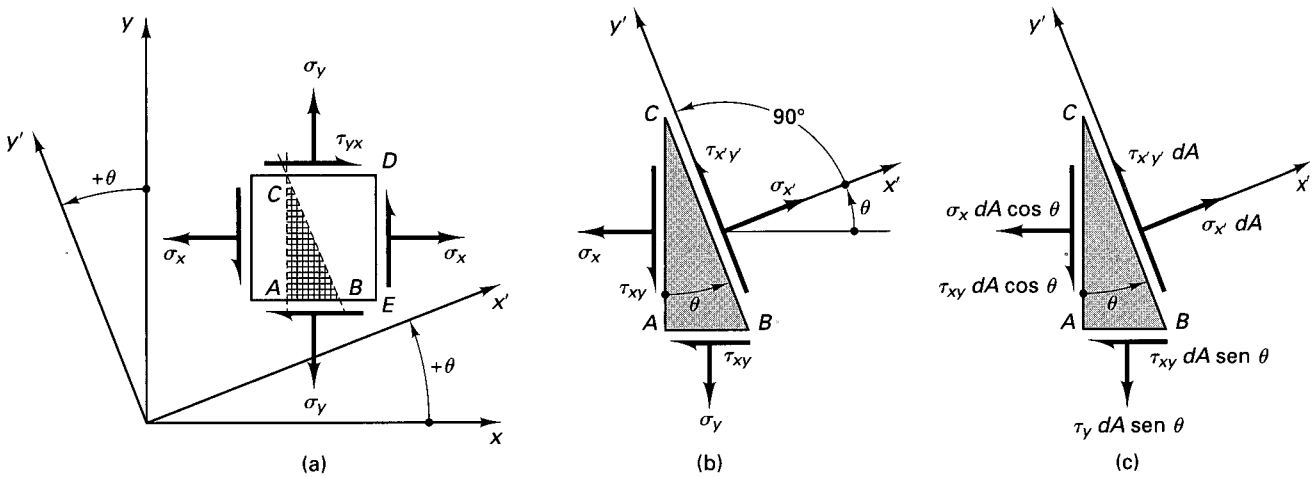


Fig. 11-4 Obtención de la transformación del esfuerzo sobre un plano inclinado.

inicialmente referido a los ejes xy. Si los esfuerzos normales σ_x y σ_y son esfuerzos de tensión, se consideran como positivos, y negativos si son de compresión. *Un esfuerzo cortante se define como positivo si actúa hacia arriba, en la dirección positiva del eje y sobre la cara derecha (positiva) DE del elemento.* La convención de signos para los esfuerzos cortantes se introdujo en el capítulo 1 (véase la fig. 1-3) y se usa generalmente en la mecánica del medio continuo (elasticidad, plasticidad, reología). Sin embargo, *difiere* de la convencional *convención de signos del cortante en vigas* usada en los capítulos 7 y 10. Aquí, la transformación de esfuerzos se quiere de los ejes coordenados xy a los ejes $x'y'$. El ángulo θ que localiza el eje x es positivo cuando se mide del eje x hacia el eje y en sentido antihorario.

La *normal hacia afuera* a la sección forma un ángulo θ con el eje x. Si un área de la cuña aislada por esta sección es dA, las áreas asociadas con las caras AC y AB son $dA \cos\theta$ y $dA \operatorname{sen}\theta$, respectivamente. Multiplicando los esfuerzos por sus áreas respectivas, se construye un diagrama con las fuerzas que actúan sobre la cuña, figura 11-4(c). Luego, aplicando las ecuaciones de equilibrio estático a las fuerzas que actúan sobre la cuña, se obtienen los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\tau_{xy'}$:

$$\sum F_{x'} = 0 \quad \sigma_{x'} dA = \sigma_x dA \cos\theta \cos\theta + \sigma_y dA \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta + \tau_{xy} dA \cos\theta \operatorname{sen}\theta + \tau_{xy} dA \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$= \sigma_x \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (11\text{-}1)$$

Similarmente, de $\Sigma F_{y'} = 0$,

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (11\text{-}2)$$

Las ecuaciones 11-1 y 11-2 son las expresiones generales para el esfuerzo normal y el cortante, respectivamente, sobre cualquier plano localizado por el ángulo θ y causado por un sistema conocido de esfuerzos. Esas relaciones son las ecuaciones para la transformación del esfuerzo de un conjunto de ejes coordenados a otro. Note particularmente que σ_x, σ_y y τ_{xy} son esfuerzos inicialmente conocidos.

Reemplazando θ en la ecuación 11-1 por $\theta + 90°$ se obtiene el esfuerzo normal en la dirección del eje y'. Este esfuerzo puede ser designado por $\sigma_{y'}$; véase la figura 1-3(b). Por consiguiente, notando que $\cos(2\theta + 180°) = -\cos 2\theta$ y $\text{sen}(2\theta + 180°) = -\text{sen}\,2\theta$, se tiene

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (11\text{-}3)$$

Sumando las ecuaciones 11-1 y 11-3

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \qquad (11\text{-}4)$$

lo que significa que la suma de los esfuerzos normales sobre dos planos perpendiculares cualquiera permanece constante[2] (es decir, *invariable*), independientemente del ángulo θ.

Ecuaciones matemáticamente análogas se encontraron en la Sección 9-7 en conexión con momentos y productos de inercia de áreas. Las ecuaciones de transformación en ambos casos son similares.

Debe notarse que en problemas de *deformación unitaria plana* para un material linealmente elástico, donde $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, un esfuerzo normal σ_z puede también desarrollarse. Según la ecuación 5-14c, este esfuerzo es dado por

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \qquad (11\text{-}5)$$

Las fuerzas que resultan de este esfuerzo no entran en las ecuaciones relevantes de equilibrio usadas al obtener las expresiones para la transformación del esfuerzo. Además, en virtud de la ecuación 11-4, el término $\sigma_x + \sigma_y$ en la ecuación 11-5 permanece constante independientemente de θ. Por lo tanto, las ecuaciones obtenidas para la transformación del esfuerzo son aplicables a problemas de *esfuerzo plano* así como de *deformación unitaria plana*.

[2]Una relación similar para problemas tridimensionales es $\sigma_{x'} + \sigma_{y'} + \sigma_{z'} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

11-4. Esfuerzos principales en problemas bidimensionales

A menudo el interés se centra en la determinación del máximo esfuerzo posible, como es dado por las ecuaciones 11-1 y 11-2, y entonces se encuentran primero los planos en que tales esfuerzos ocurren. Para encontrar el plano para un esfuerzo normal máximo o mínimo, la ecuación 11-1 se deriva con respecto a θ y la derivada se iguala a cero; es decir,

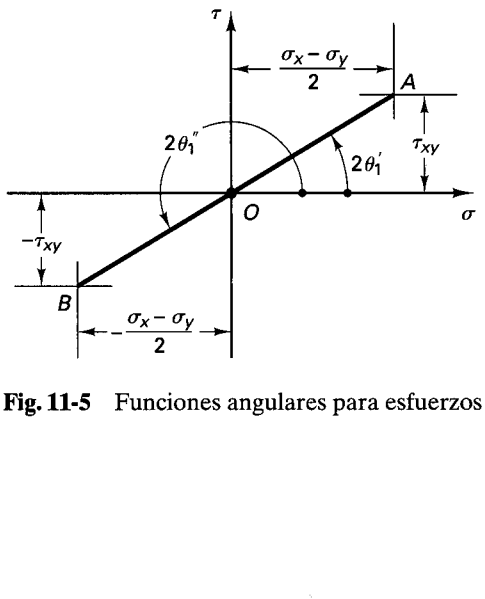
$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} 2 \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Por consiguiente

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \qquad (11\text{-}6)$$

donde el subíndice del ángulo θ se usa para designar el ángulo que define el plano del esfuerzo normal máximo o mínimo. La ecuación 11-6 tiene dos raíces, ya que el valor de la tangente de un ángulo en el cuadrante diametralmente opuesto es el mismo, como puede verse en la figura 11-5. Esas raíces están a 180° entre sí, y como la ecuación 11-6 es para un ángulo doble, las raíces de θ_1 están a 90° entre sí. Una de esas raíces localiza el plano sobre el cual actúa el esfuerzo normal máximo; la otra localiza el plano correspondiente al esfuerzo normal mínimo. Para distinguir entre esas dos raíces, se usa una prima y una doble prima como notación.

Antes de evaluar esos esfuerzos, observe cuidadosamente que si se quiere la posición de los planos en que no actúan esfuerzos cortantes, la ecuación 11-2 debe hacerse igual a cero. Esto da la misma relación que la ecuación 11-6. Por tanto, llegamos a una importante conclusión: Sobre planos en que ocurren esfuerzos normales máximos o mínimos, no se tienen



$$\overline{OA} = \overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta_1' = -\operatorname{sen} 2\theta_1'' = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\theta_1' = -\cos 2\theta_1'' = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

Fig. 11-5 Funciones angulares para esfuerzos principales.

esfuerzos cortantes. Esos planos se llaman *planos principales* de esfuerzo y los esfuerzos que actúan en esos planos, o sea los esfuerzos normales máximo y mínimo, se llaman *esfuerzos principales*.

Las magnitudes de los esfuerzos principales pueden obtenerse sustituyendo los valores de las funciones seno y coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación 11-6 en la ecuación 11-1. Entonces los resultados se simplifican y la expresión para el esfuerzo normal máximo (denotado por σ_1) y el esfuerzo normal mínimo (denotado por σ_2) toma la forma

$$(\sigma_x)_{\substack{\text{máx}\\ \text{mín}}} = \sigma_{1\,o\,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (11\text{-}7)$$

donde el signo positivo frente a la raíz cuadrada debe usarse para obtener σ_1 y el signo negativo para obtener σ_2. Los planos en que esos esfuerzos actúan pueden determinarse usando la ecuación 11-6. Una raíz particular de la ecuación 11-6 sustituida en la ecuación 11-1 verificará el resultado encontrado con la ecuación 11-4 y, al mismo tiempo, localizará el plano sobre el cual actúa este esfuerzo principal.

11-5. Esfuerzos cortantes máximos en problemas bidimensionales

Si σ_x, σ_y y τ_{xy} son conocidos para un elemento, el esfuerzo cortante sobre cualquier plano definido por un ángulo θ está dado por la ecuación 11-2 y puede hacerse un estudio del esfuerzo cortante similar al hecho antes para los esfuerzos normales. Entonces, de manera similar, para localizar los planos sobre los que actúan los esfuerzos cortantes máximo o mínimo, la ecuación 11-2 debe ser diferenciada con respecto a θ y la derivada igualada a cero. Al hacerlo así y simplificar los resultados, se obtiene

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{xy}} \qquad (11\text{-}8)$$

donde se pone el subíndice 2 a θ para designar el plano sobre el cual el esfuerzo cortante es máximo o mínimo. Igual que la ecuación 11-6, la ecuación 11-8 tiene dos raíces, que de nuevo pueden diferenciarse entre sí poniendo a θ_2 una prima o una doble prima. Los dos planos definidos por esta ecuación son mutuamente perpendiculares. Además, el valor de tan $2\theta_2$ dado por la ecuación 11-8 es el recíproco negativo del valor de tan $2\theta_1$ en la ecuación 11-6. Por consiguiente, las raíces para los ángulos dobles de la ecuación 11-8 están a 90° de las correspondientes raíces de la ecuación 11-6. Esto implica que los ángulos que localizan los planos de esfuerzo cortante máximo o mínimo forman ángulos de 45° con los planos de los esfuerzos principales. La sustitución en la ecuación 11-2 de las funciones seno y coseno correspondientes al ángulo doble dado por la ecuación 11-8 y determinadas como se hizo antes en la figura 11-5, da los valores máximo

y mínimo de los esfuerzos cortantes. Éstos, después de efectuar algunas simplificaciones, son

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{11-9}$$

El esfuerzo cortante máximo difiere entonces del esfuerzo cortante mínimo sólo en el signo. Además, como las dos raíces dadas por la ecuación 11-8 localizan planos a 90° entre sí, este resultado también significa que los valores numéricos de los esfuerzos cortantes sobre los planos mutuamente perpendiculares son los mismos. Este concepto fue repetidamente usado después de haber sido establecido en la Sección 1-4. En esta deducción, la diferencia en signo de los dos esfuerzos cortantes surge de la convención para localizar los planos sobre los que esos esfuerzos actúan. Desde un punto de vista físico, esos signos no tienen significado, y por esta razón, el esfuerzo cortante más grande, independientemente del signo, será a menudo llamado el *esfuerzo cortante máximo*.

El sentido del esfuerzo cortante puede siempre ser determinado por sustitución directa de la raíz particular de θ_2 en la ecuación 11-2. Un esfuerzo cortante positivo indica que actúa en el sentido supuesto en la figura 11-4(b) y viceversa. La determinación del esfuerzo cortante máximo es de la mayor importancia para materiales que son débiles en su resistencia al cortante. Esto se verá más ampliamente en el capítulo 12.

A diferencia de los esfuerzos principales para los cuales no se presentan esfuerzos cortantes sobre los planos principales, los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre planos que usualmente no están libres de esfuerzos normales. La sustitución de θ_2 de la ecuación 11-8 en la ecuación 11-1 muestra que los esfuerzos normales que actúan sobre los planos de los esfuerzos cortantes máximos son

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{11-10}$$

Por tanto, un esfuerzo normal actúa simultáneamente con el esfuerzo cortante máximo a menos que $\sigma_x + \sigma_y$ sea cero.

Si σ_x y σ_y en la ecuación 11-9 son esfuerzos principales, τ_{xy} es cero y la ecuación 11-9 se simplifica a

$$\tau_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{11-11}$$

Aquí es útil recordar una relación entre el cortante puro y los esfuerzos principales analizada antes en conexión con la figura 5-11. Los resultados de este análisis se muestran en la figura 11-6. La ecuación 11-6 muestra claramente que en ausencia de esfuerzos normales, los esfuerzos principales son numéricamente iguales al esfuerzo cortante. El sentido de los esfuerzos normales se obtiene con la ecuación 11-6. Los esfuerzos cortantes actúan hacia la diagonal DF en la dirección de los esfuerzos principales de tensión; véase la figura 11-6(a).

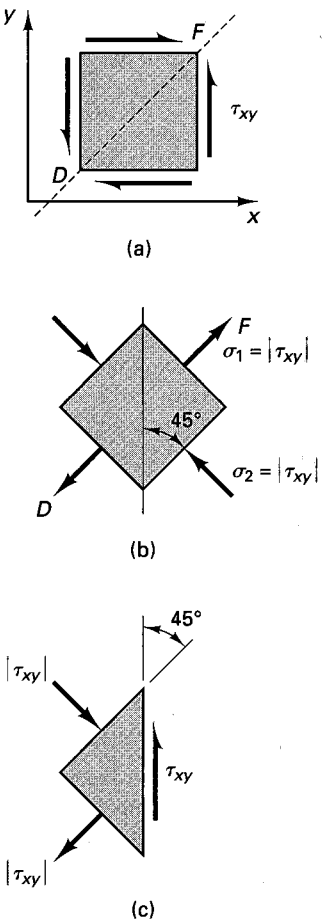


Fig. 11-6 Representaciones equivalentes para un esfuerzo cortante puro.

Ejemplo 11-2

Para el estado de esfuerzo en el ejemplo 11-1, reproducido en la figura 11-7(a), (a) resuelva el problema previo para $\theta = -22\frac{1}{2}°$, usando las ecuaciones generales para la transformación de esfuerzos; (b) encuentre los esfuerzos principales y muestre sus sentidos sobre un elemento apropiadamente orientado; y (c) encuentre los esfuerzos cortantes máximos con los esfuerzos normales asociados y muestre los resultados sobre un elemento apropiadamente orientado.

SOLUCIÓN

(a) Por aplicación directa de las ecuaciones 11-1 y 11-2 para $\theta = -22\frac{1}{2}°$, con $\sigma_x = +3$ MPa, $\sigma_y = +1$ MPa y $\tau_{xy} = +2$ MPa, se tiene

$$\sigma_{x'} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2}\cos(-45°) + 2\,\text{sen}(-45°)$$

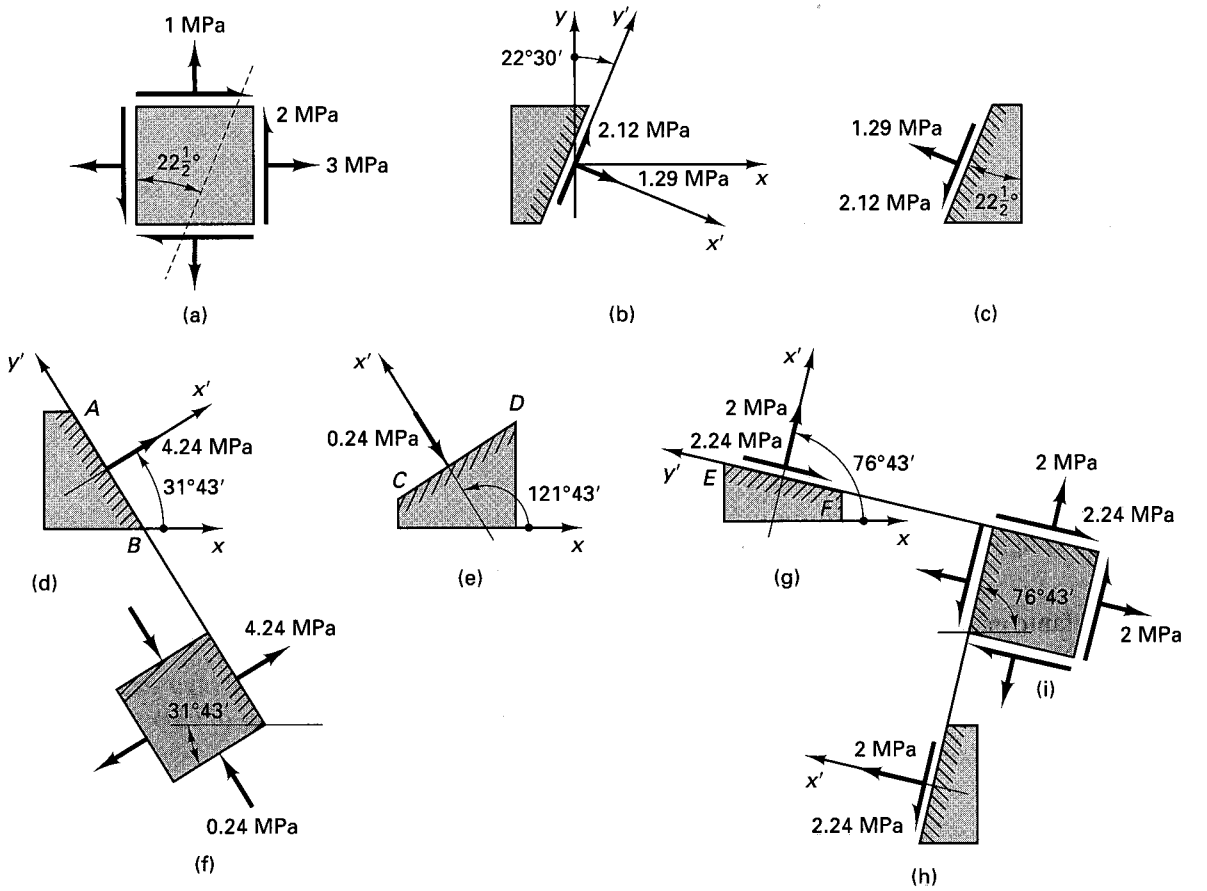


Fig. 11-7

$$= 2 + 1 \times 0.707 - 2 \times 0.707 = +1.29 \text{ MPa}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{3-1}{2}\operatorname{sen}(-45°) + 2\cos(-45°)$$

$$= +1 \times 0.707 + 2 \times 0.707 = +2.12 \text{ MPa}$$

El signo positivo de $\sigma_{x'}$ indica tensión; mientras que el signo positivo de $\tau_{x'y'}$ indica que el esfuerzo cortante actúa en la dirección $+y'$, como se muestra en la figura 11-4(b). Esos resultados se muestran en la figura 11-7(b) así como en la figura 11-7(c).

(b) Los esfuerzos principales se obtienen por medio de la ecuación 11-7. Los planos sobre los que los esfuerzos principales actúan se encuentran usando la ecuación 11-6.

$$\sigma_{1,2} = \frac{3+1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3-1}{2}\right)^2 + 2^2} = 2 \pm 2.24$$

$$\sigma_1 = 4.24 \text{ MPa (tensión)} \qquad \sigma_2 = 0.24 \text{ MPa (compresión)}$$

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} = \frac{2}{(3-1)/2} = 2$$

$$2\theta_1 = 63°26' \quad \text{o} \quad 63°26' + 180° = 243°26'$$

Por consiguiente,

$$\theta_1' = 31°43' \quad \text{y} \quad \theta_1'' = 121°43'$$

Esto localiza los dos planos principales, *AB* y *CD*, figuras 11-7(d) y (e), sobre los cuales actúan σ_1 y σ_2. Sobre cuál de esos planos actúan los esfuerzos principales, es desconocido. La ecuación 11-1 se resuelve entonces usando, por ejemplo $\theta_1' = 31°43'$. El esfuerzo encontrado con este cálculo es el esfuerzo que actúa sobre el plano *AB*. Entonces, como $2\theta_1' = 63°26'$,

$$\sigma_{x'} = \frac{3+1}{2} + \frac{3-1}{2}\cos 63°26' + 2 \operatorname{sen} 63°26' = +4.24 \text{ MPa} = \sigma_1$$

Este resultado, además de verificar los cálculos previos, muestra que el esfuerzo cortante principal máximo actúa sobre el plano *AB*. El estado de esfuerzo completo en el punto dado en términos de los esfuerzos principales se muestra en la figura 11-7(f). Note que los resultados satisfacen la ecuación 11-4.

(c) El esfuerzo cortante máximo se encuentra usando la ecuación 11-9. Los planos sobre los que esos esfuerzos actúan están definidos por la ecuación 11-8. El sentido de los esfuerzos cortantes se determina sustituyendo una de las raíces de la ecuación 11-8 en la ecuación 11-2. Los esfuerzos normales asociados con el esfuerzo cortante máximo se determinan usando la ecuación 11-10.

$$\tau_{\text{máx}} = \sqrt{[(3-1)/2]^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2.24 \text{ MPa}$$

$$\tan 2\theta_2 = -\frac{(3-1)/2}{2} = -0.500$$

$$2\theta_2 = 153°26' \quad \text{o} \quad 153°26' + 180° = 333°26'$$

Por consiguiente,

$$\theta_2' = 76°43' \qquad \text{y} \qquad \theta_2'' = 166°43'$$

Esos planos se muestran en las figuras 11-7(g) y (h). Luego, usando $2\theta_2' = 153°26'$ en la ecuación 11-2,

$$\tau_{x'y'} = -\frac{3-1}{2}\,\text{sen}\,153°26' + 2\cos 153°26' = -2.24\ \text{MPa}$$

que significa que el cortante a lo largo del plano *EF* tiene un sentido opuesto al del eje y'. De la ecuación 11-11,

$$\sigma' = \frac{3+1}{2} = 2\ \text{MPa}$$

Los resultados completos se muestran en la figura 11-7(i). Note de nuevo que la ecuación 11-4 se satisface.

La descripción del estado de esfuerzo puede ahora mostrarse en tres formas alternativas: con los datos originalmente dados y en términos de los esfuerzos encontrados en los incisos (b) y (c) de este problema. Todas esas descripciones del estado de esfuerzo en el punto dado son equivalentes. En notación matricial esto da

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 4.24 & 0 \\ 0 & -0.24 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 2 & -2.24 \\ -2.24 & 2 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

11-6. Círculo de Mohr de esfuerzos para problemas bidimensionales

En esta sección, las ecuaciones básicas (Ecuaciones 11-1 y 11-2) para la transformación del esfuerzo en un punto serán reexaminadas para interpretarlas gráficamente. Se persigue con ello dos objetivos. Primero, al interpretar gráficamente esas ecuaciones se tendrá una mejor idea del problema general de la transformación del esfuerzo. Éste es el propósito principal de esta sección. En segundo lugar, con ayuda de la construcción gráfica puede obtenerse a menudo una solución más rápida de los problemas de transformación de esfuerzos. Esto se analizará en la siguiente sección.

Un análisis cuidadoso de las ecuaciones 11-1 y 11-2 muestra que representan un círculo escrito en forma paramétrica. Se ve más claro que representan un círculo reescribiéndolas primero como

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\,\text{sen}\,2\theta \qquad (11\text{-}12)$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (11\text{-}13)$$

Luego, elevándolas al cuadrado, sumándolas y simplificando, se tiene

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (11\text{-}14)$$

En un problema dado, σ_x, σ_y y τ_{xy} son las tres constantes conocidas y $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ son las variables. Por consiguiente, la ecuación 11-14 puede escribirse en forma más compacta como

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = b^2 \qquad (11\text{-}15)$$

donde $a = (\sigma_x + \sigma_y)/2$ y $b^2 = [(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2$ son constantes.

Esta ecuación es la conocida expresión de la geometría analítica, $(x - a)^2 + y^2 = b^2$, para un círculo de radio b con centro en $(+a, 0)$. Por consiguiente, si se grafica un círculo que satisfaga esta ecuación, los valores simultáneos de un punto (x, y) sobre este círculo corresponden a $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ para una orientación particular de un plano inclinado. La ordenada de un punto sobre el círculo es el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$; la abscisa es el esfuerzo normal $\sigma_{x'}$. El círculo así construido se llama *círculo de esfuerzos* o *círculo de Mohr para esfuerzos*.[3]

Usando la interpretación previa, un círculo de Mohr para los esfuerzos dados en la figura 11-8(a) está graficado en la figura 11-8(c) con σ y τ como ejes coordenados. El centro C está en (a, O) y el radio del círculo es $R = b$. Por lo tanto,

$$a = OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \qquad (11\text{-}16)$$

y

$$b = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \qquad (11\text{-}17)$$

Las coordenadas para el punto A sobre el círculo corresponden a los esfuerzos en la figura 11-8(a) sobre la cara derecha del elemento. Para esta cara del elemento, $\theta = 0°$ (es decir, los ejes xy y $x'y'$ coinciden), $\sigma_{x'} = \sigma_x$ y $\tau_{x'y'} = \tau_{xy}$. Las direcciones positivas para esos esfuerzos coinciden con las direcciones positivas de los ejes. Como $AD/CD = \tau_{xy}/[(\sigma_x - \sigma_y)/2]$, de acuerdo con la ecuación 11-6, el ángulo ACD es igual a $2\theta_1$. Las coordenadas para el punto conjugado B corresponden a los esfuerzos en la figura 11-8(a) sobre la cara superior del elemento. Esto se sigue de las ecuaciones 11-1 y 11-2 con $\theta = 90°$ o, para σ_y', de la ecuación 11-3 con $\theta = 0°$.

El mismo razonamiento se aplica a cualquier otra orientación de un elemento, tal como el mostrado en la figura 11-8(b). Un par de puntos conjugados J y K puede siempre encontrarse sobre el círculo para dar los esfuerzos correspondientes, figura 11-8(c). Un número infinito de posibles estados de esfuerzo dependientes del ángulo θ están definidos por el círculo de esfuerzos. Por tanto, pueden hacerse las siguientes importantes observaciones relativas al estado de esfuerzo en un punto con base en el círculo de Mohr:

1. El esfuerzo normal máximo posible es σ_1; el mínimo es σ_2. Ningún esfuerzo cortante existe junto con cualquiera de esos esfuerzos principales.

[3]Llamado así en honor del alemán Otto Mohr, quien en 1895 sugirió su uso en problemas de análisis de esfuerzos.

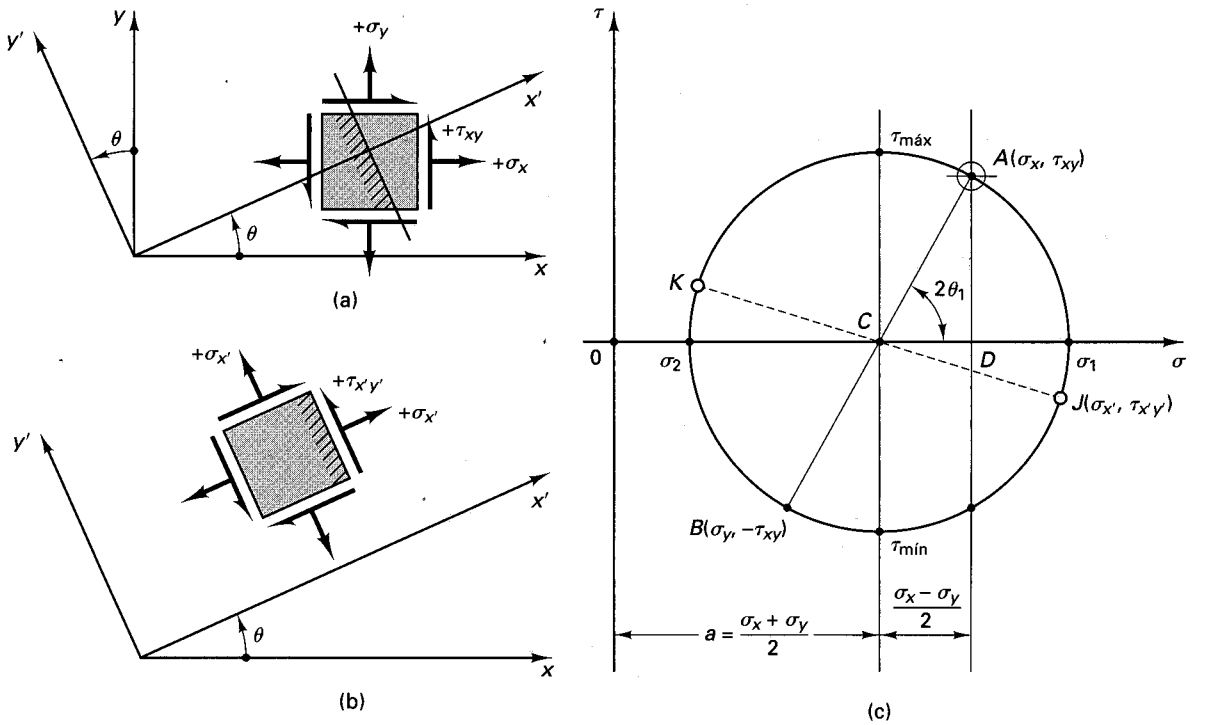


Fig. 11-8 Círculo de Mohr para esfuerzos.

2. El esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx}$ es numéricamente igual al radio del círculo, es decir igual a $(\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Un esfuerzo normal igual a $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ actúa sobre cada uno de los planos de esfuerzo cortante máximo.
3. Si $\sigma_1 = \sigma_2$, el círculo de Mohr degenera en un punto, por lo que ningún esfuerzo cortante se desarrolla en absoluto en el plano xy.
4. Si $\sigma_x + \sigma_y = 0$, el centro del círculo de Mohr coincide con el origen de las coordenadas $\sigma\tau$ y entonces existe el estado de cortante puro.
5. La suma de los esfuerzos normales sobre dos planos mutuamente perpendiculares cualquiera es invariable; es decir

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \text{constante}$$

11-7. Construcción de círculos de Mohr para la transformación de esfuerzos

La transformación de los estados bidimensionales de esfuerzo de un conjunto de coordenadas a otro puede hacerse siempre por la aplicación directa de la estática, como en el ejemplo 11-1, o usando las ecuaciones deducidas en las secciones 11-3, 11-4 y 11-5. Estas ecuaciones pueden ser fá-

cilmente programadas en una computadora. Sin embargo, la representación gráfica de las transformaciones del esfuerzo usando un círculo de Mohr ofrece una vista de conjunto de una solución y es útil en algunas aplicaciones. Se dan a continuación dos procedimientos alternativos para obtener tales soluciones. En el primer procedimiento se muestran claramente los planos físicos sobre los que actúan los esfuerzos transformados; en el segundo, la deducción de la transformación del esfuerzo es más sencilla, aunque la determinación de la dirección del esfuerzo transformado es algo menos conveniente. Escoger un método u otro es asunto de preferencia.

Método I El problema básico consiste en construir el círculo de esfuerzos para los esfuerzos dados σ_x, σ_y y τ_{xy}, como el mostrado en la figura 11-9(a), y luego determinar el estado de esfuerzo sobre un plano *arbitrario a–a*. Un procedimiento para determinar los esfuerzos sobre cualquier plano inclinado requiere justificación con base en las ecuaciones obtenidas en la Sección 11-3.

De acuerdo con la ecuación 11-16, el centro C de un círculo de esfuerzos de Mohr se localiza sobre el eje σ a una distancia $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ del origen. El punto A sobre el círculo tiene las coordenadas (σ_x, τ_{xy}) correspondientes a los *esfuerzos que actúan sobre la cara derecha del elemento* en la dirección positiva de los ejes coordenados, figura 11-9(a). Al punto A se le llamará *origen de los planos*. Esta información es suficiente para dibujar un círculo de esfuerzos, figura 11-9(b).

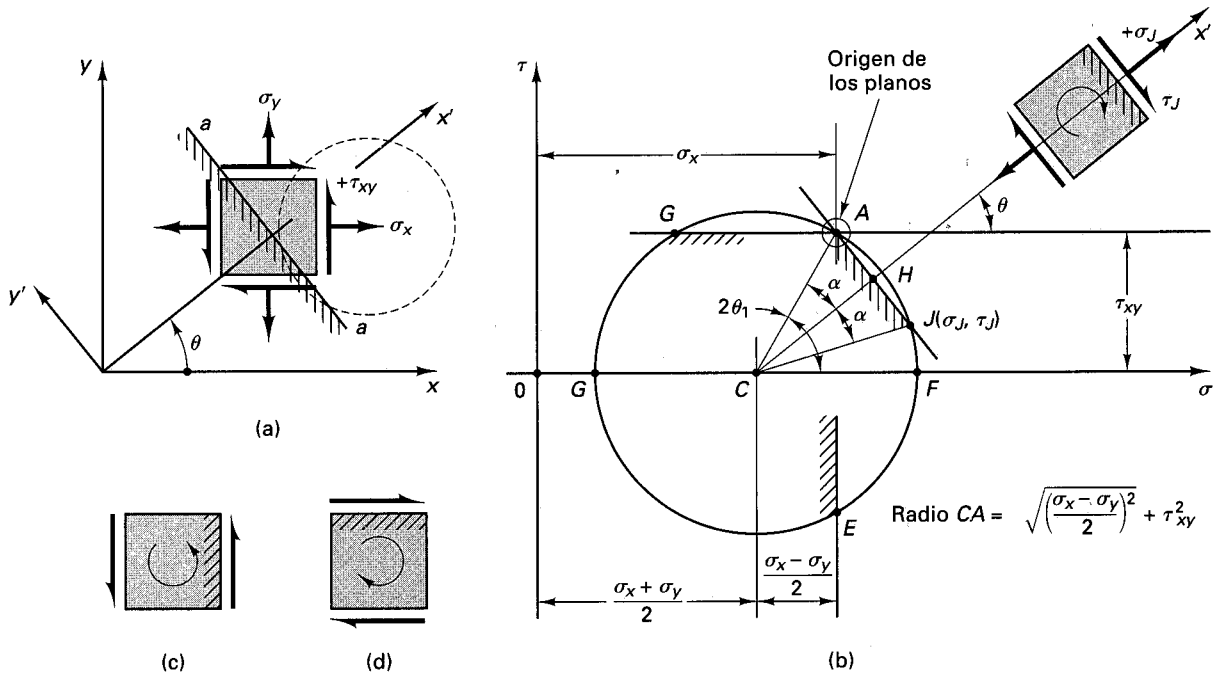


Fig. 11-9 Construcción del círculo de Mohr para determinar esfuerzos sobre un plano arbitrario.

El siguiente paso consiste en dibujar sobre el círculo de esfuerzos una línea por A paralela al plano a–a en el plano físico de la figura 11-9(a). La intersección de esta línea en J con el círculo de esfuerzos da el esfuerzo que actúa sobre el plano a–a. Esto requiere alguna justificación. Para esto, la construcción geométrica indicada debe ser revisada en detalle.

De acuerdo con la deducción previa mostrada en la figura 11-8(c), el ángulo ACF en la figura 11-9(b) es igual a $2\theta_1$. Además, como la línea CH es perpendicular a la línea AJ, el ángulo ACJ es bisecado y $\alpha = 2\theta_1 - \theta$. Por consiguiente, el ángulo JCF es $\theta - \alpha = 2\theta - 2\theta_1$ y queda por demostrar que las coordenadas del punto J definen los esfuerzos que actúan sobre el plano inclinado a–a. Para este fin, nótese en la figura 11-9(b) que si R es el radio de un círculo, $R \cos 2\theta_1 = (\sigma_x - \sigma_y)/2$ y $R \operatorname{sen} 2\theta_1 = \tau_{xy}$. Entonces, formando expresiones para los esfuerzos normal y cortante en J con base en la construcción del círculo en la figura 11-9(b) y usando identidades trigonométricas para los ángulos dobles, se tiene

$$\begin{aligned}\sigma_J &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R\cos(2\theta - 2\theta_1)\\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R(\cos 2\theta \cos 2\theta_1 + \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} 2\theta_1) \qquad (11\text{-}18)\\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\operatorname{sen} 2\theta\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tau_J &= R\operatorname{sen}(2\theta - 2\theta_1) = R\operatorname{sen} 2\theta\cos 2\theta_1 - R\cos 2\theta\operatorname{sen} 2\theta_1\\ &= + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy}\cos 2\theta\end{aligned} \qquad (11\text{-}19)$$

Excepto por el signo de τ_J, las últimas expresiones son idénticas a las ecuaciones 11-1 y 11-2 y, por tanto, definen los esfuerzos que actúan sobre el elemento mostrado en el cuadrante superior derecho de la figura 11-9(b). El lado rayado de este elemento es paralelo a la línea AJ sobre el círculo de esfuerzos, que es paralela a la línea a-a en la figura 11-9(a). Sin embargo, como el signo de τ_J es opuesto al presente en la transformación básica, ecuación 11-2, tiene que introducirse una regla especial para la dirección del esfuerzo cortante.

Con este fin, considere los datos iniciales para el elemento mostrado en la figura 11-9(a), donde todos los esfuerzos se muestran con sentido positivo. Aislando los esfuerzos cortantes que actúan sobre las caras verticales, figura 11-9(c), puede verse que *esos esfuerzos solos* causan un par *antihorario*. Considerando líneas emanando del origen de los planos A, para el primer caso, figura 11-9(c), el círculo es intersectado en E, mientras que para el segundo caso, figura 11-9(d), es intersectado en G. Esto puede generalizarse en una regla: Si el punto de intersección de una línea que emana del origen de los planos A intersecta el círculo *arriba* del eje σ, los esfuerzos cortantes sobre los lados opuestos de un elemento causan un par *horario*. Inversamente, si el punto de intersección se encuentra *debajo* del eje σ, los esfuerzos cortantes sobre lados opuestos causan un par *antihorario*. De acuerdo

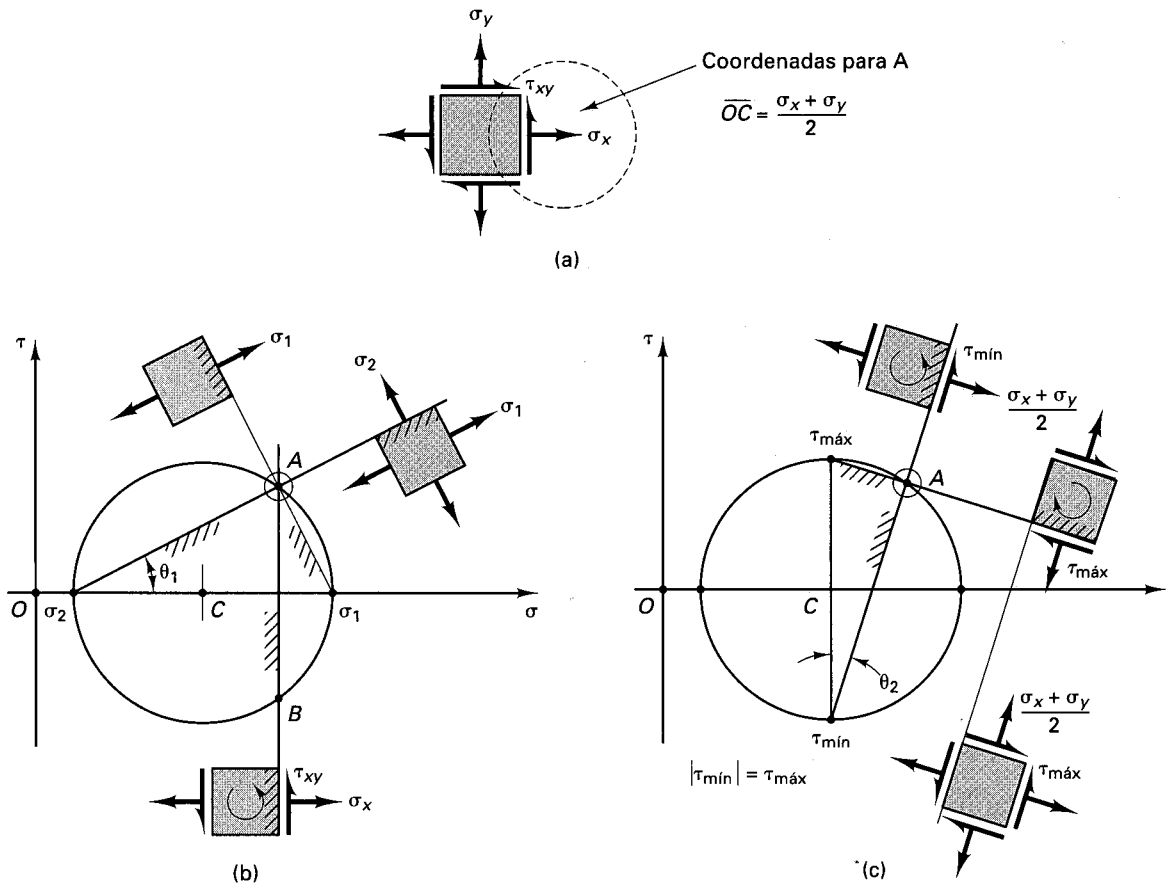


Fig. 11-10 Determinación de los esfuerzos normales principales y cortantes máximos.

con esta regla, los esfuerzos cortantes en J en la figura 11-9(b) actúan en un sentido horario.

Este procedimiento general es ilustrado para dos casos particularmente importantes. Para los datos dados en la figura 11-10(a), los esfuerzos principales se encuentran en la figura 11-10(b) y los esfuerzos cortantes máximos se encuentran en la figura 11-10(c). Para el primer caso, se sabe que los valores extremos sobre las abscisas σ_1 y σ_2, dan los esfuerzos principales. Conectando esos puntos con el origen de los planos A, se localizan los planos sobre los que esos esfuerzos actúan. El ángulo θ_1 puede determinarse por trigonometría. Cualquiera de las dos soluciones es suficiente para obtener la solución completa mostrada sobre el elemento a la derecha.

Se sabe que las magnitudes de los esfuerzos cortantes máximos absolutos están dados por el radio del círculo de Mohr. Como se muestra en la figura 11-10(c), esos esfuerzos están localizados arriba y abajo de C. Conectando esos puntos con el origen de los planos A se determinan los

planos sobre los que esos esfuerzos actúan. Los elementos correspondientes se muestran en los dos diagramas superiores de los elementos, donde los esfuerzos normales medios asociados están también indicados. Cualquiera de esas soluciones con ayuda de los conceptos de equilibrio es suficiente para la solución completa mostrada en el elemento al fondo de la figura.

Método 2 El estado de esfuerzo en el sistema coordenado xy se muestra en la figura 11-11(a). El origen de esas coordenadas se escoge arbitrariamente en el centro del elemento infinitesimal. El objetivo es transformar los esfuerzos dados a los presentes en el conjunto girado de ejes $x'y'$ como se muestra en las figuras 11-11(a) y (b), usando el círculo de Mohr.

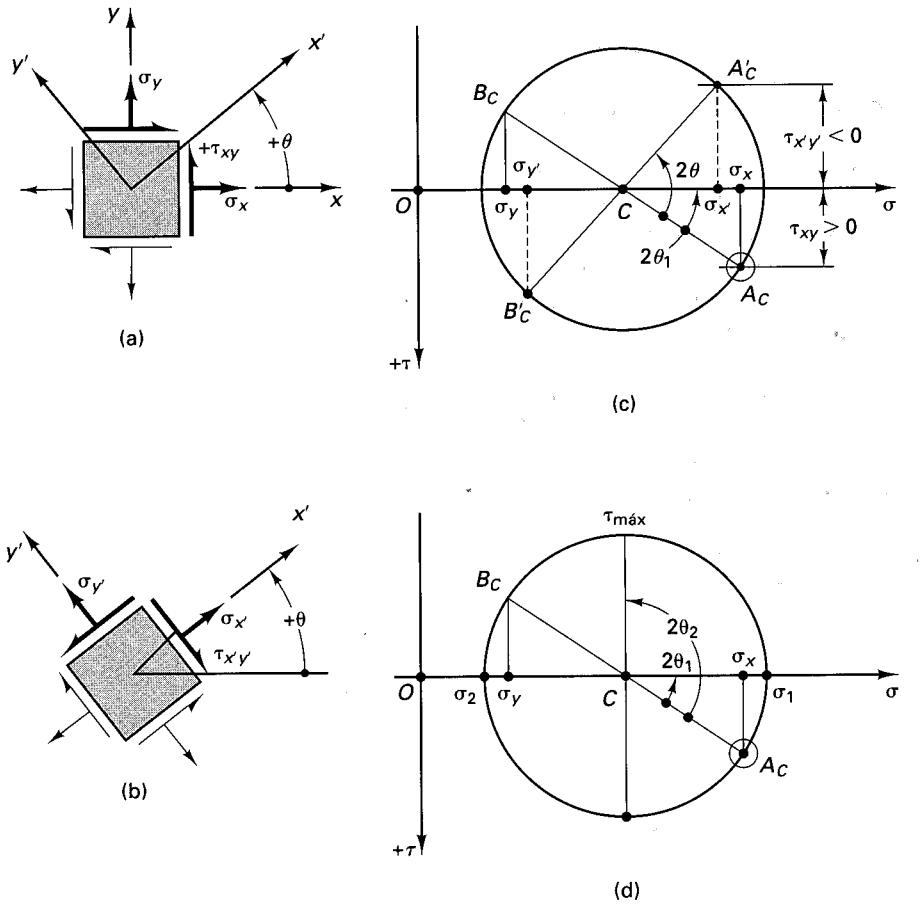


Fig. 11-11 Construcción alternativa del círculo de Mohr de esfuerzos. Esfuerzos sobre planos arbitrarios y normales principales y cortantes se muestran en (c) y (d), respectivamente.

Igual que antes, el centro C del círculo de Mohr se localiza en $(\sigma_x + \sigma_y)/2$. De nuevo, la cara derecha del elemento define a σ_x y τ_{xy}, usados para localizar un punto sobre el círculo. Sin embargo,

si $\tau_{xy} > 0$, éste se dibuja *hacia abajo* en σ_x, y
si $\tau_{xy} < 0$, éste se dibuja *hacia arriba* en σ_x

Esto equivale a dirigir el eje τ positivo hacia abajo y así se muestra en la figura 11-11(c). Las coordenadas de σ_x y τ_{xy} localizan el punto gobernante A_C sobre el círculo. Este punto corresponde al punto A en la construcción anterior; véase la figura 11-8. Sin embargo, debido a los sentidos opuestos de los ejes τ positivos, en tanto que los puntos A y A_C están relacionados, no son el mismo. El punto B_C, conjugado del punto A_C, puede localizarse sobre el círculo como se muestra en la figura 11-11(c). El ángulo doble 2θ se obtiene por simetría.

A continuación, el diámetro A_CB_C es girado un ángulo 2θ en el *mismo sentido* que el eje x' es girado por el ángulo θ con respecto al eje x. Entonces el nuevo punto A'_C determina los esfuerzos $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ sobre la cara derecha del elemento en la figura 11-11(b). Note que para el caso mostrado, el esfuerzo cortante $\tau_{x'y'}$ es negativo ya que $\sigma_{x'}$ está por arriba del eje σ. Consideraciones similares se aplican al punto conjugado B'_C, que define los esfuerzos sobre el plano normal al eje y'.

Las expresiones para $\sigma_{x'}$ y $\tau_{x'y'}$ pueden formularse a partir de la construcción del círculo de Mohr mostrado en la figura 11-11(c) usando las ecuaciones 11-16 y 11-17. Después de algunas simplificaciones, esas relaciones, excepto por el signo de $\tau_{x'y'}$, se reducen a las relaciones básicas de transformación de esfuerzos, ecuaciones 11-1 y 11-2. Por consiguiente, esta construcción del círculo de Mohr queda justificada. Para probarla, modifique las ecuaciones 11-18 y 11-19.

El procedimiento para determinar el esfuerzo normal principal se muestra en la figura 11-11(d). Después de dibujar un círculo de Mohr, los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son conocidos. La rotación requerida θ_1 de los ejes en la dirección de esos esfuerzos se obtiene calculando el ángulo doble $2\theta_1$ del diagrama. Similarmente, los esfuerzos cortantes principales están dados por las coordenadas de los puntos sobre un círculo en sus valores extremos sobre el eje τ. La rotación requerida θ_2 de esos ejes se obtiene calculando el ángulo doble $2\theta_2$ del diagrama.

El método 1 se usa en los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 11-3

Dado el estado de esfuerzo mostrado en la figura 11-12(a), transfórmelo en los esfuerzos principales y (b) en los esfuerzos cortantes máximos y los esfuerzos normales asociados. Muestre los resultados para ambos casos sobre elementos apropiadamente orientados. Use el Método I.

SOLUCIÓN

Para construir el círculo de Mohr de esfuerzos se requieren las siguientes cantidades:

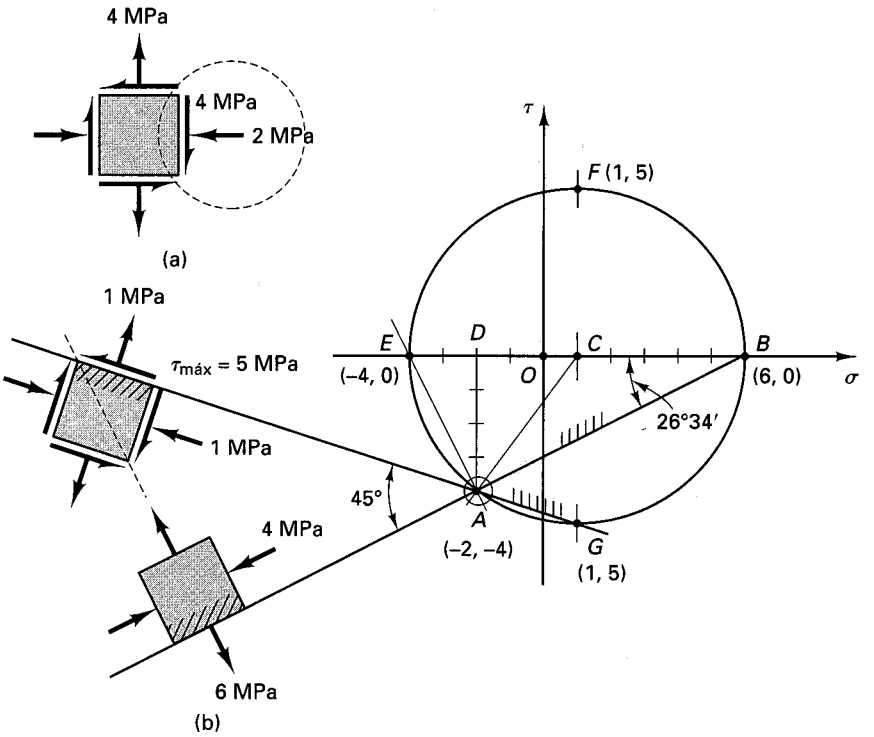


Fig. 11-12

1. Centro del círculo sobre el eje σ: $(-2 + 4)/2 = +1$ MPa
2. Origen de los planos A de los datos sobre la cara derecha del elemento: $(-2, -4)$ MPa
3. Radio del círculo: $CA = \sqrt{CD^2 + DA^2} = 5$ MPa

Después de dibujar el círculo se obtiene $\sigma_1 = +6$ MPa, $\sigma_2 = -4$ MPa y $\tau_{máx} = 5$ MPa.

La recta AB sobre el círculo de esfuerzos localiza el plano principal para $\sigma_1 = 6$ MPa. El ángulo θ_1 es de 26°34′, ya que $\tan \theta_1 = AD/DB = 4/8 = 0.5$. El otro esfuerzo principal, $\sigma_2 = -4$ MPa, actúa en ángulo recto al plano antes mencionado. Esos resultados se muestran sobre un elemento apropiadamente orientado.

La línea AG sobre el círculo a 45° con los planos principales determina los planos para el cortante máximo, $\tau_{máx} = 5$ MPa, y el esfuerzo normal medio asociado $\sigma' = 1$ MPa. Este último esfuerzo corresponde a σ en el centro del círculo. Los resultados completos se muestran sobre un elemento apropiadamente orientado.

Vale la pena notar que las direcciones de los esfuerzos principales pueden ser anticipadas y pueden usarse en los cálculos como una comprobación. Un procedimiento adecuado de inspección se muestra en la figura 11-13. Para comenzar, se sabe que esfuerzos de tensión de igual magnitud al esfuerzo cortante se desarrollan a lo largo de una diagonal, como se muestra en la figura 11-6. Por lo tanto, el esfuerzo máximo de tensión σ_1,

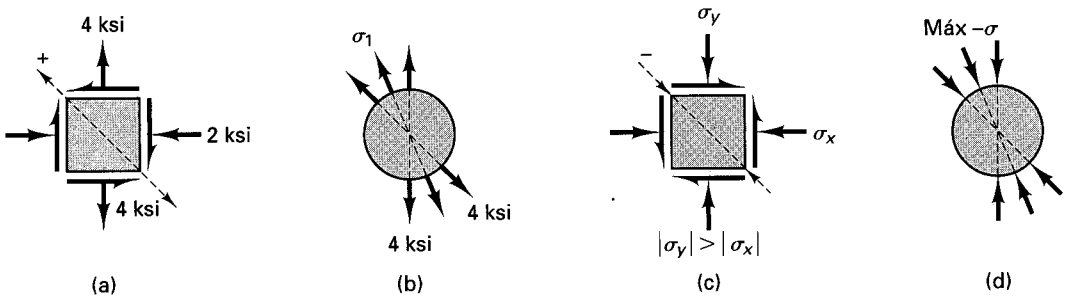


Fig. 11-13 Estimaciones cualitativas de direcciones para esfuerzos principales.

que es resultado de todos los esfuerzos, debe actuar como se muestra en la figura 11-13(b). Situaciones con esfuerzos de compresión pueden ser tratadas similarmente, como se ve en la figura 11-13(d).

Ejemplo 11-4

Usando el círculo de Mohr, transforme los esfuerzos mostrados en la figura 11-14(a) en esfuerzos que actúen sobre un plano que forme un ángulo de $22\frac{1}{2}^\circ$ con el eje vertical. Use el Método I.

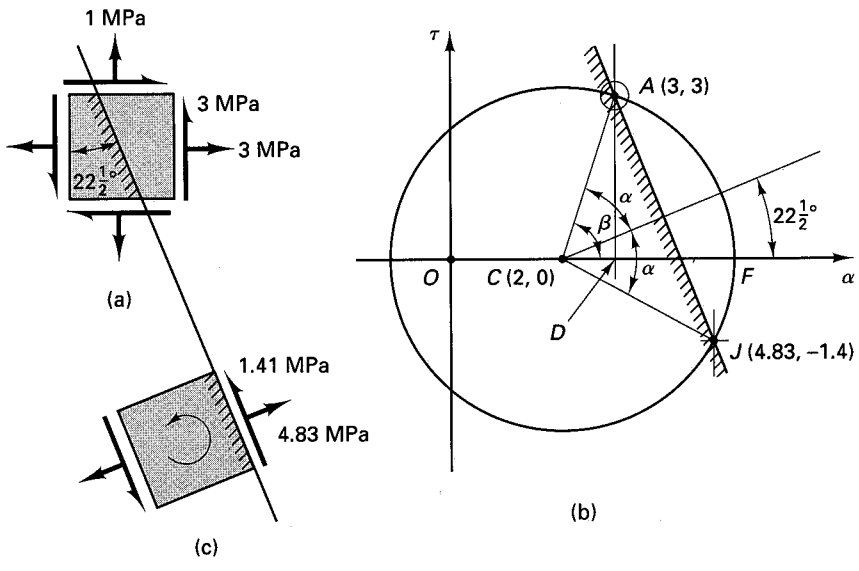


Fig. 11-14

SOLUCIÓN

Para este caso, el centro del círculo está en $(1 + 3)/2 = +2$ MPa sobre el eje σ. El origen de los planos A está en (3, 3) y el radio $R = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3.16$ MPa. Con estos datos se traza un círculo de esfuerzos en la figura 11-14(b) sobre el cual se dibuja una línea inclinada a 22.5° que localiza el punto J.

El ángulo β es de 71.57° ya que $\tan \beta = AD/CD = 3$. Una normal a AJ forma un ángulo de 22.5° con el eje σ. Por lo tanto, $\alpha = 71.57° - 22.5° = 49.07°$ y el ángulo FCJ es $\alpha - 22.5° = 26.57°$. Esto localiza el punto J sobre el círculo. Por consiguiente, $\sigma_J = 2 + R \cos(-26.57°) = 2 + 3.16(0.894) = 4.83$ MPa, y $\tau_J = R \operatorname{sen}(-26.57°) = 3.16(-0.447) = -1.41$ MPa.

Estos resultados se muestran sobre un elemento apropiadamente orientado en la figura 11-14(c). Como τ_J es negativo, los esfuerzos cortantes se muestran actuando en sentido antihorario.

De nuevo, debe observarse que las ecuaciones para la transformación de esfuerzos son idénticas en forma a las ecuaciones para determinar los ejes principales y momentos de inercia de áreas (Sección 9-3). Por lo tanto, el círculo de Mohr puede construirse para encontrar esas ecuaciones.[4]

11-8. Esfuerzos principales para un estado general de esfuerzo[5]

Tradicionalmente en un texto introductorio sobre mecánica de sólidos, la atención se confina principalmente a los esfuerzos en dos dimensiones. Sin embargo, como los elementos físicos estudiados son siempre tridimensionales, es conveniente considerar las consecuencias de la tridimensionalidad sobre las transformaciones de esfuerzos. Los conceptos desarrollados en esta sección tienen un impacto sobre el análisis que sigue en este capítulo, así como sobre algunos temas considerados en el siguiente capítulo.

Consideremos un estado general de esfuerzo y definamos un tetraedro infinitesimal[6] como el mostrado en la figura 11-15(a). En vez de considerar un plano inclinado en el sistema coordenado xy, como antes para una cuña, los esfuerzos desconocidos serán buscados sobre un plano oblicuo arbitrario ABC en el sistema coordenado tridimensional xyz. Se da un conjunto de esfuerzos conocidos sobre las otras tres caras de los planos mutuamente perpendiculares del tetraedro. Esos esfuerzos son los mismos que los mostrados antes en la figura 1-3(a).

Una normal unitaria **n** al plano oblicuo define su orientación. Este vector unitario es identificado por sus cosenos directores l, m y n, donde $\cos \alpha = l$, $\cos \beta = m$ y $\cos \gamma = n$. El significado de esas cantidades está ilustrado

[4]Véase J. L. Meriam y L. G. Kraige, *Statics,* 2a. ed., Nueva York, Wiley, 1986.

[5]Esta sección es más avanzada y puede omitirse.

[6]Un tetraedro fue introducido primero en el estudio de las transformaciones de esfuerzos por el gran matemático francés A. L. Cauchy alrededor de 1820.

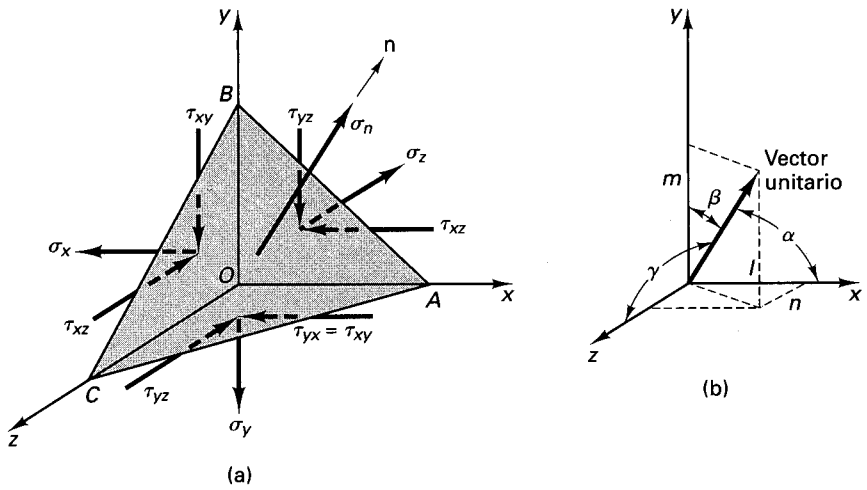


Fig. 11-15 Tetraedro para obtener un esfuerzo principal sobre un plano oblicuo.

en la figura 11-15(b). De la misma figura puede notarse que como $l^2 + n^2 = d^2$ y $d^2 + m^2 = 1$:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad (11\text{-}20)$$

Además, si el área infinitesimal ABC es definida por $dA_{ABC} \equiv dA$, entonces las tres áreas del tetraedro a lo largo de los ejes coordenados, identificados por sus subíndices, son $dA_{BOC} = dA\,l$, $dA_{AOC} = dA\,m$ y $dA_{AOB} = dA\,n$.[7]

Las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para el tetraedro pueden ahora escribirse multiplicando los esfuerzos dados en la figura 11-15(a) por las respectivas áreas establecidas. Por simplicidad, se supondrá que sólo un *esfuerzo normal* σ_n (es decir, un *esfuerzo principal*) está actuando sobre la cara ABC. Las componentes de la fuerza normal correspondiente $(\sigma_n dA)$ se obtienen descomponiéndola a lo largo de los ejes coordenados usando los cosenos directores, figura 11-15(b). Con base en esto,

$$\sum F_x = 0 \qquad (\sigma_n\,dA)l - \sigma_x\,dA\,l - \tau_{xy}\,dA\,m - \tau_{xz}dA\,n = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad (\sigma_n\,dA)m - \sigma_y\,dA\,m - \tau_{yz}\,dA\,n - \tau_{xy}dA\,l = 0 \qquad (11\text{-}21)$$

$$\sum F_z = 0 \qquad (\sigma_n\,dA)n - \sigma_z dA\,n - \tau_{xz}\,dA\,l - \tau_{yz}dA\,m = 0$$

[7]Esas áreas son la proyección de dA sobre los planos coordenados respectivos. Para aclararlo, considere la cuña bidimensional mostrada en la figura 11-16 y compare los volúmenes usando dos caminos diferentes. Sea A_{AC} el área asociada con el lado AC y sea AB la altura correspondiente de la cuña. Entonces el volumen de la cuña es $A_{AC}AB/2$. Por otra parte, si el área para el lado CB es A_{CB} y la altura de la cuña es $AB\cos\theta = ABl$, el volumen es $A_{CB}AB/2$. Igualando los volúmenes y simplificando, $A_{AC} = A_{CB}l$. Llevando a cabo este procedimiento en tres dimensiones, las relaciones dadas en el texto pueden ser justificadas.

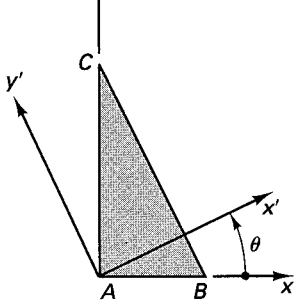


Fig. 11-16

Simplificando, cambiando signos y reagrupando términos,

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_n)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0\\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_n)m + \tau_{yz}n &= 0\\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_n)n &= 0\end{aligned} \tag{11-22}$$

En virtud de la ecuación 11-20, los tres cosenos directores no pueden ser cero. Sin embargo, el sistema de ecuaciones lineales homogéneas tiene una solución no trivial si, y sólo si, el determinante de los coeficientes de l, m y n es cero. Por consiguiente,

$$\begin{vmatrix}\sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_n\end{vmatrix} = 0 \tag{11-23}$$

El desarrollo del determinante da

$$\sigma_n^3 - I_1\sigma_n^2 + I_2\sigma_n - I_3 = 0 \tag{11-24}$$

donde

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{11-25}$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{11-26}$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2) \tag{11-27}$$

Aquí, si el sistema coordenado inicial es cambiado (cambiando por ello los tres planos mutuamente perpendiculares del tetraedro), el σ_n sobre el plano inclinado debe seguir siendo el mismo. Por tanto, las constantes I_1, I_2 e I_3 en la ecuación 11-24 deben también seguir siendo las mismas y, por consiguiente, son *invariables*. Además, como la matriz de la ecuación 11-23 es simétrica y todos sus elementos son reales, de acuerdo con la regla de los signos de Descartes, en general, la ecuación 11-24 tiene *tres raíces reales*.[8] Esas raíces son los valores propios del determinante en la ecuación 11-23 y son los *esfuerzos normales principales* en un punto dado.

Como la ecuación 11-24 cúbica tiene raíces reales, su solución puede encontrarse en forma trigonométrica. Usando las bien conocidas fórmulas del álgebra, los esfuerzos normales principales pueden expresarse en términos de los invariantes de esfuerzo distorsionante:[9]

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + 2(|J_2/3|)^{\frac{1}{2}}\cos(\theta)\\ \sigma_2 &= \sigma_0 - 2(|J_2/3|)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\\ \sigma_3 &= \sigma_0 - 2(|J_2/3|)^{\frac{1}{2}}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned} \tag{11-28}$$

[8] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1950, p. 47.

[9] V. V. Sokolovskii, *Theory of Plasticity*, 2a. ed., Moscú, Gostehizdat, 1950, (en ruso).

donde el ángulo θ (a veces llamado el ángulo del tipo de estado de esfuerzo o ángulo de Lode) se define como

$$\theta = \frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{J_3}{2\left(|J_2/3|\right)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{11-29}$$

y J_2, J_3 son los invariantes del esfuerzo distorsionante

$$\begin{aligned} J_2 &= s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ J_3 &= -(s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2) \end{aligned} \tag{11-30}$$

donde

$$\begin{aligned} s_x = \sigma_x - \sigma_0, \quad s_y = \sigma_y - \sigma_0, \quad s_z = \sigma_z - \sigma_0 \\ \sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \end{aligned} \tag{11-31}$$

Análogamente a la ecuación 11-11, los esfuerzos cortantes máximos en un punto dado pueden expresarse en términos de los esfuerzos normales principales como sigue:

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau_2 = \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1), \quad \tau_3 = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \tag{11-32}$$

Cualquiera de las raíces definidas por la ecuación 11-28 puede ser sustituida en dos de las tres ecuaciones 11-22 y, junto con la ecuación 11-20, forman un conjunto de tres ecuaciones simultáneas. Una solución de esas ecuaciones da los cosenos directores para los esfuerzos principales seleccionados. Las tres direcciones principales para los esfuerzos principales son *ortogonales*. Los planos normales a las direcciones principales son los *planos principales de esfuerzos*.

Los valores de los cosenos directores del esfuerzo principal σ_i ($i = 1,2,3$) pueden determinarse a partir del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} &(\sigma_x - \sigma_i)l_i + \tau_{xy}m_i + \tau_{zx}n_i = 0 \\ &\tau_{xy}l_i + (\sigma_y - \sigma_i)m_i + \tau_{yz}n_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \\ &\tau_{zx}l_i + \tau_{yz}m_i + (\sigma_x - \sigma_i)n_i = 0 \end{aligned} \tag{11-33}$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{11-34}$$

donde, dividiendo las ecuaciones 11-33 entre, por ejemplo, n_i, despejando cualquiera de esas dos ecuaciones con referencia a (l_i/n_i) y (m_i/n_i) y usando la ecuación 11-34, se obtiene la solución:

$$\begin{aligned} n_i &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l_i}{n_i}\right)^2 + \left(\frac{m_i}{n_i}\right)^2 + 1}}, \qquad l_i = \left(\frac{l_i}{n_i}\right)n_i, \\ m_i &= \left(\frac{m_i}{n_i}\right)n_i, \qquad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{11-35}$$

11-9. Círculo de Mohr para un estado general de esfuerzo

En la sección anterior se mostró que para un estado general de esfuerzo, se tienen tres esfuerzos ortogonales principales, σ_1, σ_2 y σ_3, siempre que $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$. Esos esfuerzos actúan a lo largo de los ejes principales. Los problemas de esfuerzo plano caen dentro del alcance de la teoría general cuando uno de los esfuerzos principales es cero. Igual sucede en los problemas de deformación plana cuando uno de los esfuerzos principales está dado por la ecuación 11-5. Sin embargo, se tienen casos degenerados que requieren un tratamiento especial.

Si sólo dos de los esfuerzos principales son iguales, el esfuerzo principal restante tiene una dirección única. Dos de las otras direcciones ortogonales de una tríada ortogonal son las direcciones principales. Este caso se llama estado de esfuerzo *cilíndrico* o *axialsimétrico*.[10] Si los tres esfuerzos principales son iguales, el estado de esfuerzo se llama *esférico*. Cualquier tríada de ejes ortogonales para este caso da los ejes principales.

Para el caso general, considere la ilustración dada en la figura 11-17, donde los esfuerzos principales ordenados son $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Suponga además que, después de una transformación apropiada de esfuerzos, los ejes principales 1, 2 y 3 y los correspondientes esfuerzos principales están orientados como se muestra sobre un elemento en la figura 11-17(a). Viendo este elemento a lo largo de los tres ejes principales, se obtienen 3 diagramas bidimensionales que se muestran en la figura 11-17(b). Para cada uno de esos diagramas se puede dibujar un círculo de Mohr de esfuerzos. Esto se muestra en la figura 11-17(c) con un paquete de tres círculos. En lo que respecta a las magnitudes de los esfuerzos, el círculo exterior es el más importante.

Aunque por definición (Sección 11-4), los esfuerzos principales son el máximo y el mínimo, es de interés saber dónde, sobre una gráfica como la de la figura 11-17(c), se encuentran los esfuerzos sobre todos los planos oblicuos arbitrarios. Tal plano se designa por K en la figura 11-17(a). Los resultados de este estudio, considerando esfuerzos en tres dimensiones, muestran[11] que los puntos coordenados para todos los posibles planos se encuentran sobre cualquiera de los tres círculos o en un área entre ellos, mostrada ésta rayada en la figura 11-17(c). Una serie de círculos es definida dentro de esta área con sus centros sobre el eje σ manteniendo cualquiera de los cosenos directores constante. Por lo tanto, es conveniente referirnos a los tres círculos dibujados como a los *círculos principales de esfuerzos*. El mayor de éstos es el círculo *mayor* de esfuerzos principales.

Como todos los esfuerzos en sus diversas transformaciones pueden causar fluencia o ruptura de un material, es a menudo instructivo graficar todos los tres círculos principales de esfuerzos, como se muestra en la figura 11-17(c). Siguen dos ejemplos de este tipo. Al hacer tales gráficas, deben tenerse en mente los casos degenerados, que se presentan cuando dos o todos los esfuerzos principales son iguales. Para tales casos, un círculo de Mohr se convierte en un punto.

[10] O. Hoffman y G. Sachs, *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers,* Nueva York, McGraw-Hill, 1953.

[11] *Ibid.*, p. 13.

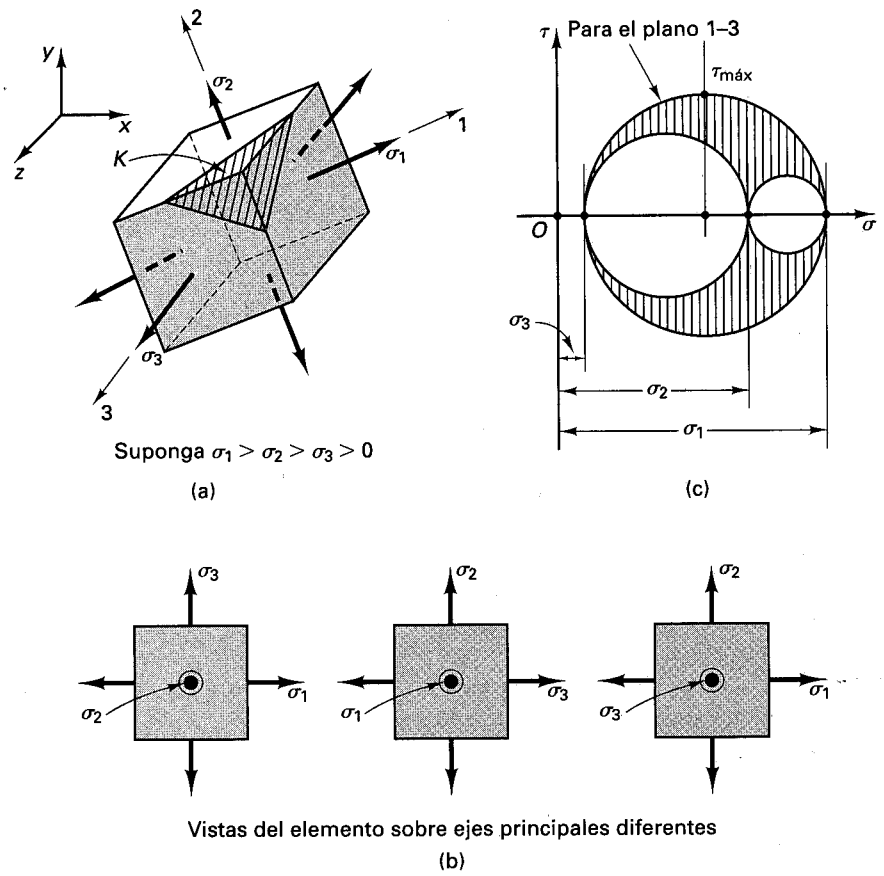


Fig. 11-17 Estado triaxial de esfuerzo.

Ejemplo 11-5

Para los datos del ejemplo 11-3, repetidos en la figura 11-18(a), construya tres círculos de Mohr principales de esfuerzo viendo un elemento desde tres direcciones principales. Suponga que éste es un problema de esfuerzo plano.

SOLUCIÓN

Los esfuerzos principales para este problema en dos dimensiones ya han sido determinados en el ejemplo 11-3. Los resultados se repiten en la figura 11-18(b). Como éste es un problema de esfuerzo plano, el esfuerzo en la dirección normal al papel es cero. El estado de esfuerzo completo se muestra en la figura 11-18(c) con todos los esfuerzos principales. Los 3 diagramas bidimensionales del elemento visto desde direcciones diferentes se mues-

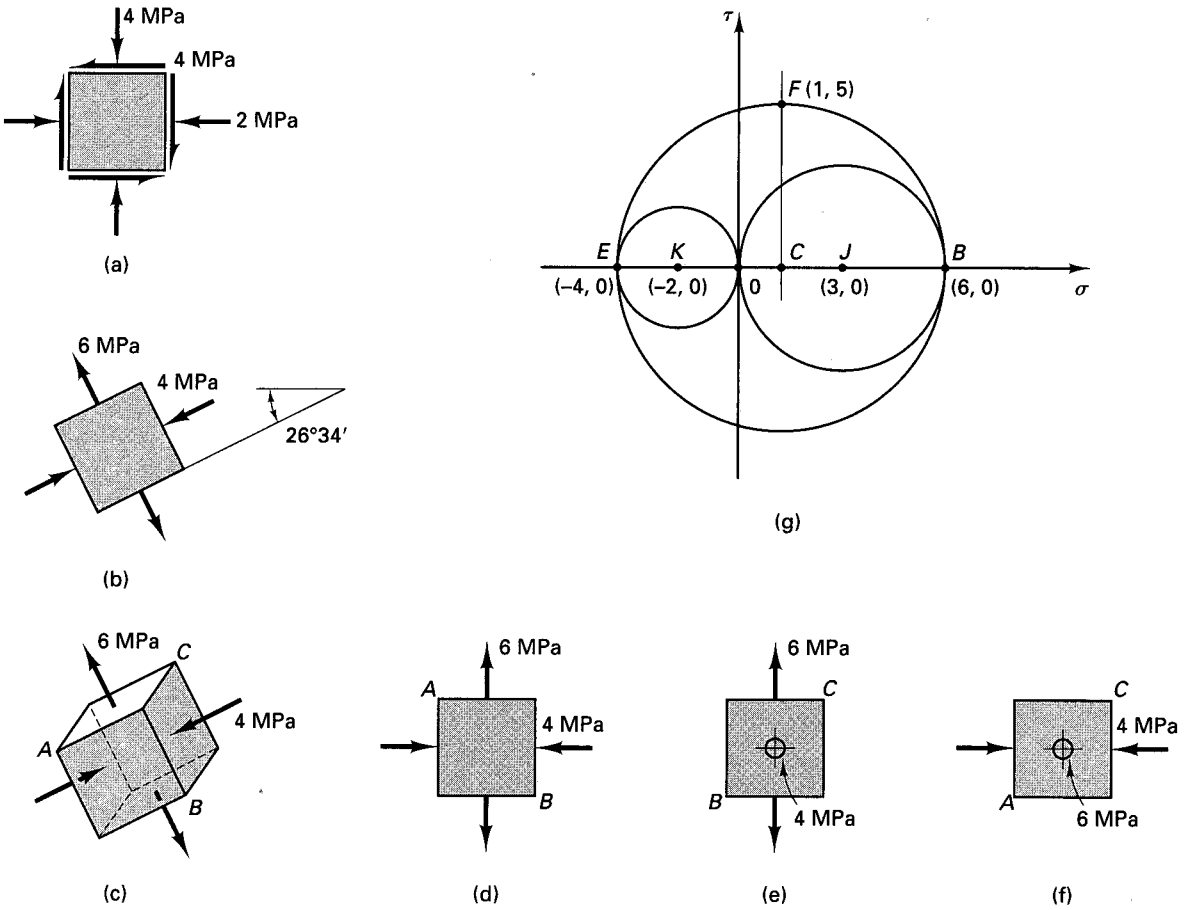


Fig. 11-18

tran en las figuras 11-18(d)–(f). Los tres círculos principales de Mohr se muestran en la figura 11-18(g).

Si los esfuerzos dados fuesen para un problema de *deformación plana,* el esfuerzo principal medio, en vez de ser cero, según la ecuación 11-5, sería $\sigma_2 = \nu(6-4) = +2\nu$, donde ν es la razón de Poisson.

Ejemplo 11-6

Para el esfuerzo plano mostrado en la figura 11-19(a), dibuje los tres círculos principales de Mohr y determine el estado de esfuerzo para cortante máximo.

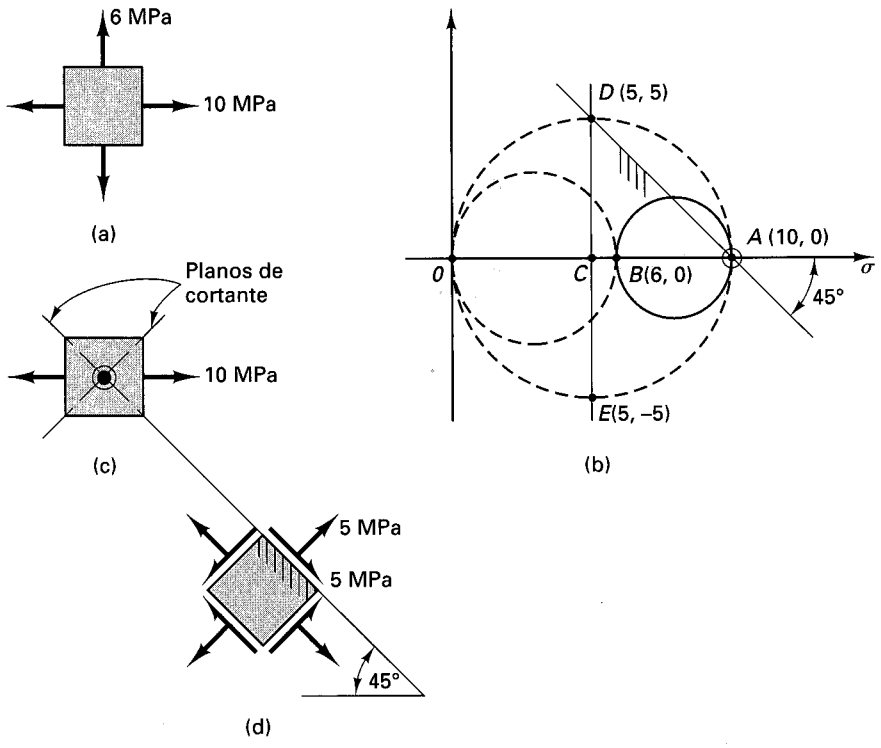


Fig. 11-19

SOLUCIÓN

Dos de los esfuerzos principales son dados; el tercero es cero ya que se trata de un problema de esfuerzo plano. Los tres círculos de esfuerzo principal se muestran en la figura 11-19(b). El esfuerzo cortante máximo ocurre en los planos mostrados en la figura 11-19(c). Este esfuerzo está asociado con el punto D sobre el círculo principal mayor y su orientación física está dada en la figura 11-19(d).

Este tipo de problema ocurre en el análisis de recipientes a presión donde es importante advertir que pueden surgir grandes esfuerzos cortantes.

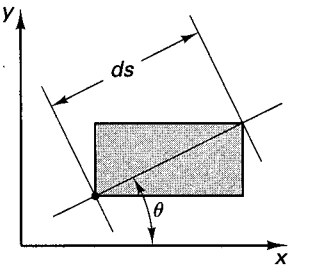
Parte B TRANSFORMACIÓN DE LA DEFORMACIÓN UNITARIA

11-10. Deformaciones unitarias en dos dimensiones

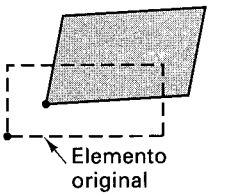
En las siguientes cuatro secciones estudiaremos la transformación del esfuerzo en dos dimensiones. Esto incluye la consideración de problemas de esfuerzo plano y de deformación unitaria plana. Se mostrará que la transformación

de las deformaciones unitarias normales y cortantes de un conjunto de ejes girados a otro es completamente análoga a la transformación de los esfuerzos normales y cortantes presentada antes. Por lo tanto, después de establecer las ecuaciones de transformación de la deformación unitaria, es posible introducir el círculo de Mohr de deformaciones unitarias. Un procedimiento para reducir las mediciones de deformación superficial hechas por medio de extensómetros a esfuerzos principales complementa esta parte del capítulo.

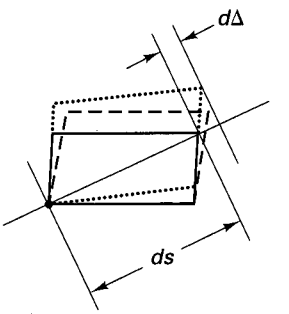
Al estudiar las deformaciones unitarias en un punto, sólo el desplazamiento relativo de puntos adyacentes es de importancia. La traslación y rotación de un elemento en su conjunto no tiene importancia ya que esos desplazamientos son *desplazamientos de cuerpo rígido*. Por ejemplo, si se estudia la deformación unitaria extensional de una diagonal *ds* del elemento original en la figura 11-20(a), el elemento en su condición deformada puede redibujarse para fines de comparación, como se muestra en la figura 11-20(c). Los lados horizontal (con rayas) y vertical (con puntos) de los elementos deformado y no deformado pueden hacerse coincidir para determinar $d\Delta$. Para las pequeñas deformaciones unitarias y rotaciones consideradas, el alargamiento $d\Delta$ en la dirección de la diagonal es esencialmente el mismo, independientemente del método de comparación empleado. Al tratar las deformaciones unitarias de esta manera, sólo los aspectos cinemáticos son de importancia. Las propiedades mecánicas del material no entran en el problema.



(a)



(b)



(c)

Fig. 11-20 Las deformaciones unitarias son determinadas a partir de las deformaciones relativas.

11-11. Transformación de la deformación unitaria en dos dimensiones: Enfoque geométrico

Al establecer las ecuaciones para la transformación de la deformación unitaria es necesaria una estricta adherencia a una convención de signos. La convención de signos usada aquí esta relacionada con la escogida para los esfuerzos en la Sección 11-4. Las deformaciones unitarias normales ε_x y ε_y correspondientes a elongaciones en las direcciones x y y, respectivamente, se toman como positivas. La deformación unitaria cortante se considera positiva si el ángulo de 90° entre los ejes x y y se vuelve más pequeño. Por conveniencia, al deducir las ecuaciones de transformación de la deformación unitaria, el elemento distorsionado por una deformación unitaria cortante positiva se tomará como el mostrado en la figura 11-21(a).

A continuación, suponga que se conocen las deformaciones unitarias ε_x, ε_y y γ_{xy} asociadas con los ejes xy y que se requiere la deformación unitaria extensional a lo largo de algún nuevo eje x'. El nuevo sistema de ejes $x'y'$ está relacionado con los ejes xy, como se muestra en la figura 11-21(b). En esas nuevas coordenadas, una longitud OA que tiene dx' de largo, puede imaginarse como una diagonal de un elemento diferencial rectangular dx por dy en las coordenadas iniciales.

Considerando el punto O fijo, se pueden calcular los desplazamientos del punto A causados por las deformaciones unitarias impuestas sobre una base diferente en los dos sistemas coordenados. El desplazamiento en la dirección x es $AA' = \varepsilon_x\, dx$; en la dirección y, $A'A'' = \varepsilon_y\, dy$. Para la deformación unitaria cortante, suponiendo que ella causa el desplazamiento ho-

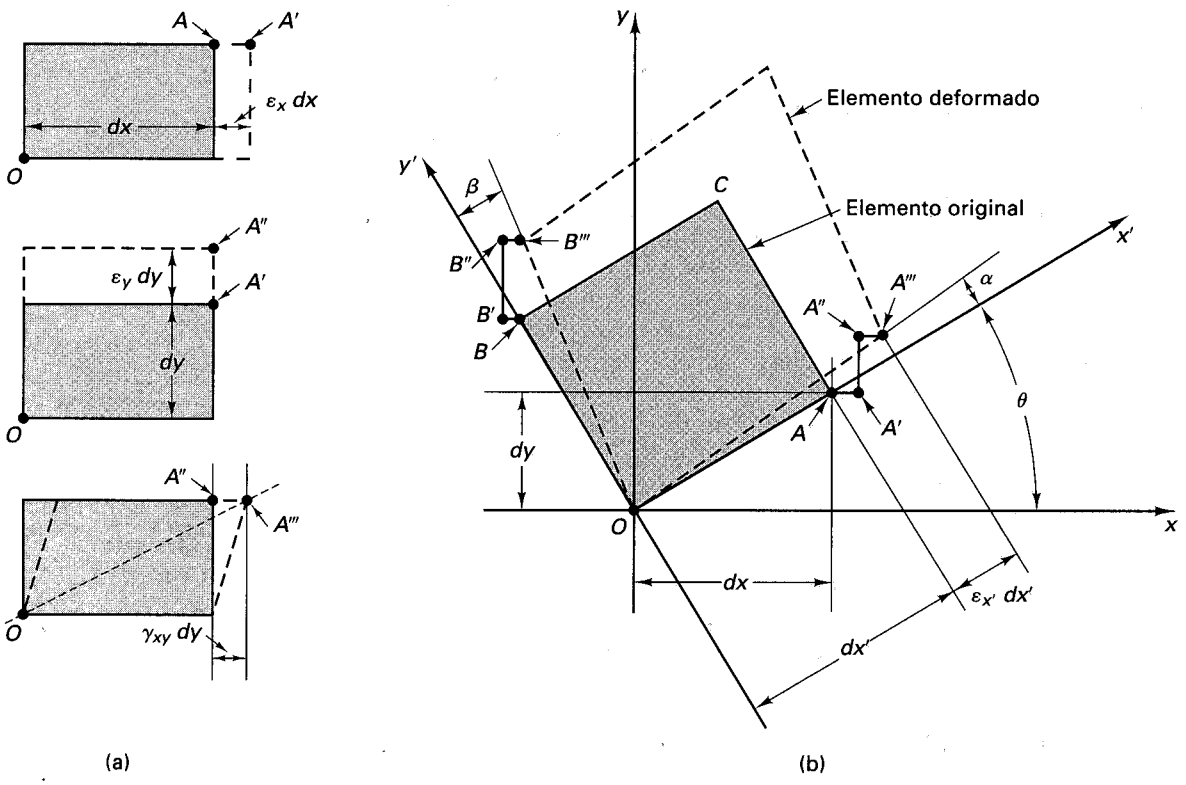


Fig. 11-21 Deformaciones exageradas de elementos para obtener las deformaciones unitarias a lo largo de nuevos ejes.

rizontal mostrado en la figura 11-21(a), $A''A''' = \gamma_{xy}\, dy$. El orden en que esos desplazamientos ocurren es arbitrario. En la figura 11-21(b), se muestra primero el desplazamiento AA', luego el $A'A''$ y finalmente el $A''A'''$. Proyectando esos desplazamientos sobre el eje x', se encuentra el desplazamiento del punto A a lo largo del eje x'. Luego, viendo que, por definición, $\varepsilon_{x'}\, dx'$ en el sistema coordenado $x'y'$ es también el alargamiento de OA, se tiene la siguiente igualdad:

$$\varepsilon_{x'} dx' = AA' \cos\theta + A'A'' \operatorname{sen}\theta + A''A''' \cos\theta$$

Sustituyendo las expresiones apropiadas para los desplazamientos y dividiendo entre dx', se tiene

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \frac{dx}{dx'} \cos\theta + \varepsilon_y \frac{dy}{dx'} \operatorname{sen}\theta + \gamma_{xy} \frac{dy}{dx'} \cos\theta$$

Sin embargo, como $dx/dx' = \cos\theta$ y $dy/dx' = \operatorname{sen}\theta$,

$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta} \qquad (11\text{-}36)$$

La ecuación 11-36 es la expresión básica para la transformación de la deformación unitaria normal en un plano en una dirección arbitraria definida por el eje x'.[12] Para aplicar esta ecuación, ε_x, ε_y y γ_{xy} deben ser conocidas. Usando las identidades trigonométricas ya empleadas al deducir la ecuación 11-1, la última ecuación puede reescribirse como

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta \qquad (11\text{-}37)$$

Para completar el estudio de la transformación de la deformación unitaria en un punto, debe también establecerse la transformación de la deformación unitaria cortante. Con este fin, considere un elemento $OACB$ con lados OA y OB dirigidos a lo largo de los ejes x' y y', como se muestra en la figura 11-21(b). Por definición, la deformación unitaria cortante para este elemento es el cambio en el ángulo AOB. De la figura, el cambio en este ángulo es $\alpha + \beta$.

Para deformaciones pequeñas, el pequeño ángulo α puede determinarse proyectando los desplazamientos AA', $A'A''$ y $A''A'''$ sobre una normal a OA y dividiendo esta cantidad entre dx'. Al aplicar este enfoque, la tangente del ángulo se supone igual al ángulo mismo. Esto es aceptable ya que las deformaciones son pequeñas. Así entonces,

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{-AA' \operatorname{sen}\theta + A'A'' \cos\theta - A''A''' \operatorname{sen}\theta}{dx'}$$

$$= -\varepsilon_x \frac{dx}{dx'}\operatorname{sen}\theta + \varepsilon_y \frac{dy}{dx'}\cos\theta - \gamma_y \frac{dy}{dx'}\operatorname{sen}\theta$$

$$= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \gamma_{xy}\operatorname{sen}^2\theta$$

Por un razonamiento análogo,

$$\beta \approx -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos^2\theta$$

Por lo tanto, como la deformación unitaria cortante $\gamma_{x'y'}$ de un ángulo incluido entre los ejes $x'y'$ es $\beta + \alpha$, se tiene

$$\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

o

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\operatorname{sen} 2\theta + y_{xy}\cos 2\theta \qquad (11\text{-}38)$$

[12]Usando los cosenos directores l, m y n (véase la sección 11-8), la ecuación 11-28 puede reescribirse como

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm \qquad (11\text{-}36a)$$

Como se muestra en libros sobre la teoría de la elasticidad o sobre la mecánica del medio continuo, esta transformación de la deformación unitaria normal en tres dimensiones toma la forma

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} ln$$

Por lo tanto, la ecuación 11-36 puede aplicarse *sólo* a transformaciones de la deformación unitaria en dos dimensiones.

Esta es la segunda expresión fundamental para la transformación de la deformación unitaria. Note que cuando $\theta = 0°$, la deformación unitaria cortante asociada con los ejes xy se recupera.

Las ecuaciones básicas (Ecuaciones 11-37 y 11-38) para la transformación de la deformación unitaria en un plano son análogas a las ecuaciones 11-1 y 11-2 para la transformación del esfuerzo en dos dimensiones. Fundamentalmente esto se debe a que los esfuerzos y las deformaciones unitarias son tensores de segundo rango y matemáticamente obedecen las mismas leyes de transformación. Esta similitud será enfatizada al analizar el círculo de Mohr para deformaciones unitarias.

11-12. Transformación de la deformación unitaria en dos dimensiones: Enfoque analítico

Se tienen situaciones en que deformaciones unitarias asociadas con un conjunto de ejes coordenados rectangulares se transforman en un conjunto equivalente de deformaciones unitarias sobre ejes girados. Tal condición se muestra en la figura 11-22, donde los ejes iniciales xy son girados en sentido antihorario un ángulo θ que define un nuevo sistema coordenado $x'y'$.

Hay varios procedimientos para relacionar las deformaciones unitarias en el sistema coordenado xy con las del sistema $x'y'$. Veremos aquí un enfoque analítico. Esto requiere establecer una relación entre los dos sistemas coordenados. Entonces, si un punto arbitrario A de un cuerpo en el sistema coordenado xy está en x y y, en el sistema $x'y'$ el mismo punto está en x' y y'. De la figura 11-22 puede verse que (note las líneas gruesas en la figura)

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\,\text{sen}\,\theta \\ y' &= -x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta \end{aligned} \tag{11-39}$$

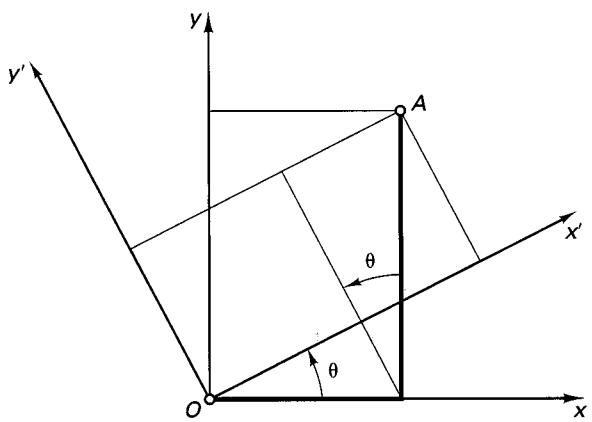


Fig. 11-22 Transformación coordenada.

Esas dos ecuaciones pueden escribirse convenientemente en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{11-40}$$

Esta ecuación matricial representa una rotación de los ejes $x'y'$ en función de θ. El determinante de esta matriz es la unidad; por tanto su transpuesta es igual a su inversa. Por lo tanto,

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} \tag{11-41}$$

o, escrita explícitamente por conveniencia para subsecuentes manipulaciones algebraicas,

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \\ y &= x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta \end{aligned} \tag{11-42}$$

Como las mismas reglas de transformación de un sistema coordenado al otro son aplicables a los pequeños desplazamientos lineales u y v, tenemos

$$\begin{aligned} u' &= u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta \\ v' &= -u\operatorname{sen}\theta + v\cos\theta \end{aligned} \tag{11-43}$$

Entonces, recordando la definición de *deformación unitaria normal* (ecuación 5-7) y aplicando la regla de la cadena de diferenciación, la deformación unitaria normal en la dirección x' es

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} \tag{11-44}$$

y

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\partial}{\partial x}(u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial x'}(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y}(u\cos\theta + v\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial x'}(x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\operatorname{sen}^2\theta \\ &= \varepsilon_x\cos^2\theta + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \varepsilon_y\operatorname{sen}^2\theta \end{aligned}$$

Por consiguiente, las ecuaciones básicas de transformación, como en la sección 11-11, son

$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x\cos^2\theta + \varepsilon_y\operatorname{sen}^2\theta + \gamma_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta} \tag{11-36}$$

$$\boxed{\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\operatorname{sen} 2\theta} \tag{11-37}$$

Para completar el estudio de la transformación de la deformación unitaria en un punto usando el enfoque analítico debe establecerse la transformación de la deformación unitaria cortante. Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, escribimos la ecuación 5-9 en coordenadas giradas como

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \tag{11-45}$$

Luego, procediendo como antes, tenemos

$$\gamma_{x'y'} = -2(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \gamma_{xy}(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)$$

o

$$\boxed{\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\,\text{sen}\,2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta} \tag{11-38}$$

11-13. Círculo de Mohr para deformación unitaria bidimensional

Las dos ecuaciones básicas para las transformaciones de deformaciones unitarias en dos dimensiones deducidas en la sección precedente se parecen a las ecuaciones para la transformación de esfuerzos deducidas en la Sección 11-3. Para tener una mayor similitud entre el aspecto de las nuevas ecuaciones y las anteriores, la ecuación 11-38 después de dividirla entre 2 se reescribe como la ecuación 11-46:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\,\text{sen}\,2\theta \tag{11-38}$$

$$\boxed{\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\,\text{sen}\,2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta} \tag{11-46}$$

Como esas ecuaciones de transformación de deformación unitaria con las deformaciones unitarias cortantes divididas entre 2 son matemáticamente idénticas a las ecuaciones 11-1 y 11-2 de transformación del esfuerzo, es posible construir también un círculo de Mohr para deformaciones unitarias. En esta construcción, cada punto sobre el círculo da dos valores: uno para la deformación unitaria normal y otro para la deformación unitaria cortante *dividida entre 2*. (Para razones adicionales, véase la Sección 5-5) Las deformaciones unitarias correspondientes a elongaciones son positivas; las correspondientes a contracciones son negativas. Para las deformaciones unitarias cortantes positivas, el ángulo entre los ejes x y y se vuelve más pequeño; véase la figura 11-23. Al dibujar el círculo, los ejes positivos se consideran hacia arriba y hacia la derecha, *de acuerdo con la convención de signos para el Método 1 del círculo de Mohr de esfuerzos*. El eje vertical se mide en términos de $\gamma/2$.

Para ilustrar el círculo de Mohr para deformaciones unitarias, considere que ε_x, ε_y y $+\gamma_{xy}$ son dadas. Entonces, sobre los ejes $\varepsilon - \gamma/2$ en la figura

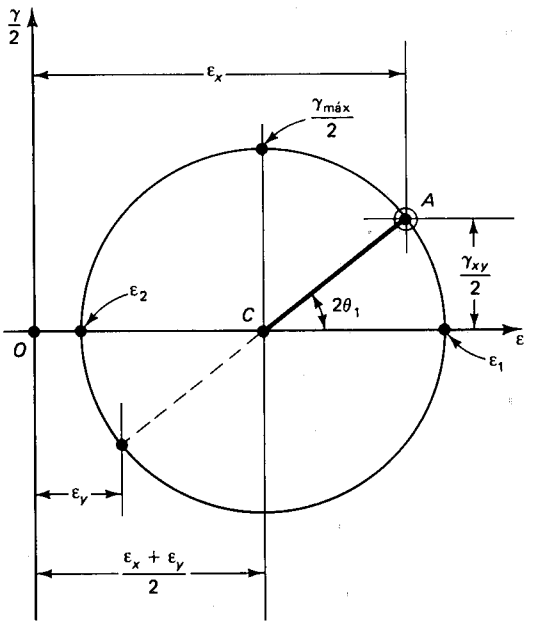


Fig. 11-23 Círculo de Mohr de deformaciones unitarias usando la convención de signos del Método I, Sección 11-7.

11-23, el centro C del círculo está en $[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2, 0]$ y, de acuerdo con los datos dados, el origen de los planos A sobre el círculo está en $(\varepsilon_x, \gamma_{xy}/2)$. Examinando este círculo se llega a conclusiones análogas a las obtenidas antes para el círculo de esfuerzos.

1. La deformación unitaria normal máxima es ε_1; la mínima es ε_2. Estas son las deformaciones unitarias principales y ninguna deformación unitaria cortante está asociada con ellas. Las direcciones de las deformaciones unitarias normales coinciden con las direcciones de los esfuerzos principales. Como puede deducirse del círculo, la expresión analítica para las deformaciones unitarias principales es

$$(\varepsilon_{x'})_{\substack{\text{máx}\\\text{mín}}} = \varepsilon_{1\,o\,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (11\text{-}47)$$

donde el signo positivo de la raíz cuadrada debe usarse para ε_1, que es la deformación unitaria principal máxima en sentido algebraico. El signo negativo debe usarse para ε_2, que es la deformación unitaria principal mínima. Los planos sobre los que actúan las deformaciones unitarias principales pueden definirse analíticamente igualando a cero la ecuación 11-46. Así entonces,

$$\tan 2\theta_1 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (11\text{-}48)$$

Como esta ecuación tiene dos raíces, es completamente análoga a la ecuación 11-6 y puede tratarse de la misma manera.

2. La deformación unitaria cortante máxima $\gamma_{máx}$ es igual a *dos veces* el radio del círculo. Las deformaciones unitarias normales $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ en dos direcciones mutuamente perpendiculares están asociadas con la deformación unitaria cortante máxima.
3. La suma de las deformaciones unitarias normales en dos cualesquiera direcciones mutuamente perpendiculares es *invariante* (es decir, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ = constante). Otras propiedades de las deformaciones unitarias en un punto pueden establecerse estudiando el círculo.

Matemáticamente, en todo respecto, la transformación de deformaciones unitarias es idéntica a la transformación de esfuerzos. Por lo tanto, en un problema tridimensional general de deformaciones unitarias, hay tres direcciones principales en las que las deformaciones unitarias normales tienen lugar. Para *deformación unitaria plana*, cuando $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$, además de las dos deformaciones unitarias principales ε_1 y ε_2, se tiene para la otra deformación unitaria principal $\varepsilon_3 = \varepsilon_z = 0$. Identificando esta última deformación unitaria principal por un punto sobre la gráfica $\varepsilon - \gamma/2$, es posible dibujar un conjunto de tres círculos de deformación unitaria principal, tal como antes se hizo para los círculos de esfuerzos. (Figuras 11-17 y 11-18). Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo. Los círculos de Mohr para deformaciones unitarias degeneran en un punto cuando dos o tres deformaciones unitarias principales son iguales.

Para determinar la deformación unitaria en la dirección z para *esfuerzo plano*, se debe formar una inversa de las primeras tres ecuaciones 5-14 (es decir, resolverlas simultáneamente para expresar los esfuerzos en términos de deformaciones unitarias). Para el esfuerzo en la dirección z, esto da

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \qquad (11\text{-}49)$$

Entonces, como para esfuerzo plano $\sigma_z = 0$,

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (11\text{-}50)$$

Como $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ es invariante, ε_z permanece constante para cualquier transformación coordenada plana. Por consiguiente, en un punto es aplicable el círculo de Mohr de deformaciones unitarias o su equivalente fundamental de transformaciones algebraicas para el problema bidimensional.

Ejemplo 11-7

Se observa que un elemento de un cuerpo en estado de deformación plana se contrae 500 μm/m a lo largo del eje x, se alarga 300 μm/m en la dirección y y se distorsiona un ángulo[13] de 600 μrad, como se muestra en la figu-

[13]Esta medición puede hacerse marcando un pequeño cuadrado sobre un cuerpo, deformando éste y midiendo luego el cambio angular que tiene lugar. Se han usado para este fin, amplificaciones fotográficas de retículas o procedimientos fotogramétricos.

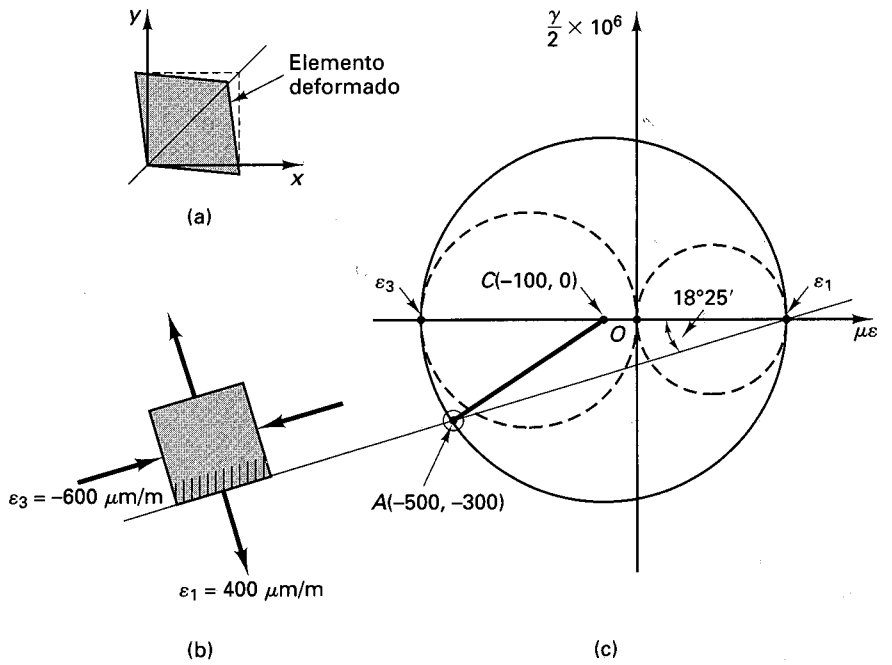


Fig. 11-24 Círculo de Mohr de deformaciones unitarias usando la convención de signos del Método I, Sección 11-7.

ra 11-24(a). Usando el círculo de Mohr, determine las deformaciones unitarias principales en el plano para los datos dados y muestre la dirección en que ocurren. Sobre el mismo diagrama, dibuje los dos círculos restantes para la deformación unitaria principal.

SOLUCIÓN

Los datos dados son $\varepsilon_x = -500\ \mu m/m$, $\varepsilon_y = +300\ \mu m/m$ y $\gamma_{xy} = -600\ \mu m/m$. Por consiguiente, sobre el sistema de ejes $\varepsilon - \gamma/2$, el centro C está en $(\varepsilon_x + \varepsilon_y)/2 = -100\ \mu m/m$ desde O, figura 11-24(c). El origen de los planos A está en $(-500, -300)$. El círculo de radio AC es de $500\ \mu m/m$. Por lo tanto, $\varepsilon_1 = +400\ \mu m/m$ actúa en la dirección perpendicular a la línea $A\varepsilon_1$, y $\varepsilon_3 = -600\ \mu m/m$ actúa en la dirección perpendicular a la línea $A\varepsilon_3$ (no se muestra). Por geometría, $\theta = \tan^{-1} 300/900 = 18°25'$.

Como este es un problema de *deformación unitaria plana*, otra deformación unitaria principal, $\varepsilon_2 = 0$ se encuentra en el origen O de los ejes coordenados. Por lo tanto, los dos pequeños círculos con líneas de rayas se muestran sobre la figura para completar el problema.

11-14. Rosetas de deformación unitaria

Las mediciones de deformaciones unitarias normales son particularmente sencillas de efectuar y se han desarrollado procedimientos muy confiables para este fin. Esas deformaciones unitarias se miden a lo largo de varios

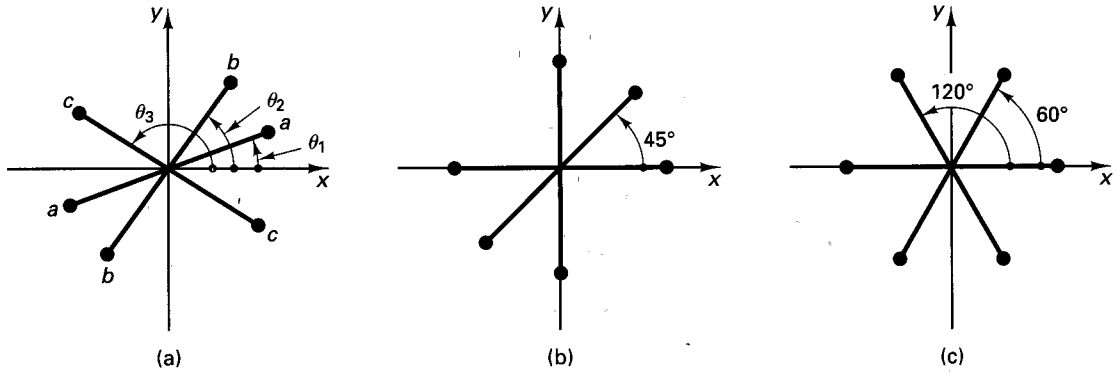


Fig. 11-25 (a) Roseta general de deformación unitaria; (b) roseta de deformación unitaria, rectangular o a 45°; (c) roseta equiangular o delta.

extensómetros agrupados muy cercanamente entre sí, indicados diagramáticamente en la figura 11-25(a) por las líneas $a-a$, $b-b$ y $c-c$. Esas líneas de extensómetros pueden localizarse sobre el miembro investigado con referencia a algunos ejes coordenados (como el x y y) por los ángulos respectivos θ_1, θ_2 y θ_3. Comparando la distancia inicial entre dos puntos de calibración correspondientes cualquiera con la distancia en el miembro sometido a esfuerzos, se obtiene el alargamiento en la longitud calibrada. Dividiendo el alargamiento entre la longitud calibrada da la deformación unitaria en la dirección θ_1, que será designada por $\varepsilon_{\theta 1}$. Efectuando la misma operación con las otras líneas de calibración, se obtienen $\varepsilon_{\theta 2}$ y $\varepsilon_{\theta 3}$. Si las distancias entre los puntos calibrados son pequeñas, se obtienen mediciones que aproximan las deformaciones unitarias en un punto.

Los arreglos en paquete de líneas de extensómetros en un punto, como se muestra en la figura 11-25, se llaman *rosetas de deformación unitaria*. Si se toman tres mediciones de la deformación unitaria en una roseta, la información es suficiente para determinar el estado completo de deformación plana en un punto.

Como ya se hizo ver en la sección 2-2, un método particularmente versátil y exacto para medir deformaciones unitarias emplea extensómetros de deformación eléctricos. Esos extensómetros, hechos de alambre fino o laminitas pegadas a un miembro, son muy sensitivas a los cambios de resistencia eléctrica debida a la deformación en un miembro. Una calibración apropiada[14] relaciona la resistencia del extensómetro con la deformación unitaria. Se usan en general varios tipos de rosetas. Éstas constan usualmente de tres elementos simples agrupados entre sí, como se muestra en la figura 11-26. Las rosetas de laminitas metálicas de este tipo están disponibles en un amplio rango de tamaños, con longitudes activas que varían entre 0.8 y 12 mm.

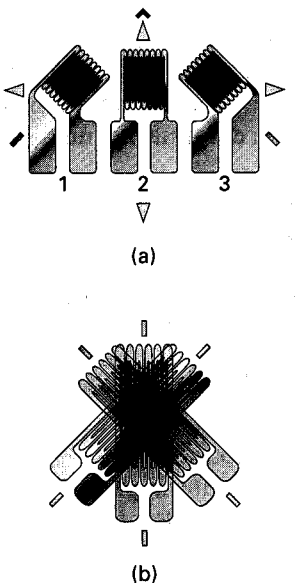


Fig. 11-26 Extensómetros de tres elementos de laminilla metálica de resistencia eléctrica. Cortesía de Micro-Measurements Division, Measurements Group, Inc., Raleigh, Carolina del Norte, EU.

[14]Véase Society for Experimental Mechanics (SEM), A. S. Kobayashi (editor), *Handbook on Experimental Mechanics*, Englewood Cliffs, NJ., Prentice Hall, 1987.

Si los ángulos θ_1, θ_2 y θ_3, junto con las deformaciones unitarias correspondientes $\varepsilon_{\theta 1}$, $\varepsilon_{\theta 2}$ y $\varepsilon_{\theta 3}$, son conocidos por mediciones, pueden escribirse tres ecuaciones simultáneas del tipo de la ecuación 11-36. Al escribir esas ecuaciones, es conveniente emplear la siguiente notación: $\varepsilon_{x'} \equiv \varepsilon_{\theta 1}$, $\equiv \varepsilon_{\theta 2}$ y $\varepsilon_{x''} \equiv \varepsilon_{\theta 3}$. Usando este simbolismo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta 1} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_1 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_1 \\
\varepsilon_{\theta 2} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_2 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_2 \qquad (11\text{-}51) \\
\varepsilon_{\theta 3} &= \varepsilon_x \cos^2 \theta_3 + \varepsilon_y \operatorname{sen}^2 \theta_3 + \gamma_{xy} \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_3
\end{aligned}$$

Este conjunto de ecuaciones puede resolverse para ε_{01}, ε_{02} y γ_{xy} y el problema se revierte a los casos ya considerados.

Para minimizar el trabajo de cálculo, los extensómetros en una roseta son usualmente dispuestos de manera ordenada. Por ejemplo, en la figura 11-25(b), $\theta_1 = \theta°$, $\theta_2 = 45°$ y $\theta_3 = 90°$. Este arreglo de las líneas de los extensómetros se conoce como *rectangular* o *roseta de deformación unitaria* a 45°. Por sustitución directa en la ecuación 11-51, se encuentra que para esta roseta

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0°} \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_{90°} \qquad 2\varepsilon_{45°} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}$$

o

$$\boxed{\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45°} - (\varepsilon_{0°} + \varepsilon_{90°})} \qquad (11\text{-}52)$$

Entonces, ε_x, ε_y y γ_{xy} resultan conocidos. Variantes de este arreglo se muestran en la figura 11-26.

Otro arreglo de líneas de extensómetros se muestra en la figura 11-25(c). Esta se conoce como la *roseta equiangular*, o *delta* o a 60°. De nuevo, sustituyendo en la ecuación 11-51 y simplificando,

$$\boxed{\varepsilon_x = \varepsilon_{0°}} \qquad \boxed{\varepsilon_y = (2\varepsilon_{60°} + 2\varepsilon_{120°} - \varepsilon_{0°})/3} \qquad (11\text{-}53a)$$

y

$$\boxed{\gamma_{xy} = 2(\varepsilon_{60°} - \varepsilon_{120°})/\sqrt{3}} \qquad (11\text{-}53b)$$

Otros tipos de rosetas son usadas a veces en experimentos. Los datos de todas las rosetas pueden ser analizados aplicando la ecuación 11-51, despejando ε_x, ε_y y γ_{xy} y luego aplicando las ecuaciones de transformación de la deformación unitaria o construyendo el círculo de Mohr para encontrar las deformaciones unitarias principales.

Algunas veces se usan rosetas con más de tres líneas. Una línea adicional de medición proporciona una verificación del trabajo experimental. Para esas rosetas, la invariancia de las deformaciones unitarias en las direcciones mutuamente perpendiculares puede usarse para verificar la invariancia.

La aplicación del procedimiento experimental de las rosetas en problemas complicados de análisis de esfuerzos es casi indispensable.

En la mayoría de los problemas en que se usan rosetas de deformación, es necesario determinar los esfuerzos principales en el punto de medición de la deformación unitaria. En este problema, la superficie en que se miden las deformaciones unitarias está generalmente libre de esfuerzos normales superficiales importantes (es decir, $\sigma_z = 0$). Por tanto, éste es un problema de *esfuerzo plano*. Por consiguiente, las ecuaciones 5-14 escritas en términos de los esfuerzos principales, σ_1 y σ_2, toman la forma

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu\frac{\sigma_1}{E} \tag{11-54}$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneamente para los esfuerzos principales, se obtienen las relaciones requeridas:

$$\boxed{\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)} \qquad \boxed{\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1)} \tag{11-55}$$

Las constantes elásticas E y ν deben determinarse experimentalmente. Con ayuda del trabajo experimental pueden resolverse con éxito problemas muy complicados.

Ejemplo 11-8

En cierto punto sobre una parte de máquina, las mediciones con una roseta eléctrica rectangular indican que $\varepsilon_{0°} = -500\ \mu\text{m/m}$, $\varepsilon_{45°} = +200\ \mu\text{m/m}$ y $\varepsilon_{90°} = +300\ \mu\text{m/m}$. Suponiendo que $E = 200$ GPa y $\nu = 0.3$, encuentre los esfuerzos principales en el punto investigado.

SOLUCIÓN

De la ecuación 11-52,

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45°} - (\varepsilon_{0°} + \varepsilon_{90°}) = 2 \times 200 - (-500 + 300) = 600\ \mu\text{m/m}$$

Las deformaciones unitarias principales para estos datos fueron determinadas en el ejemplo 11-7 y son $\varepsilon_1 = 400\ \mu\text{m/m}$ y $\varepsilon_2 = -600\ \mu\text{m/m}$. Por tanto, usando las ecuaciones 11-55,

$$\sigma_1 = \frac{200 \times 10^3}{1 - 0.3^2}[400 + 0.3 \times (-600)] \times 10^{-6} = +48.4\ \text{MPa}$$

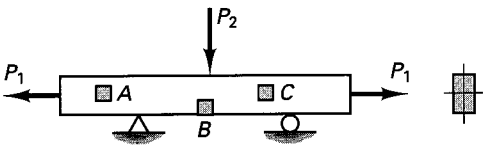
$$\sigma_2 = \frac{200 \times 10^3}{1 - 0.3^2}(-600 + 0.3 \times 400) \times 10^{-6} = 105\ \text{MPa}$$

El esfuerzo de tensión σ_1 actúa en la dirección de ε_1; véase la figura 11-24. El esfuerzo de compresión σ_2 actúa en la dirección de ε_2.

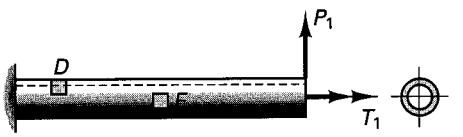
PROBLEMAS

Sección 11-2

11-1. Elementos infinitesimales A, B, C, D y E son mostrados en las figuras para dos miembros diferentes. Dibuje cada elemento por separado y sobre el elemento aislado indique el esfuerzo que actúa sobre él. Para cada esfuerzo, muestre claramente su dirección y sentido por medio de flechas e indique la fórmula que se usaría para su cálculo. Desprecie el peso de los miembros.



(a)



(b)

Fig. P11-1

11-2 al 11-5. Para los elementos infinitesimales mostrados en las figuras, encuentre los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre los planos inclinados indicados. Use el método de análisis de la "cuña" visto en el ejemplo 11-1.

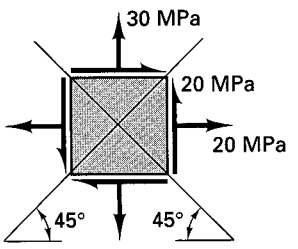


Fig. P11-2

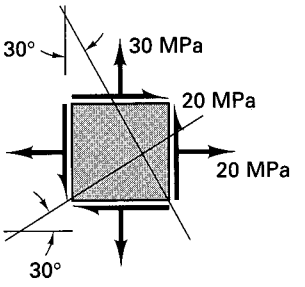


Fig. P11-3

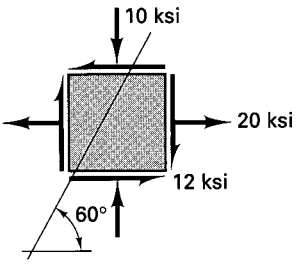


Fig. P11-4

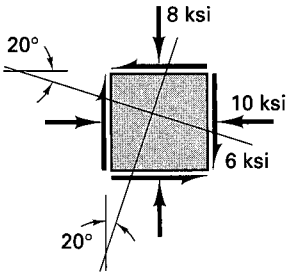


Fig. P11-5

11-6. Las magnitudes y sentidos de los esfuerzos en un punto son como se muestran en la figura. Determine los esfuerzos que actúan sobre los planos vertical y horizontal.

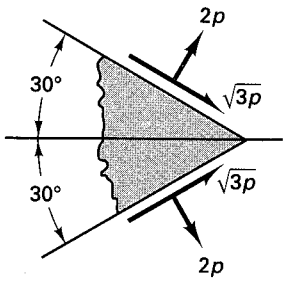


Fig. P11-6

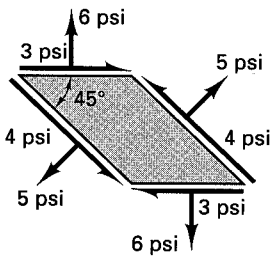


Fig. P11-7

11-7. El elemento infinitesimal mostrado en la figura está en equilibrio. Determine los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre el plano vertical.

11-8. En un punto particular en un miembro de madera, el estado de esfuerzo es el mostrado en la figura. La dirección del grano en la madera forma un ángulo de $+30°$ con el eje x. El esfuerzo cortante permisible paralelo al grano es de 150 psi para esta madera. ¿Es permisible este estado de esfuerzo? Verifique su respuesta por medio de cálculos.

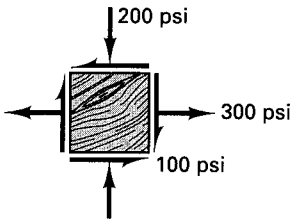


Fig. P11-8

11-9. Después del montaje de una estructura pesada se estima que el estado de esfuerzo en la cimentación de roca será esencialmente bidimensional tal como el mostrado en la figura. Si la roca está estratificada de manera que los estratos forman un ángulo de 30° con la vertical, ¿es permisible el anticipado estado de esfuerzo? Suponga que el coeficiente de fricción estático de roca sobre roca es de 0.50 y que a lo largo de los planos de estratificación la cohesión es de 85 kN/m^2.

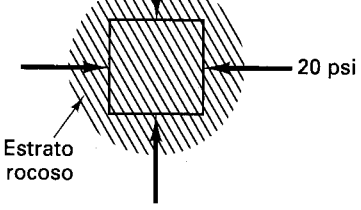


Fig. P11-9

Secciones 11-3 a 11-5

11-10. Deduzca la ecuación 11-2.

11-11. Usando las ecuaciones 11-1 y 11-2, resuelva el problema 11-2.

11-12. Usando las ecuaciones 11-1 y 11-2, resuelva el problema 11-3

11-13. Usando las ecuaciones 11-1 y 11-2, resuelva el problema 11-4..

11-14. Usando las ecuaciones 11-1 y 11-2, resuelva el problema 11-5.

11-15. Si en un punto $\sigma_x = +8$ ksi, $\sigma_y = +2$ ksi y $\tau = +4$ ksi, ¿cuáles son los esfuerzos principales? Muestre sus magnitudes y sentidos sobre un elemento apropiadamente orientado.

11-16. Determine los esfuerzos cortantes máximos (principales) y los esfuerzos normales asociados para el problema anterior. Muestre los resultados sobre un elemento apropiadamente orientado.

11-17 al 11-20. Para los siguientes datos, usando las ecuaciones de transformación de esfuerzos, (a) encuentre los esfuerzos principales y muestre sus sentidos sobre elementos apropiadamente orientados; (b) encuentre los esfuerzos cortantes máximos (principales) con los esfuerzos normales asociados y muestre los resultados sobre elementos apropiadamente orientados; y (c) verifique la invariancia de los esfuerzos normales para las soluciones en (a) y (b).

11-17. $\sigma_x = -30$ ksi, $\sigma_y = +10$ ksi y $\tau = -20$ ksi

11-18. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = +20$ ksi y $\tau = +10$ ksi

11-19. $\sigma_x = -40$ MPA, $\sigma_y = +10$ MPa y $\tau = +20$ MPa

11-20. $\begin{pmatrix} 20 & -20 \\ -20 & -10 \end{pmatrix}$ MPa

11-21. $\begin{pmatrix} 0 & -30 \\ -30 & -40 \end{pmatrix}$ ksi

Secciones 11-6 y 11-7

11-22 al 11-25. Dibuje los círculos de Mohr para los estados de esfuerzo mostrados en las figuras. (a) Determine los esfuerzos principales y muestre sus sentidos sobre elementos aislados apropiadamente orientados. (b) Encuentre los esfuerzos cortantes máximos (principales) con los esfuerzos normales asociados y muestre los resultados sobre elementos apropiadamente orientados. Para ambos casos, verifique la invariancia de los esfuerzos normales.

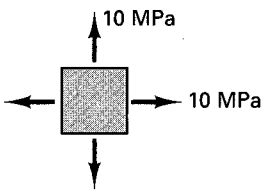


Fig. P11-22

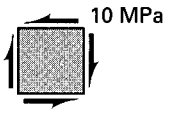


Fig. P11-23

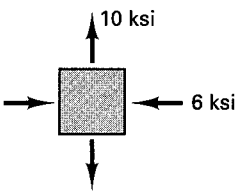


Fig. P11-24

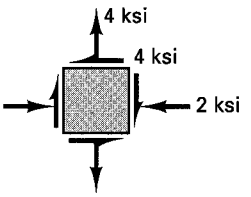


Fig. P11-25

11-26 al 11-32. Para los siguientes datos, usando círculos de Mohr de esfuerzos *y trigonometría*, (a) encuentre los esfuerzos principales y muestre sus sentidos sobre elementos aislados apropiadamente orientados; (b) encuentre los esfuerzos cortantes máximos (principales) con los esfuerzos normales asociados y muestre los resultados sobre elementos apropiadamente orientados. En cada caso, verifique la invariancia de los esfuerzos normales.

11-26. $\sigma_x = +50$ MPa, $\sigma_y = +30$ MPa y $\tau = +20$ MPa

11-27. $\sigma_x = +80$ psi, $\sigma_y = +20$ psi y $\tau = +40$ *psi*

11-28. $\sigma_x = -30$ ksi, $\sigma_y = +10$ ksi y $\tau = -20$ ksi

11-29. $\sigma_x = -40$ MPa, $\sigma_y = -30$ MPa y $\tau = +25$ MPa

11-30. $\sigma_x = -15$ MPa, $\sigma_y = +35$ MPa y $\tau = +60$ MPa

11-31. $\sigma_x = +20$ ksi, $\sigma_y = 0$ y $\tau = -15$ ksi

11-32. $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = -20$ ksi, y $\tau = -10$ ksi

11-33 al 11-36. Para los siguientes datos, usando el círculo de Mohr de esfuerzos, determine los esfuerzos normales y cortantes que actúan sobre los planos definidos por el ángulo dado θ. Muestre los resultados sobre elementos aislados.

11-33. $\sigma_x = \sigma_1 = 0$, $\sigma_y = \sigma_2 = -20$ ksi, para $\theta = +30°$

11-34. Resuelva el problema 11-4 con $\theta = +30°$

11-35. Resuelva el problema 11-2 con $\theta = +45°$

11-36. $\sigma_x = \sigma_y = 0$, $\tau = -20$ ksi, para $\theta = 20°$

11-37. Para los datos mostrados para el problema 11-6, usando el círculo de Mohr de esfuerzos, encuentre los esfuerzos principales y muestre los resultados sobre un elemento apropiadamente orientado.

11-38. Para los datos mostrados para el problema 11-7, usando el círculo de Mohr de esfuerzos, encuentre los esfuerzos principales y la orientación de los planos sobre los que actúan.

11-39. Usando el círculo de Mohr, determine el ángulo entre la cara derecha del elemento mostrado en la figura y el plano o planos donde el esfuerzo normal es cero. Verifique el resultado usando el método de la "cuña". Muestre los esfuerzos con sus sentidos apropiados sobre el elemento(s) girado.

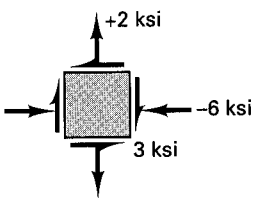


Fig. P11-39

11-40. Una llave transmite una fuerza F a una ménsula, como se muestra en la figura. El análisis de esfuerzos de esta ménsula da las siguientes componentes de esfuerzo actuando sobre el elemento A: 1000 psi debido a flexión, 1500 psi debido a fuerza axial y 600 psi debido a cortante. (Note que éstas son sólo magnitudes de esfuerzos; sus direcciones y sentidos deben determinarse por inspección.) (a) Indique los esfuerzos resultantes sobre un croquis del elemento aislado A. (b) Usando el círculo de Mohr para el estado de esfuerzo encontrado en (a), determine los esfuerzos principales y los esfuerzos cortantes máximos con los esfuerzos normales asociados. Muestre los resultados sobre elementos orientados apropiadamente.

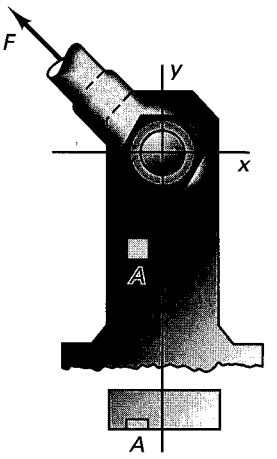


Fig. P11-40

11-41. En el punto A sobre un borde descargado de un cuerpo elástico, orientado como se muestra en la figura respecto a los ejes $x'y$, el esfuerzo cortante máximo es de 3500 kN/m^2. (a) Encuentre los esfuerzos principales y (b) determine el estado de esfuerzo sobre un elemento orientado con sus bordes paralelos a los ejes $x'y$. Muestre los resultados sobre un dibujo del elemento en A.

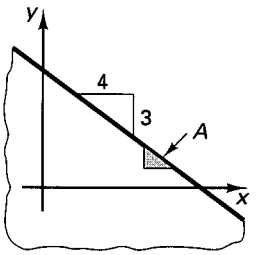


Fig. P11-41

11-42. Considere un cuerpo linealmente elástico semiinfinito con una carga de línea concentrada de P lb por pulgada. (Véase la figura.) Esto aproxima una zapata de cimentación larga sobre el suelo o el borde de una cuchilla oprimiendo a una larga pieza plana de metal (idealización de la reacción de apoyo de un rodillo sobre un cojinete). Usando los métodos de la teoría de la elasticidad puede mostrarse[1] que la aplicación de la carga causa sólo esfuerzos radiales, que están dados por

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

Como éste es el único esfuerzo, es el principal. Además, para elementos infinitesimales, ninguna distinción tiene que hacerse entre los elementos cartesianos y polares. Transforme σ_r en σ_x, σ_y y τ_{xy} a una profundidad a bajo la superficie.

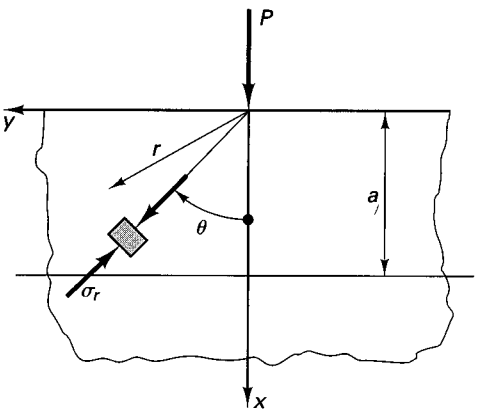


Fig. P11-42

[1]S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1951, p. 85.

11-43. Considere una cuña elástica de espesor unitario sometida a una carga de línea concentrada P en el ápice, como se muestra en la figura. De acuerdo con la solución de la teoría de la elasticidad,[2] esta carga sólo genera una distribución de esfuerzo radial, dada por

$$\sigma_r = -\frac{P\cos\theta}{r[\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha]}$$

Con base en esta fórmula, determine la distribución de esfuerzo vertical sobre una sección horizontal a una distancia a debajo del ápice. Compare el esfuerzo cortante máximo así encontrado con el dado por la ecuación 1-6 para $\alpha = 10°$ y $45°$.

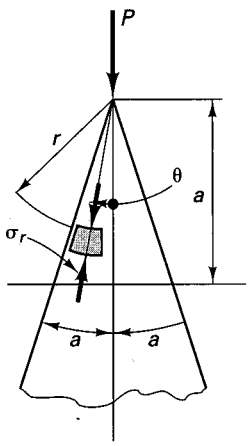


Fig. P11-43

11-44. Una cuña elástica de espesor unitario está sometida a una fuerza P vertical, como se muestra en la figura. Para tal cuña, la solución de la teoría de la elasticidad muestra que sólo existe la distribución de esfuerzo radial que está dada[3] por

$$\sigma_r = \frac{P\cos\theta}{r[\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\alpha]}$$

Determine los esfuerzos normal y cortante sobre una sección vertical a una distancia x de la fuerza aplicada P y compárela con las soluciones elementales. Si $\alpha = 30°$, encuentre el porcentaje de discrepancia entre los esfuerzos máximos en las soluciones alternativas.

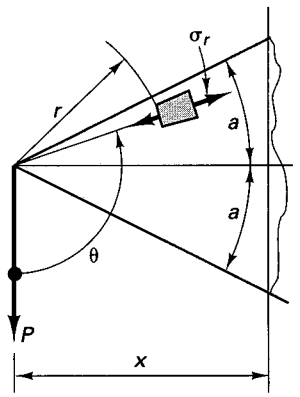


Fig. P11-44

Secciones 11-8 y 11-9

11-45. Determine los esfuerzos principales y sus direcciones para el siguiente tensor esfuerzo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ksi}$$

Use el procedimiento visto en la Sección 11-8. Los cosenos directores deben ser normalizados. (Este problema puede también resolverse usando las ecuaciones para la transformación de esfuerzos vista en las Secciones 11-4 y 11-7.)

11-46. Para el siguiente tensor esfuerzo, determine (a) los invariantes de esfuerzo, (b) los esfuerzos principales y (c) la dirección del esfuerzo máximo principal. Los cosenos directores para este esfuerzo principal deben normalizarse.

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & 8 \\ -6 & 8 & 14 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

11-47. Para los datos en el problema 11-26, determine los esfuerzos principales y dibuje los tres círculos de esfuerzo principales.

[2] *Ibid.*, p. 97.
[3] *Ibid.*

11-48. Para los datos en el problema 11-28, determine los esfuerzos principales y dibuje los tres círculos de esfuerzo principales.

11-49. Aplicando las ecuaciones 11-39 y 11-45, determine los esfuerzos principales y sus direcciones para los datos dados en el ejemplo 11-3.

Secciones 11-11 y 11-12

11-50. Deduzca nuevamente la ecuación 11-36 suponiendo que la deformación cortante ocurre primero, luego la deformación en la dirección y y finalmente la deformación en la dirección x.

11-51. Con ayuda de la figura 11-20, demuestre que

$$\beta = -(\epsilon_x - \epsilon_y) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \gamma_{xy} \cos^2\theta$$

11-52. Si las deformaciones unitarias son $\varepsilon_x = -120\ \mu m/m$, $\varepsilon_y = +1120\ \mu m/m$ y $\gamma = -200\ \mu m/m$, ¿cuáles son las deformaciones unitarias principales y en qué direcciones se presentan? Use las ecuaciones 11-47 y 11-48.

11-53. Si las deformaciones unitarias son $\varepsilon_x = -800\ \mu m/m$, $\varepsilon_y = -200\ \mu m/m$ y $\gamma = +800\ \mu m/m$, ¿cuáles son las deformaciones unitarias principales y en qué direcciones se presentan? Use las ecuaciones 11-47 y 11-48.

11-54. Para el siguiente tensor de deformación, utilizando el método análogo al descrito en la sección 11-8 para la transformación del esfuerzo, determine (a) las deformaciones principales, y (b) las direcciones máximas y mínimas de las mismas deformaciones principales.

$$\begin{pmatrix} 70 & -10\sqrt{3} & 0 \\ -10\sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} \mu m/m$$

Sección 11-13

11-55. Resuelva el problema 11-48 usando el círculo de Mohr para deformaciones unitarias.

11-56. Resuelva el problema 11-49 usando el círculo de Mohr para deformaciones unitarias.

Sección 11-14

11-57. Las deformaciones unitarias medidas por una roseta rectangular, unida a un miembro cargado de acero, son $\varepsilon_{0°} = -220\ \mu m/m$, $\varepsilon_{45°} = +120\ \mu m/m$ y $\varepsilon_{90°} = +220\ \mu m/m$. ¿Qué valor tienen los esfuerzos principales y en qué dirección actúan? $E = 30 \times 10^6$ psi y $\nu = 0.3$.

11-58. Las deformaciones unitarias medidas por una roseta equiangular, unida a un miembro cargado de aluminio, son $\varepsilon_{0°} = +400\ \mu m/m$, $\varepsilon_{60°} = +400\ \mu m/m$ y $\varepsilon_{120°} = -600\ \mu m/m$. ¿Qué valor tienen los esfuerzos principales y en qué dirección actúan? $E = 70$ GPa y $\nu = 0.25$.

11-59. Los datos proporcionados por una roseta de deformación con cuatro líneas unida a un miembro de aluminio sometido a esfuerzos son: $\varepsilon_{0°} = -120\ \mu m/m$, $\varepsilon_{45°} = +400\ \mu m/m$, $\varepsilon_{90°} = +1120\ \mu m/m$ y $\varepsilon_{135°} = +600\ \mu m/m$. Verifique la consistencia de los datos. Luego determine los esfuerzos principales y las direcciones en que actúan. Use los valores de E y ν dados en el problema 11-58.

11-60. Se tiene la siguiente información en un punto de una placa elástica sometida a esfuerzos: deformación unitaria cortante máxima $\gamma_{máx} = 500\ \mu m/m$ y la suma de los esfuerzos normales sobre dos planos perpendiculares que pasan por el punto es de 27.5 MPa. Las propiedades elásticas de la placa son $E = 200$ GPa, $G = 80$ GPa y $\nu = 0.25$. Calcule la magnitud de los esfuerzos principales en el punto.

12

Fluencia y criterios de fractura

12-1. Introducción

De lo estudiado antes en el texto, debería ser claro que en numerosos problemas técnicos, el estado de esfuerzo y deformación en puntos críticos puede ser muy complejo. Se dispone de procedimientos matemáticos idealizados para determinar esos estados así como sus transformaciones a coordenadas diferentes. Sin embargo, la respuesta precisa de los materiales reales a tales esfuerzos y deformaciones se resiste a formulaciones exactas. Un buen número de preguntas permanecen sin respuesta y son parte de un área activa de la investigación de los materiales. Hasta ahora, ninguna teoría puede proporcionar predicciones exactas del comportamiento del material bajo la multitud de cargas estáticas, dinámicas, de impacto, cíclicas así como efectos de temperatura. Sólo la idealización clásica de los criterios de fluencia y fractura de los materiales se verá aquí. Por necesidad ésta se usa en la mayor parte de los diseños estructurales y de maquinaria. Esas teorías de resistencia están estructuradas para aplicarse a clases particulares de materiales. Los dos criterios más ampliamente aceptados para la aparición del comportamiento inelástico (fluencia) en materiales dúctiles bajo esfuerzos combinados, serán analizados primero. A esto sigue la presentación de un criterio de fractura para materiales frágiles. Debe enfatizarse

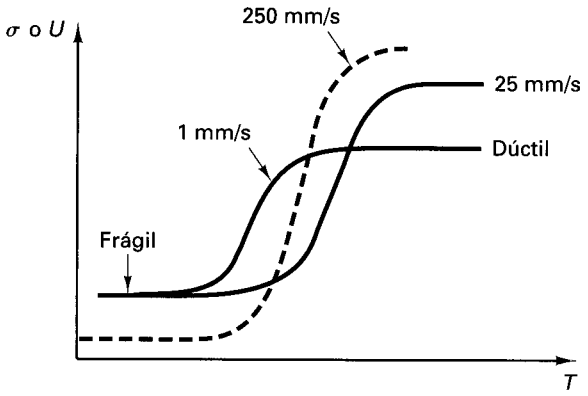


Fig. 12-1 Curvas típicas de transición para esfuerzo o energía de fractura *versus* temperatura para acero al bajo carbono (adaptado de Manjoine, véase pie de página 1).

que, al clasificar los materiales de esta manera, uno se refiere al estado frágil o dúctil del material, ya que esta característica es fuertemente afectada por la temperatura así como por el estado de esfuerzo mismo. Por ejemplo, algunos aceros al bajo carbono, por debajo de sus temperaturas de transición de aproximadamente 10°C (+50°F), se vuelven frágiles, perdiendo sus excelentes propiedades[1] de ductilidad, y se comportan como materiales diferentes (Fig. 12-1). La evidencia experimental muestra que la temperatura de transición es sensible a la velocidad de aplicación de la carga. Para altas velocidades, la temperatura de transición tiende a ocurrir a temperaturas más altas.

La mayor parte de la información sobre fluencia y fractura de los materiales bajo la acción de esfuerzos biaxiales proviene de experimentos llevados a cabo en cilindros de pared delgada. Un arreglo típico para un experimento se muestra en la figura 12-2. Los extremos del cilindro de pared delgada del material que se está investigando están cerrados firmemente con tapas. Esto forma el interior hueco de un recipiente a presión cilíndrico. Sometiendo a presión el espacio disponible hasta que ocurre la fluencia o la ruptura, los elementos de la pared quedan sometidos a esfuerzos biaxiales de razón constante $\sigma_1/\sigma_2 = 2$. Aplicando una fuerza adicional de tensión P a las tapas, el esfuerzo σ_2 se incrementa a cualquier cantidad predeterminada $\sigma_2 + \sigma''$. Aplicando una fuerza de compresión, el esfuerzo σ_2 puede minimizarse o eliminarse. Un esfuerzo real de compresión en la dirección longitudinal no es deseable ya que el tubo puede pandearse. Manteniendo una razón fija entre los esfuerzos principales hasta que se alcanza el punto de falla, se obtienen los datos deseados de un material. Experimentos análogos en tubos simultáneamente sometidos a pares de torsión, fuerza axial y presión, son también llevados a cabo. Una interpretación de esos datos, junto con toda la demás evidencia experimental, in-

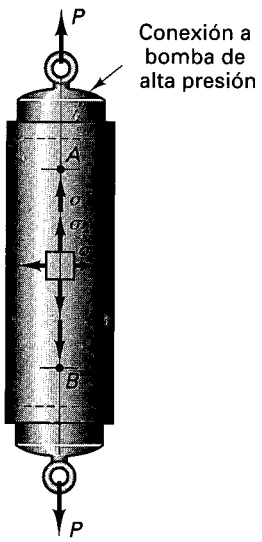


Fig. 12-2 Arreglo para velocidades controladas de esfuerzos principales.

[1]Véase M. J. Manjoine, "Influence of rate of strain and temperature on yield stresses of mild steel" ("Influencia de la velocidad de deformación y de la temperatura sobre los esfuerzos de fluencia del acero dulce"), *J. Appl. Mech., ASME*, 1944, A211-218.

cluidas las pruebas de tensión simple, permite la formulación de teorías de falla para varios materiales sometidos a esfuerzos combinados

12-2. Teoría del esfuerzo cortante máximo

La teoría del esfuerzo cortante máximo[2] o simplemente la teoría del cortante máximo, resulta de la observación de que en un material *dúctil* aparecen deslizamientos durante la fluencia, a lo largo de planos críticamente orientados. Esto sugiere que el esfuerzo cortante máximo desempeña el papel clave y se supone que la fluencia del material depende únicamente del máximo esfuerzo cortante que se alcanza dentro de un elemento. Por consiguiente, siempre que se alcanza cierto valor crítico τ_{cr} comienza la fluencia en un elemento.[3] Para un material dado, por lo común este valor es igual al esfuerzo cortante de fluencia en tensión o compresión simples. Por tanto, de acuerdo con la ecuación 11-9, si $\sigma_x = \pm\sigma_1 \neq 0$ y $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$,

$$\tau_{máx} \equiv \tau_{cr} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{yp}}{2} \tag{12-1}$$

lo cual significa que si σ_{yp} es el esfuerzo en el punto de fluencia hallado, por ejemplo, en una prueba de tensión simple, el esfuerzo cortante máximo correspondiente es igual a la mitad de aquel. Esta conclusión también se deduce fácilmente del círculo de Mohr para esfuerzos.

Al aplicar este criterio a un problema de esfuerzo plano biaxial, surgen dos casos diferentes. En un caso, los signos de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son iguales. Tomándolos como de tensión, como en la figura 12-3(a) y haciendo $\sigma_3 = 0$, los círculos de Mohr del esfuerzo principal resultantes son como se muestra en la figura 12-3(b). Aquí, el esfuerzo cortante máximo es de la misma magnitud que el que ocurriría bajo un esfuerzo uniaxial simple, como en las figuras 12-3(a) y (c). Por tanto, si $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, entonces de acuerdo con la ecuación 12-1, $|\sigma_1|$ no debe exceder de σ_{yp}. Similarmente, si $|\sigma_2| > |\sigma_1|$, $|\sigma_2|$ no debe ser mayor que σ_{yp}. Por tanto, los criterios correspondientes a este caso son

$$\boxed{|\sigma_1| \leq \sigma_{yp}} \quad \text{y} \quad \boxed{|\sigma_2| \leq \sigma_{yp}} \tag{12-2}$$

El segundo caso es considerado en la figura 12-3(d)-(f), donde los signos de σ_1 y σ_2 son opuestos y $\sigma_3 = 0$. El círculo de Mohr más grande pasa por σ_1 y σ_2 y el esfuerzo cortante máximo $\tau_{máx} = (|\sigma_1| + |\sigma_2|)/2$. Los planos alternativos de deslizamiento posible están identificados en la figura 12-3(d) y

[2]Esta teoría parece haber sido propuesta originalmente por C. A. Coulomb en 1773. En 1868, H. Tresca presentó ante la Academia Francesa los resultados de su trabajo sobre el flujo de metales sometidos a grandes presiones. Ahora, esta teoría lleva a menudo su nombre.

[3]En cristales individuales, el deslizamiento ocurre según planos y direcciones preferentes. En estudios de este fenómeno se debe determinar con todo cuidado la componente efectiva del esfuerzo cortante que produce deslizamiento. Aquí se supone que debido a la orientación al azar de numerosos cristales, el material tiene propiedades isotrópicas, por lo que determinando $\tau_{máx}$ se encuentra el esfuerzo cortante crítico.

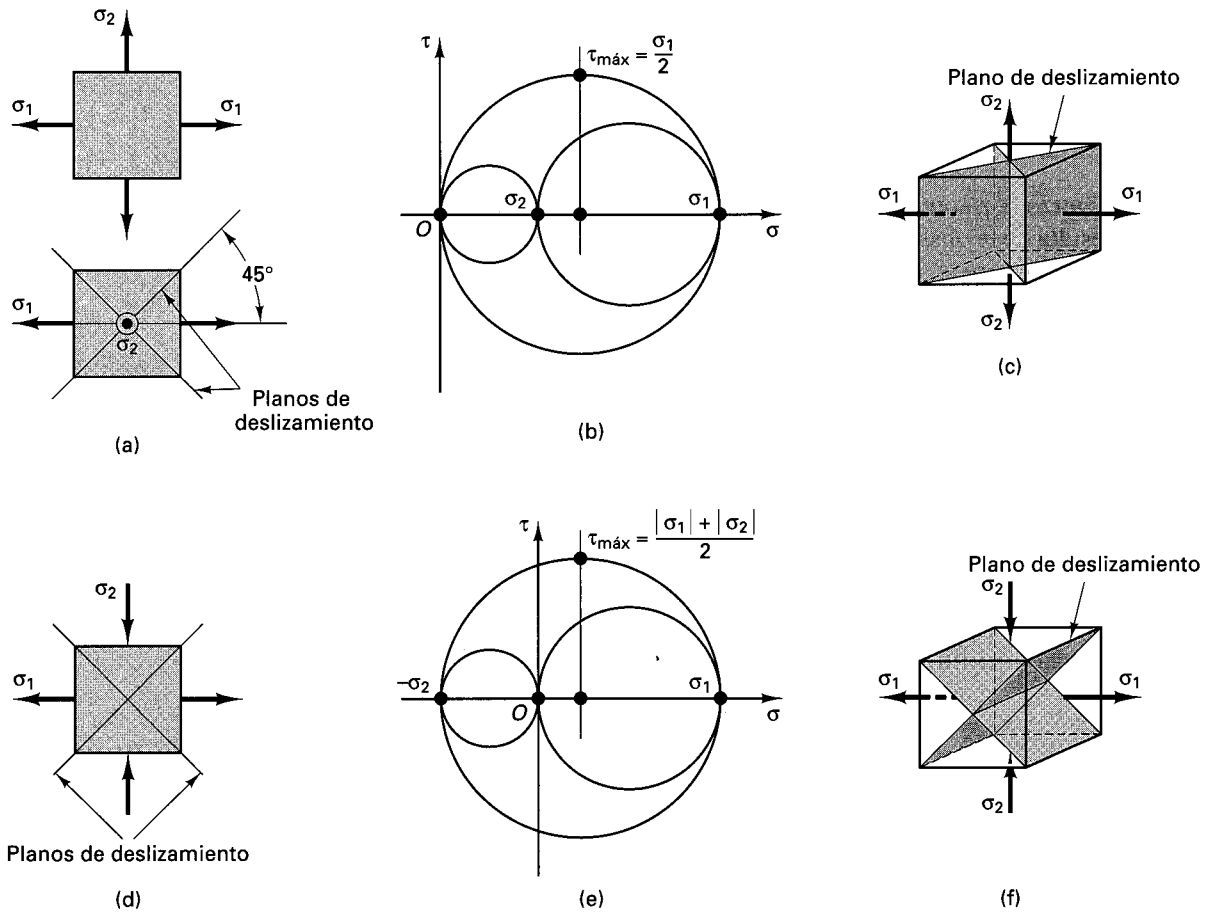


Fig. 12-3 Planos de $\tau_{máx}$ para esfuerzo biaxial.

(f). Este esfuerzo cortante máximo no puede exceder el criterio de fluencia cortante en tensión simple (es decir, $\tau_{máx} \leq \sigma_{yp}/2$). Por consiguiente,

$$\left| \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{yp}}{2} \tag{12-3}$$

o, para fluencia inminente,

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}} = \pm 1 \tag{12-4}$$

Una gráfica de esta ecuación da las dos líneas inclinadas mostradas en la figura 12-4. Dividiendo las ecuaciones 12-2 entre σ_{yp}, se obtiene la misma

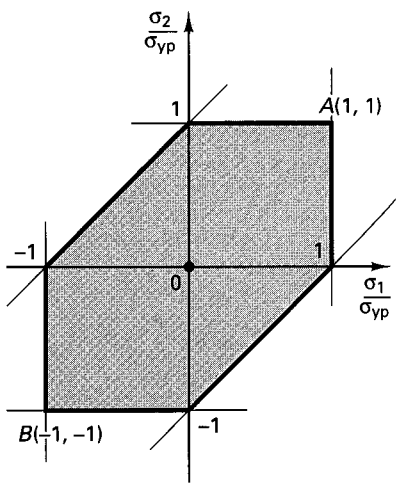


Fig. 12-4 Criterio de fluencia basado en el esfuerzo cortante máximo.

forma que la ecuación 12-4. Esas ecuaciones modificadas, $\sigma_1/\sigma_{yp} = \pm 1$, y $\sigma_2/\sigma_{yp} = \pm 1$, se grafican, respectivamente, en la figura 12-4, como dos líneas verticales y dos líneas horizontales. Entonces, considerando σ_1/σ_{yp} y σ_2/σ_{yp} como coordenadas de un punto en este espacio de esfuerzos principales, pueden obtenerse algunas conclusiones importantes.

Si un punto definido por σ_1/σ_{yp} y σ_2/σ_{yp} cae sobre el hexágono mostrado en la figura 12-4, un material comienza y continúa fluyendo. Ninguno de los puntos anteriores de esfuerzo puede encontrarse fuera del hexágono porque una de las tres ecuaciones de criterios de fluencia dadas antes para un material perfectamente plástico sería violada. Un punto de esfuerzo que cae dentro del hexágono indica que el material se comporta elásticamente.

Note que, de acuerdo con la teoría del cortante máximo, si se agregan esfuerzos hidrostáticos de tensión o de compresión (es decir, esfuerzos tales que $\sigma_1' = \sigma_2' = \sigma_3'$), no se predice ningún cambio en la respuesta del material. Al agregar esos esfuerzos se desplazan solamente los círculos de Mohr a lo largo del eje σ y $\tau_{máx}$ permanece igual. Note también que como los esfuerzos cortantes máximos son definidos sobre planos irrespectivamente de las propiedades direccionales del material, queda implícito que el material es *isótropo*.

El criterio de fluencia deducido para un material perfectamente plástico se llama a menudo *condición de fluencia de Tresca* y es una de las leyes de la plasticidad ampliamente usadas.

12-3. Teoría de la energía de distorsión máxima

Otro criterio de fluencia ampliamente aceptado para materiales isótropos *dúctiles* se basa en los conceptos de energía.[4] En este enfoque, la energía elástica total se divide en dos partes: una asociada a los cambios volumétricos del material, y otra que causa distorsiones por cortante. Igualando la energía de distorsión o deformación por cortante en el punto de fluencia en tensión simple a la energía correspondiente a esfuerzo combinado, se establece el criterio de fluencia para esfuerzos de esta última clase.

Con el fin de deducir la expresión que da la condición de fluencia para esfuerzo combinado, se debe emplear el procedimiento de resolución del estado general de esfuerzo. Éste se basa en el concepto de superposición. Por ejemplo, es posible considerar el tensor esfuerzo correspondiente a los tres esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3, compuesto de dos tensores componentes aditivos. Los elementos de un tensor componente se definen como el esfuerzo "hidrostático" medio:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \tag{12-5}$$

[4]El primer intento de usar la energía total como criterio de fluencia fue hecho por E. Beltrami de Italia en 1885. En su forma presente, la teoría fue propuesta por M. T. Huber de Polonia en 1904 y fue ampliada y explicada por R. von Mises (1913) y H. Hencky (1925), originarios de Alemania y Estados Unidos, respectivamente.

Los elementos del otro tensor son $(\sigma_1 - \overline{\sigma})$, $(\sigma_2 - \overline{\sigma})$, y $(\sigma_3 - \overline{\sigma})$. Escribiendo lo anterior en representación matricial, se tiene

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \overline{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \overline{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \overline{\sigma} \end{pmatrix} \quad (12\text{-}6)$$

Esta resolución del estado general de esfuerzo se muestra esquemáticamente en la figura 12-5. En esta figura el caso especial de resolución del estado uniaxial de esfuerzo ha sido llevado un paso más adelante. La suma de los esfuerzos en las figuras 12-5(f) y (g) corresponde al último tensor de la ecuación 12-6.

Para el estado de esfuerzo tridimensional, el círculo de Mohr para la primera componente tensorial de la ecuación 12-6 degenera en un punto localizado en $\overline{\sigma}$ sobre el eje σ. Por tanto, los esfuerzos asociados con este tensor son los mismos en toda posible dirección. Por esta razón, este tensor se llama *tensor esfuerzo esférico*. Alternativamente, de la ecuación 5-23, que establece que la dilatación de un cuerpo elástico es proporcional a $\overline{\sigma}$, este tensor se llama también *tensor esfuerzo dilatacional.*

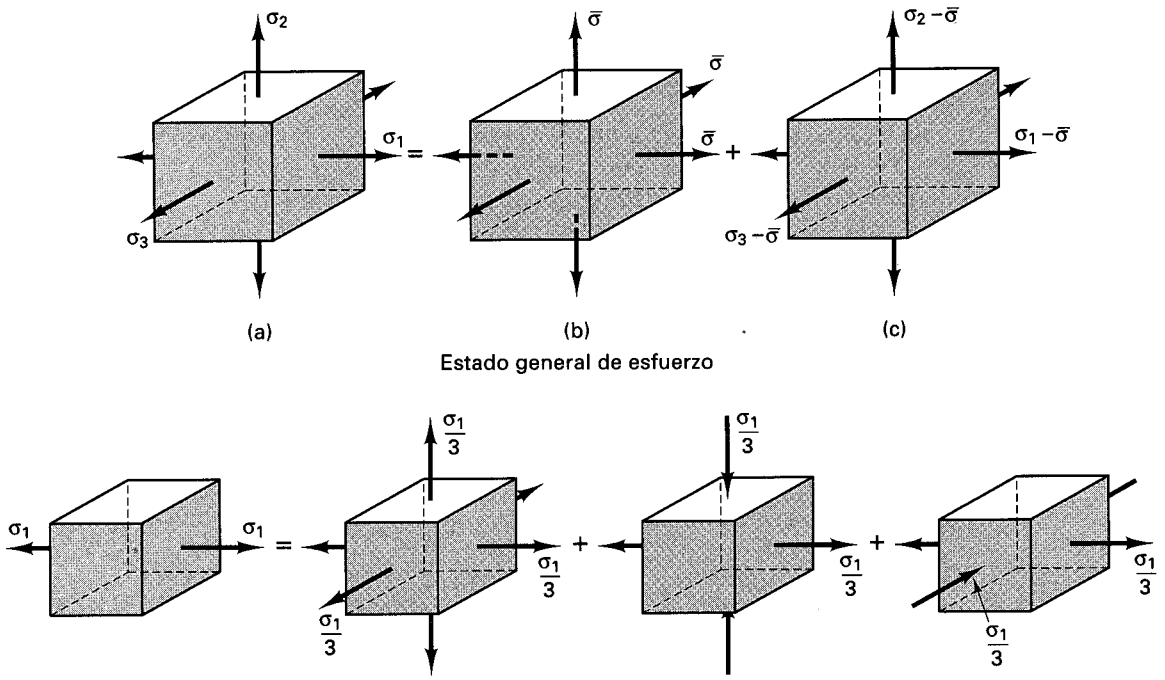


Fig. 12-5 Resolución de los esfuerzos principales en esfuerzos esféricos (dilatacionales) y desviatorios (distorsionales).

El último tensor de la ecuación 12-6 se llama *tensor de esfuerzo distorsionante* o *desviatorio*. Una buena razón para esta denominación puede verse en la figura 12-5(f) y (g). El estado de esfuerzo que consiste en tensión y compresión sobre planos mutuamente perpendiculares es equivalente a un esfuerzo cortante puro. Se sabe que este último sistema de esfuerzos no causa ningún cambio volumétrico en materiales isótropos sino que distorsiona o desvía al elemento de su forma cúbica inicial.

Habiendo ya establecido la base para resolver o descomponer el estado de esfuerzo en componentes extensionales y distorsionales, puede encontrarse la energía de deformación debido a la distorsión. Para este fin, debe encontrarse primero la energía de deformación por volumen unitario (es decir, la densidad de la deformación unitaria) para un estado de esfuerzo tridimensional. Como esta cantidad no depende de las coordenadas que se escojan, es conveniente expresarla en términos de esfuerzos y deformaciones unitarias principales. Entonces, generalizando la ecuación 3-13 a tres dimensiones, usando la superposición, se tiene

$$U_O = U_{\text{total}} = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3 \qquad (12\text{-}7)$$

donde, al sustituir las deformaciones unitarias, ecuación 5-14, expresadas en términos de esfuerzos principales, se obtiene, después de algunas simplificaciones

$$U_{\text{total}} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \qquad (12\text{-}8)$$

La energía de deformación unitaria por volumen unitario debido a los esfuerzos extensionales puede determinarse con esta ecuación haciendo primero $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p$, y luego reemplazando p por $\overline{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ Así entonces,

$$U_{\text{extensión}} = \frac{3(1-2\nu)}{2E}p^2 = \frac{1-2\nu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \qquad (12\text{-}9)$$

Restando la ecuación 12-9 de la ecuación 12-8, simplificando y notando de la ecuación 5-21 que $G = E/2(1+\nu)$, se encuentra la energía de deformación por distorsión para esfuerzos combinados:

$$U_{\text{distorsión}} = \frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \qquad (12\text{-}10)$$

De acuerdo con la hipótesis básica de la teoría de la energía de distorsión, la expresión de la ecuación 12-10 debe igualarse a la energía de distorsión elástica máxima en tensión simple. La última condición ocurre cuando uno de los esfuerzos principales alcanza el punto de fluencia σ_{yp} del material. La energía de deformación unitaria por distorsión para esta condición es $2\sigma_{yp}^2/12G$. Igualando este valor con la ecuación 12-10, se obtiene la ley básica para la fluencia de un material idealmente plástico:

$$\boxed{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{yp}^2} \qquad (12\text{-}11)$$

Para esfuerzo plano, $\sigma_3 = 0$ y la ecuación 12-11 en forma adimensional se convierte en

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{yp}}\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{yp}}\right)^2 = 1 \qquad (12\text{-}12)$$

Ésta es la ecuación de una elipse cuya gráfica se muestra en la figura 12-6. Cualquier esfuerzo que cae dentro de la elipse indica que el material se comporta elásticamente. Los puntos sobre la elipse indican que el material está fluyendo. Esta es la misma interpretación que la dada antes para la figura 12-4. En la descarga, el material se comporta elásticamente.

Esta teoría no predice cambios en la respuesta del material cuando se agregan esfuerzos hidrostáticos de tensión o compresión. Como sólo diferencias de los esfuerzos están implicadas en la ecuación 12-11, el agregar un esfuerzo cortante a cada uno no altera la condición de fluencia. Por esta razón, en el espacio tridimensional de esfuerzos, la superficie de fluencia toma la forma de un cilindro con un eje que tiene sus tres cosenos directores iguales a $1/\sqrt{3}$. Tal cilindro se muestra en la figura 12-7(a). La elipse en la figura 12-6 es simplemente la intersección de este cilindro con el plano $\sigma_1 - \sigma_2$. Puede demostrarse también que la superficie de fluencia para el criterio del esfuerzo cortante máximo es un hexágono que cabe en el tubo, lo que se muestra en la figura 12-7.

La relación fundamental dada por la ecuación 12-11 puede también obtenerse formulando el segundo invariante, ecuación 11-26, de los esfuerzos distorsionantes dados por la última matriz en la ecuación 12-6. Tal enfoque es el generalmente preferido en la teoría matemática de la plasticidad. La deducción efectuada antes pone mayor énfasis en el comportamiento físico. Como puede verse en la estructura de la ecuación 12-11 y las figuras acompañantes 12-6 y 12-7, se trata de una función continua, lo que la hace

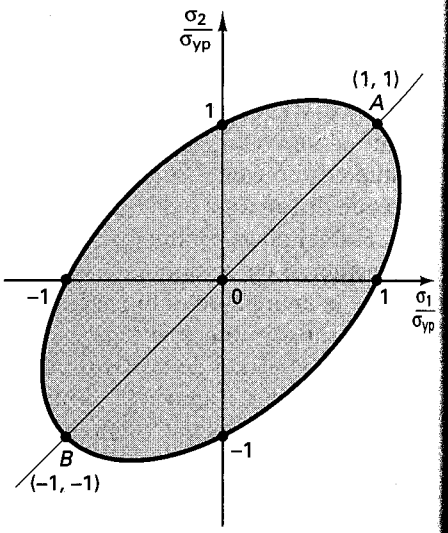


Fig. 12-6 Criterio de fluencia basado en la energía de distorsión máxima.

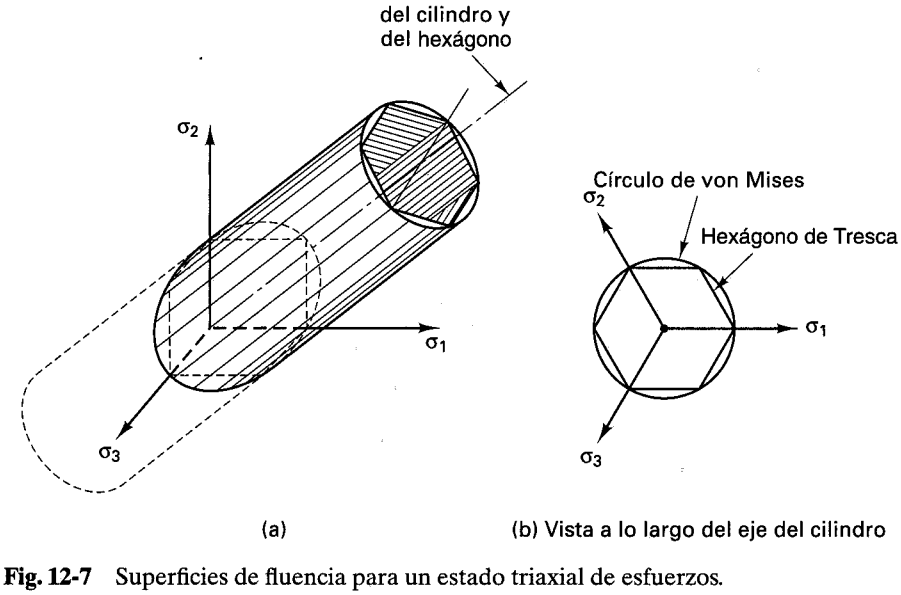


Fig. 12-7 Superficies de fluencia para un estado triaxial de esfuerzos.

atractiva en aplicaciones analíticas y numéricas. Esta ampliamente usada ecuación constitutiva para material perfectamente plástico suele llamarse *condición de fluencia de Huber-Hencky-Mises* o simplemente la *condición de fluencia de von Mises*.[5]

Tanto la condición de fluencia por esfuerzo cortante máximo como la condición de fluencia por energía de distorsión han sido usadas en el estudio de los fenómenos viscoelásticos bajo esfuerzos combinados. La extensión de esas ideas a materiales con endurecimiento por deformación es también posible. Sin embargo, tales temas están más allá del alcance de este texto.

12-4. Comparación de las teorías del cortante máximo y de la energía de distorsión para esfuerzo plano

Los problemas de esfuerzo plano ocurren con frecuencia en la práctica y son muy enfatizados en este texto. Por tanto, es útil hacer una comparación entre los dos criterios de fluencia más ampliamente usados en materiales dúctiles para este caso. El criterio del esfuerzo cortante máximo dirige su atención al esfuerzo cortante máximo en un elemento. El criterio de la energía de distorsión hace esto de una manera más amplia considerando en tres dimensiones la energía causada por deformaciones cortantes. Como los esfuerzos cortantes son los parámetros principales en ambos enfoques, la diferencia entre los dos no es grande. Una comparación entre ellos para esfuerzo plano se muestra en la figura 12-8. Aquí, el hexágono de Tresca para la teoría del esfuerzo cortante máximo y la elipse de von Mises para la teoría de la energía de distorsión máxima tienen los significados ya descritos. Cualquiera de las líneas da un criterio para la fluencia de un material perfectamente plástico. Se dice que la fluencia de un material comienza siempre que esfuerzos uniaxiales o biaxiales alcanzan las líneas límite. Si un punto de esfuerzo para los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 cae dentro de esas curvas, un material se comporta elásticamente. Como ningún comportamiento por endurecimiento por deformación (véase la figura 2-18) es incluido en estos modelos matemáticos, ningún punto de esfuerzo puede encontrarse dentro de las curvas ya que la fluencia continúa según el nivel de esfuerzo dado por las curvas. Teorías más avanzadas no son consideradas en este texto.[6]

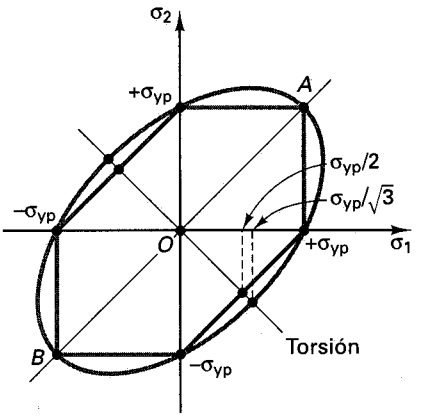


Fig. 12-8 Comparación de los criterios de fluencia de Tresca y von Mises.

Puede verse en la figura 12-8 que la discrepancia entre las dos teorías no es muy grande; la teoría del esfuerzo cortante máximo es en general más conservadora. Como es de esperarse, los esfuerzos uniaxiales dados por ambas teorías son iguales a los correspondientes a tensión o compresión sim-

[5]En el pasado, esta condición también se llamaba *teoría del esfuerzo cortante octaédrico.* Véase A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids* (*Teoría de flujo y fractura de sólidos*), Nueva York, McGraw-Hill, 1950, p. 104; o A. P. Boresi y O. M. Sidebottom, *Advanced Mechanics of Materials* (*Mecánica avanzada de materiales*), 4a. ed., Nueva York, Wiley, 1985), p. 18.

[6]K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (*Métodos variacionales en elasticidad y plasticidad*), 2a. ed., Nueva York, Pergamon, 1975; L. E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* (*Introducción a la mecánica de un medio continuo*), Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1969.

ple. Se supone que esos esfuerzos básicos son de *igual* magnitud. Los criterios de fluencia en los cuadrantes segundo y cuarto indican menores resistencias a la fluencia que para esfuerzos uniaxiales. La mayor discrepancia ocurre cuando dos de los esfuerzos principales son iguales pero de signo opuesto. Esta condición se desarrolla, por ejemplo, en la torsión de tubos de pared delgada. De acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo, cuando $\pm\sigma_1 = \mp \sigma_2$, esos esfuerzos en la fluencia pueden alcanzar sólo el valor $\sigma_{yp}/2$. La teoría de la energía de distorsión máxima limita este esfuerzo a $\sigma_{yp}/\sqrt{3} = 0.577\sigma_{yp}$. Los puntos correspondientes a esos esfuerzos están identificados en la figura 12-8. Esos valores de la fluencia en esfuerzos cortantes son usados con frecuencia en las aplicaciones de diseño.

12-5. Teoría del esfuerzo normal máximo

La teoría del esfuerzo normal máximo o simplemente la teoría del esfuerzo máximo,[7] afirma que la falla o fractura de un material ocurre cuando el esfuerzo normal máximo en un punto alcanza un valor crítico independientemente de los otros esfuerzos. Sólo el esfuerzo principal más grande debe determinarse para aplicar este criterio. El valor crítico del esfuerzo $\sigma_{últ}$ es usualmente determinado en un experimento de tensión, donde la falla de una probeta se define como un alargamiento excesivamente grande o bien una fractura. Usualmente, esto último es lo implicado.

La evidencia experimental indica que esta teoría se aplica bien a materiales *frágiles* en todos los rangos de esfuerzos, siempre que un esfuerzo principal de tensión exista. La falla está caracterizada por una escisión o fractura. Este mecanismo de falla difiere drásticamente de la fractura dúctil, que va acompañada por grandes deformaciones debido a un deslizamiento a lo largo de los planos de esfuerzo cortante máximo.

Igual que las otras teorías, la teoría del esfuerzo máximo puede interpretarse en gráficas. Esto se hace en la figura 12-9. La falla ocurre si los puntos caen sobre la superficie. A diferencia de las teorías previas, este criterio de esfuerzo da una superficie acotada del espacio de esfuerzos.

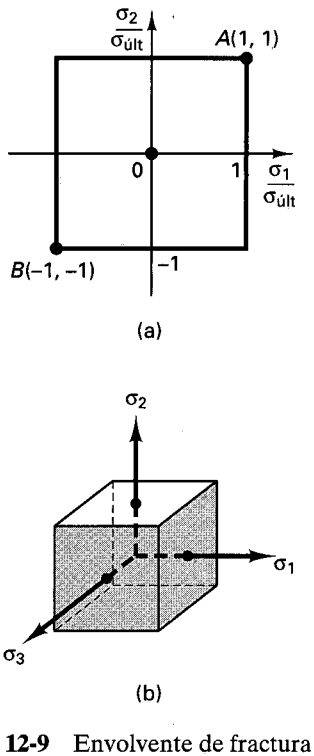


Fig. 12-9 Envolvente de fractura basada en el criterio de esfuerzo máximo.

12-6. Comparación de los criterios de fluencia y de fractura

La comparación de algunos resultados experimentales clásicos con los criterios de fluencia y fractura presentados antes, se muestran en la figura 12-10.[8] Note la particularmente buena concordancia entre la teoría de la

[7]Esta teoría se le acredita generalmente a W. J. M. Rankine, un eminente pedagogo británico (1820-1872). Una teoría análoga basada en la deformación unitaria máxima en vez del esfuerzo máximo como criterio básico de falla, fue propuesta por el gran experto en teoría de la elasticidad B. de Saint-Venant (1797-1886). La evidencia experimental no corrobora este último criterio.

[8]Los puntos experimentales mostrados en esta figura se basan en experimentos clásicos realizados por varios investigadores. La figura está adaptada de una compilación hecha por G. Murphy, *Advanced Mechanics of Materials* (*Mecánica avanzada de materiales*), Nueva York, McGraw-Hill, 1964, p. 83.

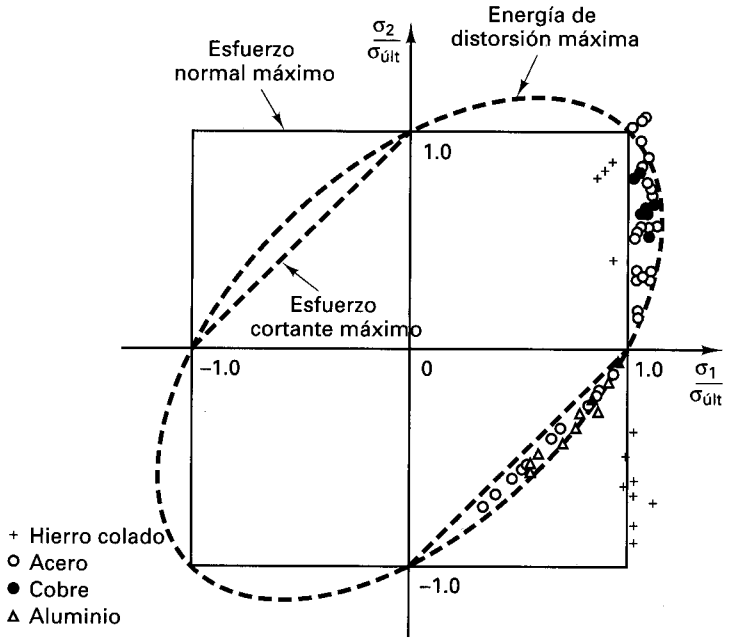


Fig. 12-10 Comparación de los criterios de fluencia y fractura con los datos de pruebas.

energía de distorsión máxima y los resultados experimentales para materiales dúctiles. Sin embargo, la teoría del esfuerzo normal máximo parece ser mejor para materiales frágiles y puede no ser segura para materiales dúctiles.

Todas las teorías para esfuerzo uniaxial concuerdan ya que la prueba de tensión simple es el estándar de comparación. Por tanto, si uno de los esfuerzos principales en un punto es grande en comparación con el otro, todas las teorías dan prácticamente los mismos resultados. La discrepancia entre los criterios es máxima en los cuadrantes segundo y cuarto, cuando ambos esfuerzos principales son numéricamente iguales.

En el desarrollo de las teorías analizadas antes, se ha supuesto que las propiedades del material en tensión y compresión son iguales; las gráficas mostradas en varias de las figuras precedentes tienen dos ejes de simetría. Por otra parte, se sabe que algunos materiales, como las rocas, el hierro fundido, el concreto y los suelos, tienen propiedades drásticamente diferentes dependiendo del sentido de los esfuerzos aplicados. Este es el mayor defecto al aplicar las idealizaciones clásicas a materiales con grandes diferencias en su comportamiento mecánico en tensión y compresión. Un intento temprano para adoptar la teoría del esfuerzo cortante máximo para lograr una mejor concordancia con los experimentos fue hecho por Duguet en 1885.[9] Este modelo mejorado reconoce las mayores resistencias de los materiales frágiles en compresión biaxial que en tensión. Por tanto, la región en tensión biaxial en el espacio de los esfuerzos principales se hace

[9]A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids* (*Teoría de flujo y fractura de sólidos*), Nueva York, McGraw-Hill, 1950.

menor que para compresión biaxial; véase la figura 12-11. En los cuadrantes segundo y cuarto, se supone un cambio lineal entre las dos regiones antes mencionadas. En un sentido, A. A. Griffith,[10] refinó la explicación para las observaciones previas introduciendo la idea de energía de superficie en grietas microscópicas y mostrando la mayor seriedad de los esfuerzos de tensión comparados con los de compresión con respecto a la falla. De acuerdo con esta teoría, una grieta existente se propagará rápidamente si la energía de deformación elástica liberada es mayor que el incremento en la energía de superficie de la grieta. El concepto original de Griffith ha sido considerablemente ampliado por G. R. Irwin.[11]

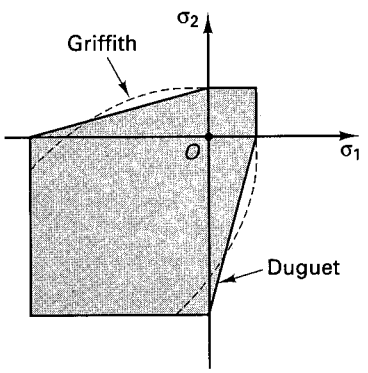


Fig. 12-11 Criterios factibles de fractura para materiales frágiles.

Otro intento importante de racionalizar la fractura de materiales con propiedades diferentes en tensión y en compresión es debido a Mohr.[12] En este enfoque deben llevarse a cabo varios experimentos diferentes sobre el mismo material. Por ejemplo, si los resultados de experimentos en tensión, compresión y cortante están disponibles, pueden representarse sobre la misma gráfica usando sus respectivos círculos de esfuerzos principales máximos, como se muestra en la figura 12-12(a). Los puntos de contacto de las *envolventes* con los círculos de esfuerzos definen el estado de esfuerzo en una fractura. Por ejemplo, si un punto es A (o A'), los esfuerzos y el plano o planos sobre los que éstos actúan, pueden encontrarse usando el procedimiento del círculo de Mohr de esfuerzos (Sección 11-7). Los planos correspondientes para los puntos A o A' se muestran en la figura 12-12(b), y un material como el duraluminio se fractura en tensión según un ángulo plano, como se muestra. Similarmente, relacionando los planos de fractura al punto B o B', la fractura ocurre según un ángulo empinado característico de los cilindros de concreto probados en compresión, como en la figura 12-12(c). Tales concordancias con los experimentos respaldan el enfoque supuesto.

Los datos de la figura 12-12(a) pueden regraficarse en el espacio de los esfuerzos principales, como en la figura 12-12(d). Como en el primer cuadrante el esfuerzo principal *mínimo* $\sigma_3 = 0$, y en el tercer cuadrante $\sigma_3 = 0$ es el esfuerzo principal *máximo*, según las figuras 12-12(a)-(c), en esos cuadrantes las líneas de fractura en el espacio de esfuerzo principal, son similares a las de la figura 12-11. Además, si las resistencias del material en tensión y compresión son las mismas, se obtiene un hexágono idéntico al mostrado en la figura 12-10. Sin embargo, mientras que el hexágono en la figura 12-10 da una condición de *fluencia* para materiales *dúctiles*, en el contexto presente define un criterio de *fractura* para materiales *frágiles*.

La extrapolación de las envolventes de Mohr más allá del rango de los datos de prueba no es aconsejable. En muchas aplicaciones, esto puede sig-

[10]A. A. Griffith, "The phenomena of rupture and flow of solids" ("Los fenómenos de ruptura y flujo de sólidos"), *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Serie A, **221,** 1920, pp. 163-198.

[11]G. R. Irwin, "Fracture mechanics" ("Mecánica de fracturas"), *Proceedings, First Symposium on Naval Structural Mechanics,* Long Island City, NY, Pergamon, 1958, p. 557; véase también *A Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications* (*Un simposio sobre pruebas de tenacidad a la fractura y sus aplicaciones*), American Society for Testing and Materials, Special Technical Publication, No. 381, Philadelphia, PA, American Society for Testing and Materials, Washington, DC, National Aeronautics and Space Administration, 1965.

[12]Como se mencionó antes, Otto Mohr fue también principalmente responsable del desarrollo del círculo de esfuerzos que lleva su nombre.

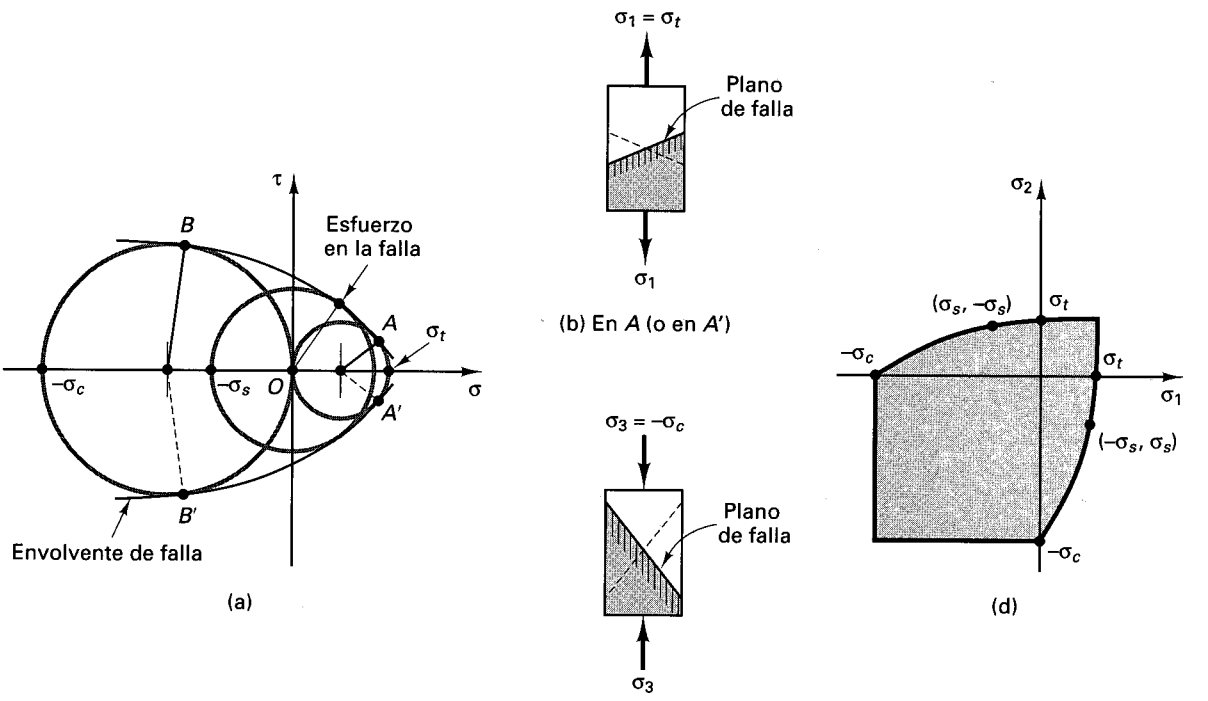


Fig. 12-12 (a) Envolventes de Mohr, (b) planos de falla en A y A', (c) planos de falla en B y B', (d) solución por envolvente de Mohr en el espacio de esfuerzos principales.

nificar que partes de los círculos de esfuerzos para tensión y compresión deben tomarse como extremos de la envolvente. La interpolación a lo largo de las envolventes de falla entre esos dos extremos parciales de círculos de esfuerzos es justificada, y un círculo de esfuerzos para otras condiciones puede situarse entre ellos. Cuando faltan datos más extensos, pueden usarse conservadoramente envolventes de línea recta.

El uso de líneas rectas para asíntotas tiene una base racional y ha sido particularmente conveniente en la mecánica de suelos. Para un medio granular suelto como la arena, las envolventes de línea recta de Mohr corresponden a la condición límite de la fricción seca, $\mu = \tan \phi$; véase la figura 12-13. Cualquier círculo tangente a la envolvente, como en B, da el estado de esfuerzo crítico. Si alguna cohesión puede ser desarrollada por el medio, el origen O se mueve a la derecha de manera que bajo esfuerzo nulo, el intercepto τ es igual a la cohesión. Como los suelos no pueden básicamente transmitir esfuerzos de tensión, en la literatura especializada es costumbre dirigir el eje de compresión hacia la derecha.

A diferencia de la teoría de la energía de la distorsión máxima, la teoría de la fractura basada en las envolventes de Mohr, usando los círculos de esfuerzos principales máximos, desprecia la dependencia de los esfuerzos principales intermedios.

Algunas veces los criterios de fluencia y fractura analizados antes son inconvenientes en su aplicación. En tales casos, las curvas de interacción como la curva de la figura 9-16 pueden usarse convenientemente. Las curvas de este tipo determinadas experimentalmente, a menos que se compliquen

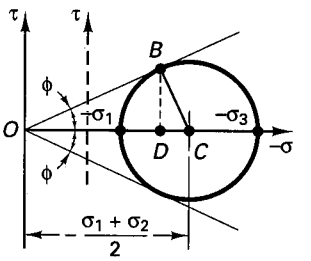


Fig. 12-13 Envolventes de Mohr para un medio granular sin cohesión.

por un fenómeno local o de pandeo, son equivalentes a los criterios de resistencia vistos aquí.

En el diseño de miembros en el próximo capítulo, nos separaremos de una estricta adherencia a los criterios de fluencia y fractura establecidos aquí, aunque, sin duda, esas teorías proporcionan las bases racionales del diseño.

12-7. Superficie de falla para materiales frágiles

El enfoque analítico aplicable a materiales frágiles ha alcanzado una madurez tal que puede ser incluido en un texto sobre mecánica de sólidos. El tratamiento disponible en el espacio de los esfuerzos tridimensionales se parece a la superficie de fluencia del criterio de von Mises (figura 12-7), con una importante diferencia. El espacio de esfuerzos encerrado está cubierto en la dirección de los esfuerzos de torsión y la superficie encerrada se expande gradualmente. En el límite se vuelve un cono, en vez de un tubo como en el criterio de von Mises.

La superficie en el espacio de esfuerzos, como la mostrada en la figura 12-7, que define los valores de la resistencia última para cualquier relación de esfuerzos principales, se llama usualmente *superficie de falla* o *modelo de resistencia* del material. La superficie de falla del concreto, que sirve como ilustración de un material frágil, es descrita aquí por una modificación de la superficie de cinco parámetros de William y Warnke.[13] La superficie de falla modificada[14] mostrada en la figura 12-14(a) está descrita por

$$\tau_0(\sigma_0, \theta) = \tau_c \frac{a\eta + b\sqrt{a(\eta^2 - 1) + b^2}}{a\eta^2 + b^2} \qquad (12\text{-}13)$$

donde

$$a = \tau_c^2 - \tau_t^2; \quad b = 2\tau_t - \tau_c; \quad \eta = 2\cos\theta \qquad (12\text{-}14)$$

y σ_0 es el esfuerzo hidrostático, definido en la ecuación 11-31, y θ es el ángulo de Lode, dado por la ecuación 11-29.

La ecuación 12-13 define la forma de la superficie de falla en el plano desviatorio σ_0 = const y describe una curva suave convexa (elíptica), dibujada en la figura 12-14(b). Los parámetros τ_c y τ_t en la ecuación 12-14 son funciones del esfuerzo hidrostático, definidos como raíces de las ecuaciones cuadráticas

$$\tau_c^2 + A\left(\frac{\tau_c}{\sqrt{2}} + \sigma_0\right) + B = 0 \qquad (12\text{-}15)$$

$$\tau_t^2 + A\left(\frac{\tau_t}{\sqrt{2}}\beta + \sigma_0\right) + B = 0 \qquad (12\text{-}16)$$

[13]Véase K. J. William y E. P. Warnke, "Constitutive model for the triaxial behavior of concrete" ("Modelo constitutivo para el comportamiento triaxial del concreto"), *Int. Association for Bridge and Struct. Engrg. Proc.*, **19**, 1975, pp. 1-30.

[14]Véase T. A. Balan, F. C. Filippou y E. P. Popov, "Constitutive model for 3D cyclic analysis of concrete structures" ("Modelo constitutivo para análisis cíclico tridimensional de estructuras de concreto"), *J. Engrg. Mechanics, ASCE*, **123**, No. 2, febrero, 1997, pp. 143-153.

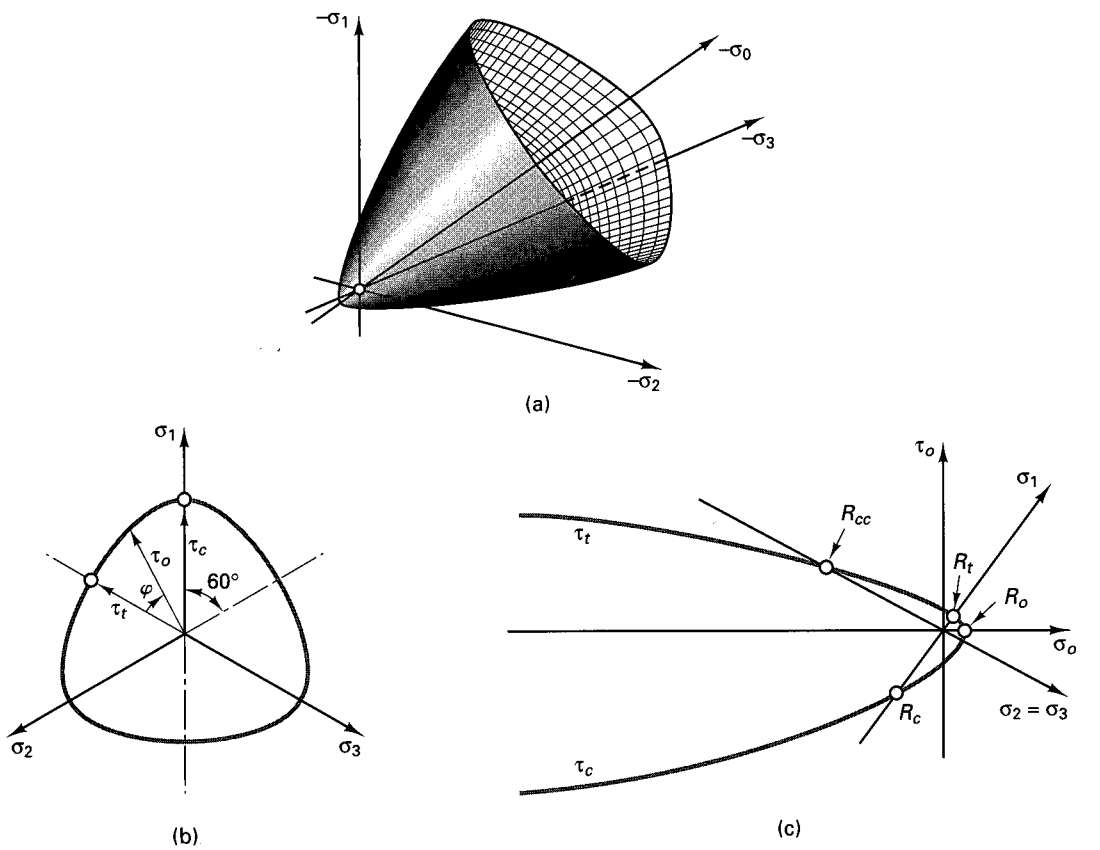


Fig. 12-14 Superficies de falla en concreto: (a) vista general; (b) vista desviatoria; (c) vista meridiana.

donde

$$A = \frac{R_c}{9\alpha}(1 - \alpha^2)(2 + \alpha); \quad B = -\frac{2}{9}R_c^2 \qquad (12\text{-}17)$$

$$\alpha = \frac{R_t}{R_c}; \quad \beta = \frac{4 - \alpha}{2 + \alpha} \qquad (12\text{-}18)$$

y R_c y R_t son las resistencias uniaxiales a compresión y tensión, respectivamente.

Debe notarse que las ecuaciones 12-15 y 12-16 representan los meridianos de compresión ($\theta = 60°$) y de tensión ($\theta = 0°$) de la superficie de falla del material. Sobre el plano $\sigma_2 = \sigma_3$ (llamado a veces el plano Rendulic), como puede verse en la figura 12-14(c), las secciones meridianas son las curvas parabólicas que pasan por un conjunto de puntos característicos que definen los siguientes parámetros de resistencia del material:

R_c, R_t = resistencias uniaxiales de compresión y tensión, respectivamente

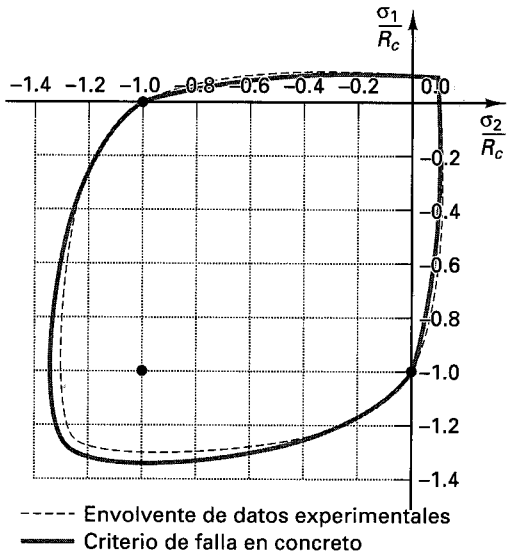


Fig. 12-15 Comparación de resultados experimentales con predicciones analíticas.

R_{cc} = resistencia a compresión biaxial definida por

$$R_{cc} = \frac{R_c}{4}\left[(1-\alpha^2) + \sqrt{(1-\alpha^2)^2 + 16}\right]$$

Las curvas meridianas intersectan el eje hidrostático en el punto de extensión equitriaxial (resistencia a la tensión triaxial), que puede expresarse en términos de resistencias uniaxiales de compresión y de tensión como

$$R_0 = -\frac{B}{A} = \frac{2R_t}{(1-\alpha^2)(2+\alpha)}$$

En la figura 12-15, la resistencia del material predicha por la superficie de falla es comparada con los datos experimentales[15] del esfuerzo plano. El concreto en particular fue calibrado por los siguientes parámetros de resistencia: R_c = 32.1 MPa (4.66 ksi) y R_t = 3.1 MPa (0.45 ksi). La traza de la falla resultante del modelo de resistencia en el plano $\sigma_3 = 0$ concuerda muy bien con los datos experimentales considerados.

La investigación reciente en probetas de concreto de diferentes resistencias corrobora fuertemente este enfoque. Este trabajo ha sido ahora ampliado para incluir los efectos del endurecimiento por deformación y ha sido implementado para usarse en computadoras.[16]

[15]Adoptado de H. Kupfer, H. K. Hilsdorf y H. Rusch, "Behavior of concrete under biaxial stresses" ("Comportamiento del concreto bajo esfuerzos biaxiales"), *ACI J.*, **66**, No. 8, 1969, pp. 656-666.

[16]C. Bedard y M. D. Kostovos, "Application of NLFEA to concrete structures" ("Aplicación del NLFEA a estructuras de concreto"), *J. Struct. Div.*: ASCE, **111**, ST12, 1985; Z. P. Bažant, editor, *Mechanics of Geomaterials: Rocks, Concrete, Soils* (*Mecánica de los geomateriales: rocas, concreto, suelos*), Chichester, Wiley, 1985.

PROBLEMAS

Secciones 12-2 a la 12-5

12-1. Reescriba el tensor esfuerzo dado en el problema 11-46 en sus componentes tensoriales esféricas y desviatorias.

12-2 y 12-3. Para las matrices de esfuerzo de 3 × 3 dadas, reescriba éstas en sus tensores esférico y desviatorio.

$$\begin{pmatrix} 40 & -30 & 20 \\ -30 & 50 & 10 \\ 20 & 10 & 60 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 50 & -30 & 0 \\ -30 & 70 & -20 \\ 0 & -20 & 60 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

12-4 y 12-5. Tres casos de esfuerzo plano en la fluencia o fractura se muestran en las figuras. Examine cada caso y determine qué tipo de falla es más probable que ocurra. Limite las opciones de criterios a las teorías del esfuerzo normal máximo, de la energía de distorsión y del esfuerzo cortante máximo. Explique su razonamiento.

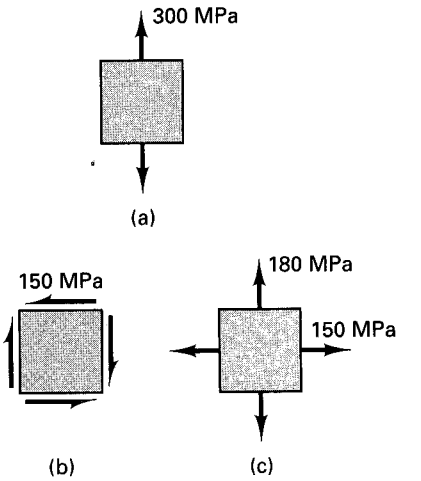


Fig. P12-4

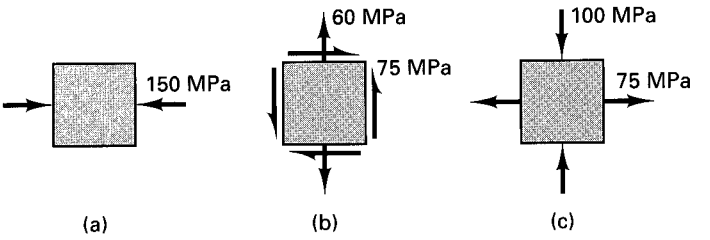


Fig. P12-5

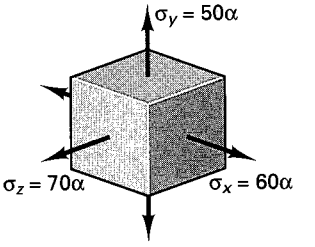


Fig. P12-6

12-6. Suponga que un estado de esfuerzos principales triaxiales se desarrolla en un punto como se muestra en la figura. Esos esfuerzos son directamente proporcionales a un parámetro α. Si el esfuerzo de fluencia $\sigma_{yp} = 250$ MPa, ¿qué es α, con base en el criterio de fluencia de von Mises?

Sección 12-6

12-7. En experimentos clásicos sobre plasticidad, se obtiene a menudo un campo bidimensional de esfuerzo al someter un tubo de pared delgada simultáneamente a una fuerza axial y a un par de torsión. Los resultados de tales experimentos se registran sobre gráficas σ_x–τ_{xy}. Si sólo se estudian los esfuerzos σ_x y τ_{xy}, ¿cómo se verían en una gráfica las curvas teóricas basadas en los criterios de fluencia de Tresca y de von Mises? Deduzca las dos ecuaciones requeridas y esboce los resultados sobre un diagrama.

12-8. Ordinariamente, los esfuerzos de fluencia de Tresca y von Mises se hacen coincidir en tensión simple. Esto da lugar a una discrepancia en cortante puro. Si, en vez de esto, se supone que la condición de fluencia es la misma en cortante, ¿qué discrepancia resultará en tensión simple y para $\sigma_1 = \sigma_2$?

12-9. Un elemento crítico desarrolla los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 en la razón 5:2:−1 (es decir, los esfuerzos son $5p$, $2p$ y $-p$, donde p es un parámetro). Tales cargas se llaman radiales. Si este elemento está sometido a esta condición de carga, determine las magnitudes máximas que los esfuerzos pueden alcanzar antes de fluir (a) de acuerdo con el criterio de fluencia de Tresca, y (b) de acuerdo con el criterio de von Mises. Suponga que el material fluye en tensión a 60 ksi.

12-10. Una barra metálica es comprimida a lo largo del eje x_1 entre dos paredes rígidas tal que $\varepsilon_3 = 0$ y $\sigma_2 = 0$. Este proceso genera un esfuerzo axial σ_1 y ningún esfuerzo cortante. Determine el valor aparente de fluencia de σ_1 si el material en una prueba convencional de compresión exhibe una resistencia a la fluencia σ_{yp} y una razón de Poisson ν. Suponga que el material está regido por la condición de fluencia de von Mises. Encuentre una expresión alternativa si se postula la condición de Tresca.

13

Análisis del esfuerzo elástico

13-1. Introducción

Las fórmulas para determinar el estado de esfuerzo en miembros elásticos, consideradas tradicionalmente en cursos introductorios de mecánica de sólidos, han sido deducidas en los capítulos previos. Usualmente, dan un esfuerzo normal o uno cortante causados por una sola componente de fuerza actuando en una sección de un miembro. Para materiales linealmente elásticos, las fórmulas principales son:

1. Esfuerzos normales
   (a) debido a una fuerza axial

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{1-6}$$

   (b) debido a flexión
   - miembros rectos

$$\sigma = -\frac{My}{I} \tag{8-11}$$

- barras curvas simétricas

$$\sigma = \frac{My}{Ae(R - y)} \tag{8-38}$$

2. Esfuerzos cortantes

(a) debido a un par de torsión

- flecha circular

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p} \tag{6-4}$$

- flecha rectangular

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\alpha bt^2} \tag{6-30}$$

- tubo cerrado de pared delgada

$$\tau = \frac{T}{2\textcircled{A}t} \tag{6-34, 6-35}$$

(b) debido a una fuerza cortante en una viga

$$\tau = \frac{VQ}{It} \tag{10-6}$$

La superposición de esfuerzos normales causados por fuerzas axiales y flexión simultáneamente, usando esas fórmulas, fue analizada en el capítulo 9. La superposición de esfuerzos cortantes causados por pares de torsión y fuerza cortante directa actuando simultáneamente fue considerada en el capítulo 10. En este capítulo, las consecuencias de la ocurrencia simultánea de esfuerzos normales *y* cortantes, son examinadas con ayuda de los procedimientos de transformación de esfuerzos desarrollados en el capítulo 11. Esta condición ocurre comúnmente en vigas y en flechas de transmisión.

Al aplicar las fórmulas precedentes, particularmente en el análisis o en el diseño de equipo mecánico, deben introducirse los factores de concentración de esfuerzos. (Véanse las secciones 3-3, 6-7 y 8-6.) Debido a que el problema de fatiga ocurre comúnmente en tales casos, deben emplearse esfuerzos reducidos. Debe darse también una consideración especial a la carga dinámica. (Véanse las secciones 3-7, 6-11 y 8-7.) Para tal carga, si ésta ocurre en milisegundos, los esfuerzos permisibles pueden aumentar considerablemente.

Este capítulo se dedica por entero a problemas *elásticos*, que es un enfoque usado con mucha frecuencia bajo las cargas usuales de trabajo. En la Parte A el estado de esfuerzo para algunos casos básicos es analizado desde el punto de vista de la transformación de esfuerzos.

El diseño elástico de miembros es considerado en la Parte B. Aunque las fórmulas de análisis de esfuerzos dadas antes son aplicables a problemas estáticamente determinados e indeterminados, el análisis se limitará a los casos estáticamente determinados. Hay por lo menos dos razones para hacerlo así. Primero, los problemas estáticamente indeterminados que más frecuentemente se presentan, implican vigas; éstas son tratadas a partir del siguiente capítulo. Segundo, el *diseño* de sistemas estáticamente indeterminados, en contraste con su *análisis* de esfuerzos, es necesariamente complejo. Por ejemplo, considere una barra elástica de sección transversal variable

empotrada en ambos extremos y sometida a una fuerza axial P, como se muestra en la figura 13-1. Si se dan las áreas transversales de las partes superior e inferior de la barra, las reacciones R_1 y R_2 pueden encontrarse usando los procedimientos vistos en el capítulo 3. Después de que es conocida cada reacción, el problema se vuelve estáticamente indeterminado y los esfuerzos en la barra pueden encontrarse de la manera usual. Sin embargo, si este sistema estáticamente indeterminado tuviese que ser *diseñado*, aun este simple problema resultaría complicado. Generalmente, en un problema de diseño, sólo la fuerza aplicada P y las condiciones de frontera son conocidas. Pero si se cambian las dos áreas transversales de la barra es posible tener entonces un número infinito de soluciones. Restricciones adicionales en el diseño estructural o de máquinas entran generalmente en el problema. Por tanto, tales problemas no son considerados aquí.

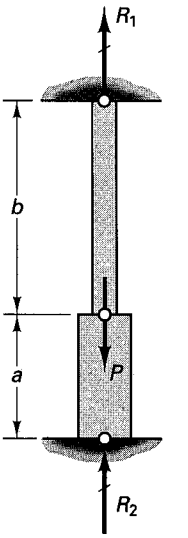


Fig. 13-1 Un problema estáticamente indeterminado.

Debe recalcarse que sólo el problema de *esfuerzos elásticos* es considerado en este capítulo. Algunos diseños elásticos pueden ser gobernados por la rigidez o por la posible inestabilidad de un sistema. El primer requisito surge comúnmente en el control de la deflexión y en problemas de vibraciones; el segundo, en la inestabilidad lateral de los miembros.

El fin principal de este capítulo es dar una mejor idea del significado del análisis de esfuerzos por medio de la resolución de problemas adicionales. Hay un número extraordinario de casos donde la aplicación de las fórmulas básicas de la mecánica de sólidos, enlistadas anteriormente, conducen a resultados útiles. En este capítulo no se desarrollan nuevos principios analíticos. Sin embargo, se presentan algunos procedimientos simples de diseño para vigas prismáticas.

Es esencial reconocer que en todos los problemas de análisis elásticos de esfuerzos y de diseño, el *material se supone inicialmente libre de esfuerzos*. En muchos materiales de ingeniería pueden estar presentes importantes esfuerzos residuales. Éstos pueden ser causados por los procesos de manufactura empleados: laminado, soldado, forjado, contracción por temperatura o deshidratación, etc. (Véase la figura 1-10.) *En realidad, es la combinación de los esfuerzos residuales con aquellos debidos a las fuerzas aplicadas lo que causa la fluencia inicial y/o la fractura de un miembro.* En algunas aplicaciones de ingeniería, la estimación de los esfuerzos residuales presenta un formidable problema.

Parte A ANÁLISIS DEL ESFUERZO ELÁSTICO

13-2. Estado de esfuerzo para algunos casos básicos

El estado de esfuerzo para cuatro casos básicos en forma de ejemplos es tratado en esta sección. Por medio de los círculos principales de Mohr para esfuerzos, el estado de esfuerzo en un punto es exhibido gráficamente. De tales representaciones, los esfuerzos críticos pueden visualizarse fácilmente y relacionarse con los criterios de fluencia o fractura vistos en el capítulo

precedente. Los cuatro casos considerados se refieren al esfuerzo uniaxial, al esfuerzo biaxial como ocurre en recipientes cilíndricos a presión, a esfuerzos torsionales en tubos circulares y a los esfuerzos en vigas causados por flexión y cortante. Debido a la gran complejidad del último problema, algunos aspectos de la exactitud de la solución serán analizados en la siguiente sección.

Ejemplo 13-1

Considere un estado de esfuerzo en una barra axialmente cargada y construya los tres círculos principales de esfuerzo. Relacione los esfuerzos críticos con los criterios de fluencia y fractura.

SOLUCIÓN

El esfuerzo principal máximo σ_1 en una barra axialmente cargada puede encontrarse usando la ecuación 1-8. Los dos esfuerzos principales restantes son cada uno igual a cero (es decir, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$). El elemento infinitesimal básico para este caso, junto con sus tres vistas planas, se muestra en la figura 13-2(a). Los círculos principales de esfuerzos están dibujados en la figura 13-2(b). Como σ_1 y σ_2 son iguales, el círculo de Mohr para esos esfuerzos degenera en un punto. Sin embargo, por claridad, se muestra en el diagrama por medio de un pequeño círculo de diámetro cero.

Para este caso, el esfuerzo cortante máximo es igual a $\sigma_1/2$, mientras que el esfuerzo normal máximo es σ_1. Por tanto, la manera en que falla un material depende de sus resistencias relativas en esas dos propiedades. Como ya se señaló en la sección 2-3 e ilustró en la figura 2-10, un material frágil (hierro colado) falla por una fractura de rajadura. Esto se debe a que es

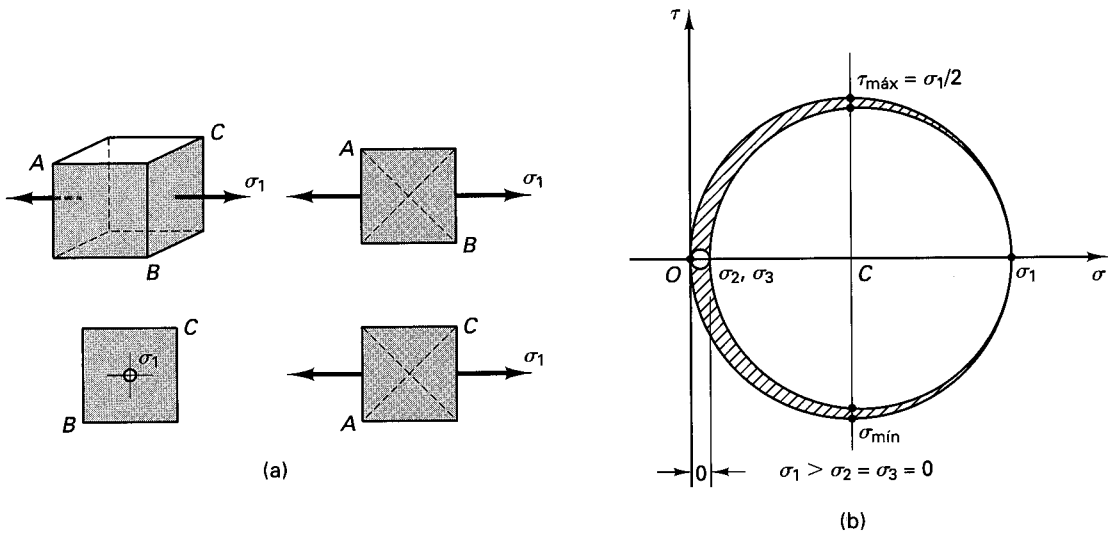


Fig. 13-2 Círculos de Mohr para un estado de esfuerzo uniaxial.

más débil en tensión que en cortante. Lo inverso es cierto para un material dúctil. Las fracturas de copa y cono mostradas en la figura 2-10 para acero y aluminio, ocurren aproximadamente a lo largo de planos que forman un ángulo de 45° con el eje de la probeta. Esos planos están identificados por líneas de rayas en los elementos a la derecha en la figura 13-2(a). Mayores refinamientos sobre el mecanismo de fractura son posibles considerando el comportamiento de cristales simples dentro de un material.

Ejemplo 13-2

Considere un estado de esfuerzo en un recipiente cilíndrico de pared delgada y construya los tres círculos principales de esfuerzo. Relacione los resultados con un criterio de fluencia.

SOLUCIÓN

De acuerdo con las ecuaciones 5-26 y 5-27, la razón del esfuerzo de aro σ_1 al esfuerzo longitudinal σ_2 es aproximadamente igual a 2. Estos son los esfuerzos principales, ya que ningún esfuerzo cortante actúa sobre los planos correspondientes. El tercer esfuerzo principal σ_3 es igual a la presión externa o interna p, que puede tomarse igual a cero ya que es pequeña en relación a σ_1 y σ_2. Un elemento típico infinitesimal para el elemento y tres vistas planas se muestran en la figura 13-3(a). Los círculos de esfuerzos principales se muestran en la figura 13-3(b). El esfuerzo cortante máximo se encuentra sobre el círculo *mayor* de esfuerzos que pasa por el origen O y σ_1. Su magnitud es $\sigma_1/2$. Los planos en que actúan los esfuerzos cortantes

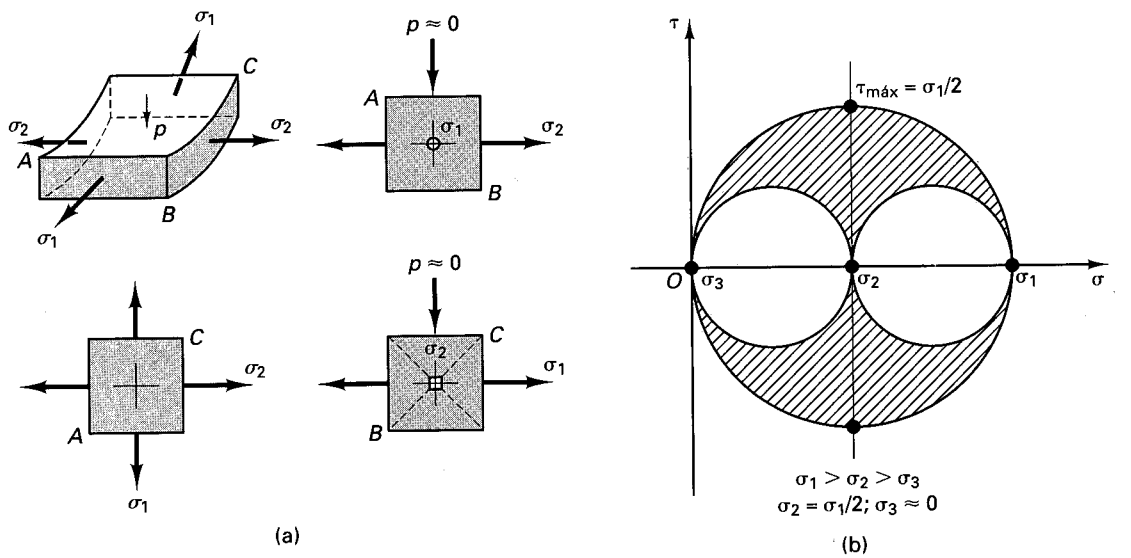


Fig. 13-3 Círculos de Mohr para esfuerzos en la pared cilíndrica de un recipiente a presión.

máximos están identificados por líneas de rayas en el elemento derecho inferior. Note que si se consideran sólo los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, el esfuerzo cortante máximo será sólo la mitad de grande. En diseño, puede también usarse el criterio de fluencia basado en la teoría de la distorsión máxima (véase la sección 12-4).

La construcción de recipientes a presión con materiales frágiles es generalmente evitada, ya que tales materiales no dan aviso de una falla inminente por medio de la fluencia.

Es interesante notar que para un recipiente a presión esférico de pared delgada, $\sigma_1 = \sigma_2$ y el círculo de esfuerzo principal correspondiente degenera en un punto. Sin embargo, el esfuerzo cortante máximo es $\sigma_1/2$ ya que el tercer esfuerzo principal es cero.

Ejemplo 13-3

Examine el estado de esfuerzo en un tubo circular sometido a un par de torsión construyendo los tres círculos principales de esfuerzos. Relacione los resultados con criterios de fluencia y fractura.

SOLUCIÓN

Los esfuerzos cortantes para este caso se encontraron usando la ecuación 6-4. Un elemento típico infinitesimal del tubo y tres vistas planas se muestran en la figura 13-4(a). Aquí, el círculo mayor de esfuerzo principal tiene un radio igual al esfuerzo cortante τ_0. (Véase en la sección 11-7 las reglas para construir el círculo de Mohr.) Por consiguiente, los dos esfuerzos principales son σ_1 y σ_3, como se muestra en la figura 13-4(b). El esfuerzo principal me-

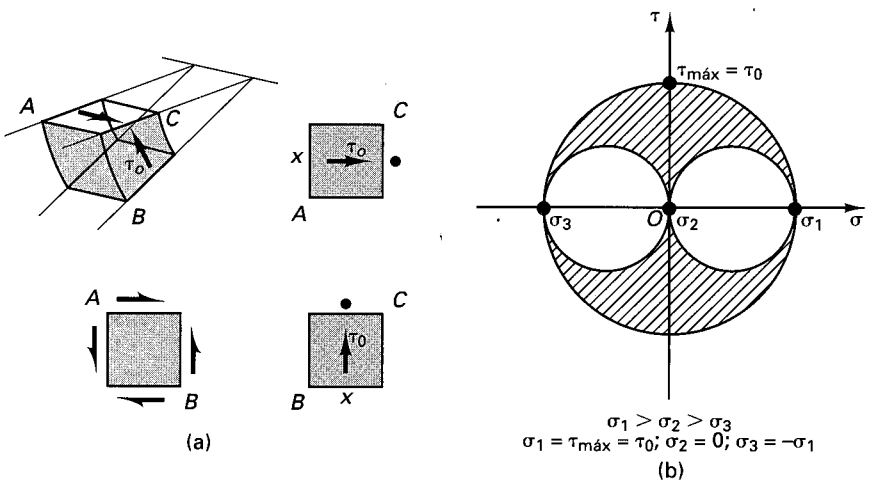


Fig. 13-4 Círculos de Mohr para esfuerzos en un tubo circular sometido a un par de torsión.

dio σ_2 es cero, lo que justifica el dibujo de los dos pequeños círculos que se muestran.

Para materiales dúctiles, la resistencia en cortante es más pequeña que en tensión y, como se mostró antes en la figura 6-9, en la falla, ocurre una fractura a escuadra a través del miembro. Si, alternativamente, el material es más fuerte en cortante que en tensión, se observa una fractura característica a lo largo de una hélice, como se muestra en la figura 6-10.

Ejemplo 13-4

Una viga elástica rectangular de 40 × 300 mm tiene un claro de 1000 mm, como se muestra en la figura 13-5(a). Esta viga está arriostrada para impedir el pandeo lateral. (a) Determine los esfuerzos principales en los puntos K, L, M, L' y K' causados por la aplicación de una fuerza vertical concentrada $P = 80$ kN en el centro del claro en la parte superior de la viga. (b) Para la misma condición, encuentre los esfuerzos sobre un plano inclinado definido por $\theta = +30°$ para el elemento L'.

SOLUCIÓN

(a) En la sección K-K', la fuerza cortante es de 40 kN y el momento flexionante de 10 kN · m, actuando en las direcciones mostradas en la figura 13-5(c).

Ningún esfuerzo cortante actúa sobre los elementos K y K', ya que se encuentran en fronteras de la viga. Por tanto, los esfuerzos principales en esos puntos se obtienen directamente de la ecuación 8-21:

$$\sigma_{K\text{o}K'} = \mp\frac{Mc}{I} = \mp\frac{M}{S} = \mp\frac{6M}{bh^2} = \mp\frac{6 \times 10 \times 10^6}{40 \times 300^2} = \mp 16.67 \text{ MPa}$$

Los esfuerzos principales que actúan en la dirección vertical son cero. Esos resultados se muestran en la figura 13-5(d) y (h).

Los esfuerzos normales que actúan sobre los elementos L y L' se obtienen de los resultados previos reduciéndolos por una razón de las distancias del eje neutro a los elementos (es decir, por 140/150). Los esfuerzos cortantes correspondientes se obtienen usando la ecuación 10-6, para la cual el área rayada A_{fghj} y la correspondiente $\bar{y}$ se muestran en la figura 13-5(b). Por tanto,

$$\sigma_{L\text{o}L'} = \mp\frac{140}{150} \times \sigma_{K'} = \mp 15.56 \text{ MPa}$$

$$\tau_{L\text{o}L'} = \frac{VA_{fghj}\bar{y}}{It} = \frac{40 \times 10^3 \times 40 \times 10 \times 145}{40 \times 300^3/12 \times 40} = 0.644 \text{ MPa}$$

Esos resultados se muestran en la figura 13-5(e) y (g).

El círculo de Mohr de esfuerzos se usa para obtener los esfuerzos principales en L, como en la figura 13-5(i) y los resultados se muestran sobre un elemento girado en la figura 13-5(e). El método 1 de la sección 11-7 se usa para obtener los resultados. Note la invarianza de la suma de los esfuerzos normales (es decir, $\sigma x + \sigma y = \sigma_1 + \sigma_2$ o $-15.56 + 0 = -15.59 + 0.03$). Una

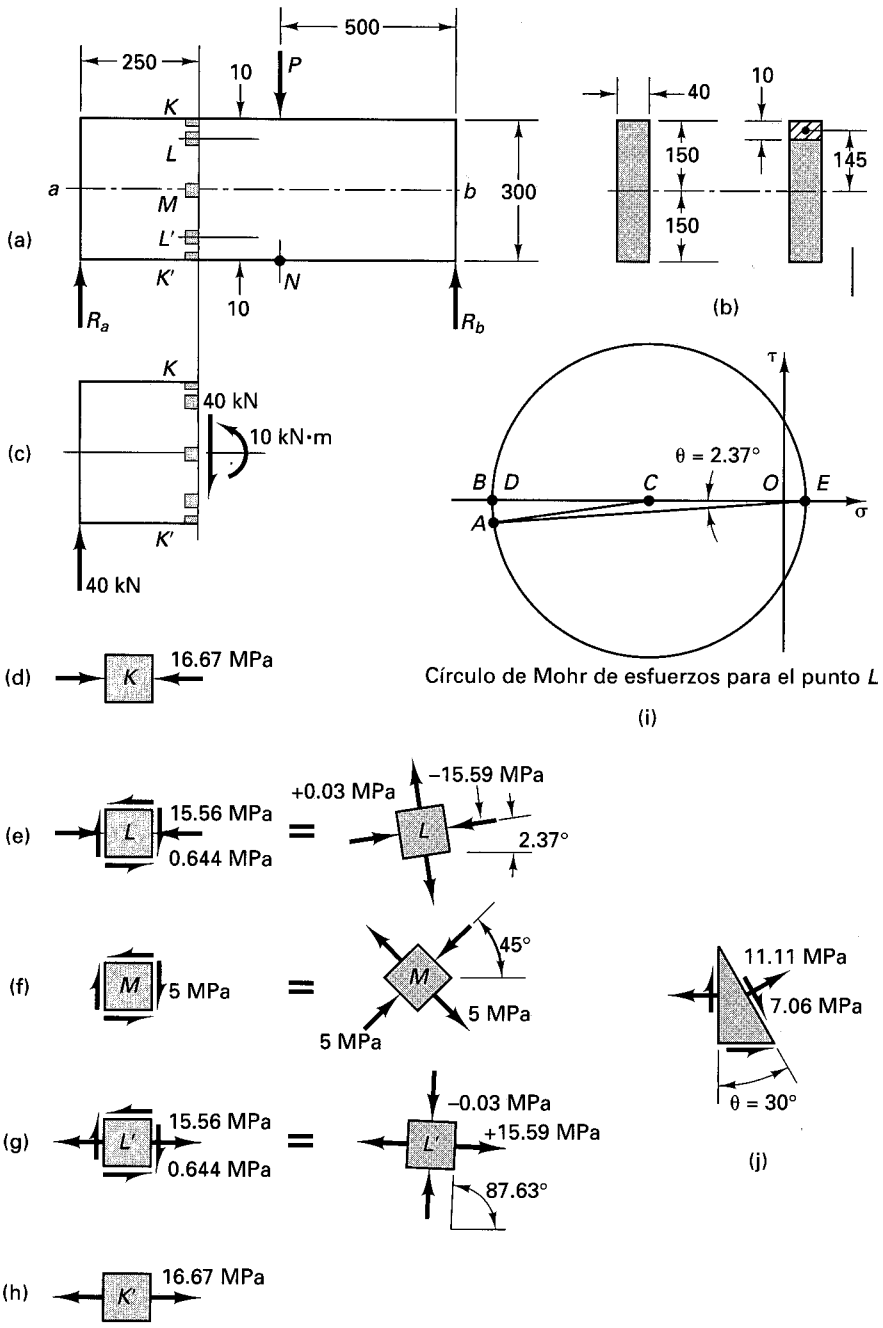

500
250
10
P
K
L
a
M
b
300
L'
K'
N
10
R_a
R_b
(a)
40
10
150
150
145
(b)
K
40 kN
10 kN·m
(c)
K'
40 kN
τ
θ = 2.37°
B
D
C
O
E
A
σ
(d)
K
16.67 MPa
Círculo de Mohr de esfuerzos para el punto L
(i)
(e)
L
15.56 MPa
0.644 MPa
=
+0.03 MPa
−15.59 MPa
L
2.37°
(f)
M
5 MPa
=
M
45°
5 MPa
5 MPa
11.11 MPa
7.06 MPa
θ = 30°
(j)
(g)
L'
15.56 MPa
0.644 MPa
=
−0.03 MPa
L'
+15.59 MPa
87.63°
(h)
K'
16.67 MPa

Fig. 13-5

solución similar para los esfuerzos principales en el punto L' da los resultados mostrados sobre el elemento girado en la figura 13-5(g).

El punto M se encuentra sobre el eje neutro de la viga; por tanto, ningún esfuerzo de flexión actúa sobre el elemento correspondiente mostrado en el primer croquis de la figura 13-5(f). El esfuerzo cortante sobre la cara derecha del elemento en M actúa en la misma dirección que el cortante interno en la sección KK'. Su magnitud puede obtenerse aplicando la ecuación 10-6 o directamente usando la ecuación 10-8a; es decir,

$$\tau_{máx} = \frac{3}{2}\frac{V}{A} = \frac{1.5 \times 40 \times 10^3}{40 \times 300} = 5 \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante *puro* transformado en los esfuerzos principales de acuerdo con la figura 11-6 se muestra sobre un elemento girado en la figura 13-5(f).

Es importante examinar cualitativamente más aún los resultados obtenidos. Con este fin, los esfuerzos principales calculados *que actúan sobre los planos correspondientes* se muestran en las figuras 13-6(a) y (b). En la figura 13-6(a) puede verse el comportamiento característico del esfuerzo principal mayor (tensión) en una sección de una viga rectangular. Este esfuerzo disminuye progresivamente en magnitud desde un valor máximo en K' hasta cero en K. Al mismo tiempo, las direcciones correspondientes de σ_1 giran gradualmente a través de un ángulo de 90°. Una observación similar puede hacerse respecto al esfuerzo principal (compresión) σ_2 mostrado en la figura 13-6(b).
(b) Para encontrar los esfuerzos que actúan sobre un plano de $\theta = +30°$ por el punto L', se aplican directamente las ecuaciones 11-1 y 11-2 usando los esfuerzos mostrados sobre el elemento izquierdo en la figura 13-5(g) y el hecho de que $2\theta = 60°$:

$$\sigma_\theta = \frac{+15.56}{2} + \frac{+15.56}{2}\cos 60° + (-0.644)\,\text{sen}\,60° = +11.11 \text{ MPa}$$

$$\tau_\theta = \frac{-15.56}{2}\,\text{sen}\,60° + (-0.644)\cos 60° = -7.06 \text{ MPa}$$

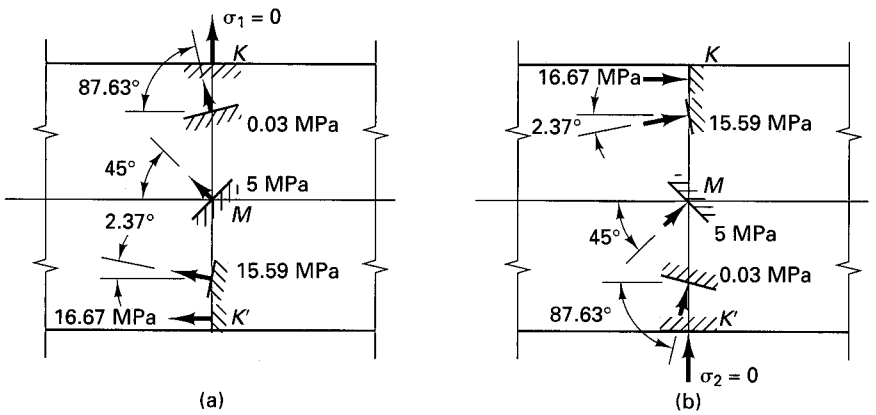


Fig. 13-6 (a) Comportamiento del esfuerzo principal mayor σ_1. (b) Comportamiento del esfuerzo principal menor σ_2.

Esos resultados se muestran en la figura 13-5(j). El sentido del esfuerzo cortante τ_θ es opuesto al mostrado en la figura 11-4(b), ya que la cantidad calculada es negativa. El "procedimiento de la cuña", explicado en el ejemplo 11-1, o el método del círculo de Mohr, visto en la sección 11-7, pueden usarse para obtener los mismos resultados.

13-3. Exactitud comparativa de las soluciones para vigas

La solución en el ejemplo previo de una viga considerando flexión y cortante se basa en los esfuerzos obtenidos inicialmente usando las fórmulas convencionales de la mecánica de sólidos. Esas fórmulas se obtienen suponiendo que las secciones planas de una viga permanecen planas durante la flexión. Como esta hipótesis básica no es enteramente verdadera en todos los casos, esas soluciones pueden llamarse *elementales*. Por tanto, es útil comparar los resultados obtenidos con una solución más exacta. Tal comparación se hace aquí con una solución por elemento finito, mostrada en la figura 13-7. Debido a la simetría del problema, sólo la mitad de la viga fue analizada usando 450 elementos finitos.[1]

Las líneas de contorno para los esfuerzos principales se muestran en la figura 13-7(a). Cualquier punto sobre un contorno de esfuerzo tiene un esfuerzo principal de la misma magnitud y signo. Los esfuerzos de tensión están identificados por los números con signos positivos y los esfuerzos de compresión por números con signos negativos. Las regiones donde las soluciones elementales no son aplicables se muestran sombreadas.

Comparaciones entre las soluciones elementales y por elemento finito de la distribución del esfuerzo normal a través de la sección K-K' se muestran en la figura 13-7(b), y para el esfuerzo cortante en la figura 13-7(c). Se ve que la concordancia es excelente. Sin embargo, la sección K-K' está tomada a la mitad entre la fuerza concentrada P aplicada y la reacción concentrada R_a. En esos puntos ocurren grandes perturbaciones locales en el esfuerzo, parecidas a las mostradas antes en las figuras 3-9 y 3-10. Sin embargo, de acuerdo con el principio de Saint-Venant, los esfuerzos locales disminuyen rápidamente y se establece un patrón regular de esfuerzos estáticamente equivalente. En la práctica, los grandes esfuerzos bajo fuerzas concentradas se reducen aplicando éstas sobre un área para obtener así una presión de apoyo aceptable. Teóricamente, en un cuerpo elástico, el esfuerzo bajo una fuerza concentrada es infinito. En realidad, alguna fluencia

[1]Esta solución fue obtenida usando el programa de computadora FEAP desarrollado por R. L. Taylor empleando elementos isoparamétricos de cuatro nodos. Un procedimiento automático generador de redes permite el uso de elementos graduados más pequeños bajo fuerzas concentradas, donde los esfuerzos varían más rápidamente que en otras partes. Elementos cuadrados convencionales en el programa FEAP fueron usados en las soluciones previamente citadas. Como en una placa bidimensional de espesor finito los esfuerzos en el plano varían algo a través del espesor, en la formulación FEAP se usan los valores promedio de esos esfuerzos a través del espesor de la placa. Tales esfuerzos se llaman *esfuerzos planos generalizados.*

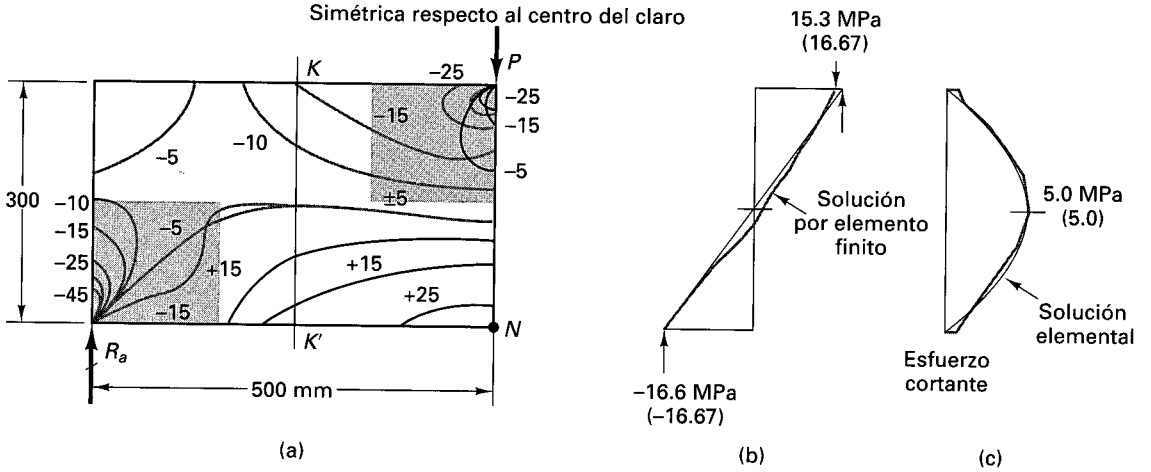


Fig. 13-7 (a) Contornos de esfuerzos principales para la viga del ejemplo 13-4 determinados por elementos finitos. (b) y (c) Comparaciones entre soluciones elementales y por elementos finitos para esfuerzos normales y cortantes en la sección K–K'. [Los esfuerzos de las soluciones elementales en (b) y (c) están dados entre paréntesis.] La distribución de esfuerzos bajo fuerzas concentradas mostrada en regiones grises no es determinable por un análisis elemental. (Véanse las figura 3-9 y 3-10.)

plástica que reduce los esfuerzos tiene lugar en la proximidad de la fuerza aplicada.

Es interesante notar en la figura 13-7(a) que los contornos ±5 MPa coinciden en más de la mitad del claro. Esta condición corresponde a los esfuerzos principales para el elemento medio M en la figura 13-5(f) y coincide casi precisamente con el eje neutro en la solución elemental. El esfuerzo en el punto N en el fondo de la viga debajo de la fuerza P tiene una aproximación de 5% respecto a la solución elemental.[2]

La viga es relativamente corta con una relación de longitud a peralte de 3.33. Es instructivo comparar esta solución con la de la viga similar que tiene una relación de longitud a peralte de 8.33 y se muestra en la figura 13-8. Para esta viga con claro de 2500 mm, la carga concentrada aplicada es $P = 32$ kN. Una mitad de esta viga fue analizada usando 900 elementos finitos. De acuerdo con soluciones elementales, el esfuerzo máximo de flexión en el punto N es el mismo que en el caso previo. Sin embargo, aquí el esfuerzo cortante en el eje neutro es de 2 MPa. En la figura, los esfuerzos principales de esta magnitud definen el eje neutro en la solución elemental. En contraste con el caso anterior, se ve que el plano neutro se extiende esencialmente a través de toda la longitud de la viga. Las perturbaciones del esfuerzo causadas por la fuerza concentrada, así como por las reacciones, están mucho más localizadas. Además, el esfuerzo flexionante máximo

[2]Las soluciones analíticas y fotoelásticas de Wilson-Stokes desarrolladas alrededor de 1890, muestran que el esfuerzo de flexión máximo causado por una fuerza concentrada en vigas *cortas* es menor que el dado por la teoría elemental de la flexión. La solución analítica muestra que se aproxima asintóticamente a la solución elemental con una razón creciente de la longitud al peralte de la viga. Véase M. M. Frocht, *Photoelasticity*, Vol.II, Nueva York, Wiley, 1948, p. 116.

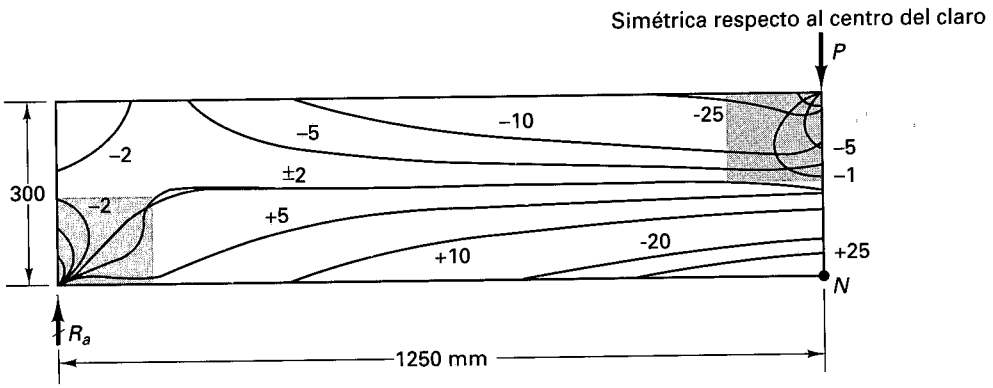


Fig. 13-8 Contornos de esfuerzos principales para la mitad izquierda de una viga rectangular simplemente apoyada cargada en el centro del claro.

en el punto *N* tiene un valor a menos del 2% del valor dado por la solución elemental. Como el punto *N* está a una distancia igual a un peralte de la viga desde la fuerza aplicada *P*, esta solución proporciona nuevamente un ejemplo del principio de Saint-Venant y la fórmula elemental es suficientemente exacta.

Para vigas que soportan cargas distribuidas, las perturbaciones de los esfuerzos ocurren principalmente en los apoyos.

Por las razones previas, las fórmulas elementales de la mecánica de sólidos se consideran generalmente suficientemente exactas como para el diseño usual. Son también indispensables para el diseño preliminar de miembros complejos en los que subsecuentemente un miembro es analizado por un método refinado, como el del elemento finito.

Observación importante: Una reiteración Debe recalcarse que las fórmulas elementales del análisis elástico de esfuerzos no son capaces de determinar las distribuciones locales de esfuerzos bajo cargas concentradas y cambios abruptos en secciones transversales de un miembro. Esto está de acuerdo con el principio de Saint-Venant (Sección 3-3), que afirma que en tales localidades los esfuerzos están perturbados y se deben usar entonces métodos más avanzados de análisis. Ilustraciones de este principio se dieron para bloques cargados axialmente (Fig. 3-9), concentraciones de esfuerzos en agujeros en barras cargadas axialmente (Fig. 3-11), concentraciones de esfuerzos en flechas circulares sometidas a pares de torsión (figura 6-13) y los puntos de aplicación de carga concentrada y soportes en vigas (Figs. 13-7 y 13-8). Note que a distancias más allá de medio peralte, las fórmulas elementales proporcionan resultados razonablemente exactos (figura 13-7(b) y (c)).

La distribución del esfuerzo cortante en vigas de patín ancho en soportes, basada en $\tau = VQ/It$, ecuación 10-6, es inexacta, poniendo en duda la validez de la hipótesis universalmente aceptada de que las secciones planas permanecen planas. La aceptación de esta vieja hipótesis puede no estar totalmente justificada en las conexiones.

13-4. Métodos experimentales del análisis elástico

En el pasado, cuando los procedimientos matemáticos se volvían demasiado engorrosos o imposibles de aplicar, el método fotoelástico de análisis de esfuerzos fue usado ampliamente para resolver problemas prácticos. Muchos de los factores de concentración de esfuerzos citados en este texto son obtenidos o verificados por tal trabajo experimental. Esfuerzos exactos pueden encontrarse en una probeta usando este método.[3]

Esta área tradicional de la fotoelasticidad ha sido absorbida en gran medida por los procedimientos numéricos modernos. Algunas ilustraciones de tal enfoque usando elementos finitos se han presentado en este texto, incluidas las dos soluciones citadas en la sección precedente. Sin embargo, los procedimientos fotoelásticos apoyados con computadora han progresado mucho y siguen siendo útiles en aplicaciones especiales. Además, se dispone ahora de varios procedimientos experimentales adicionales. Entre éstos, las interferometrías Moiré, holográfica y láser están siendo cada vez más aplicadas. Estos métodos se describen en textos especializados.[4] Sin embargo, alguna terminología desarrollada principalmente en fotoelasticidad bidimensional es de uso general y se da como referencia.

En la sección anterior, los esfuerzos principales de la misma magnitud algebraica proporcionaron un "mapa" de *contornos de esfuerzos*. Similarmente, pueden conectarse los puntos en que las direcciones de los esfuerzos principales menores forman un *ángulo constante* con el eje x. Además, como los esfuerzos principales son mutuamente perpendiculares, la dirección de los esfuerzos principales mayores por los mismos puntos también

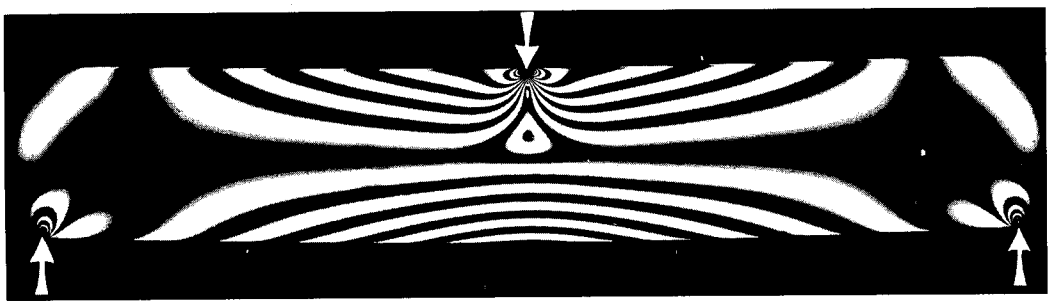


Fig. 13-9 Fotografía de franjas de una viga rectangular. (Fotografía por R. W. Clough.)

[3]La figura 13-9 muestra franjas regularmente espaciadas y perturbadas bajo puntos de cargas concentradas. Esas franjas fotoelásticas proporcionan un mapa de la *diferencia* en los esfuerzos principales. Éstas no dan directamente contornos para esfuerzos seleccionados, como lo hace el método del elemento finito.

[4]Véase A. S. Kobayashi (editor), *Handbook on Experimental Mechanics,* Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1987.

forman un ángulo constante con el eje x. La línea así conectada es un lugar geométrico de puntos a lo largo de la cual los esfuerzos principales tienen *direcciones paralelas*. Esta línea se llama *línea isoclinal*. El término isoclinal se deriva de dos palabras griegas, *isos*, que significa igual, y *klino*, que significa pendiente o inclinación. Tres líneas isoclinales pueden encontrarse por inspección en una viga prismática rectangular sometida a carga transversal actuando normalmente a su eje. Las líneas correspondientes a las fronteras superior e inferior de una viga forman dos líneas isoclinales porque, en la frontera, los esfuerzos de flexión son los esfuerzos principales y actúan paralelamente a las fronteras. El esfuerzo de flexión es cero en el eje neutro donde sólo existen esfuerzos cortantes puros. Esos esfuerzos cortantes puros se transforman en esfuerzos principales que actúan todos ellos a un ángulo de 45° con el eje de la viga. Por consiguiente, otra línea isoclinal (la isoclinal a 45°) está localizada sobre el eje de la viga. Las otras líneas isoclinales son curvas y más difíciles de determinar.

Otro conjunto de curvas puede dibujarse para un cuerpo sometido a esfuerzos en el cual la magnitud y el sentido de los esfuerzos principales se conocen en una gran cantidad de puntos. Una curva cuya tangente está cambiando de dirección siguiendo la dirección de los esfuerzos principales se llama *trayectoria de esfuerzos principales* o línea isostática. Como las líneas isoclinales, las trayectorias de esfuerzos principales *no* conectan los puntos de iguales esfuerzos sino que indican las direcciones de los esfuerzos principales. Como los esfuerzos principales en cualquier punto son mutuamente perpendiculares, las trayectorias de esfuerzos principales forman una familia de curvas ortogonales (mutuamente perpendiculares).[5] Un ejemplo de trayectorias idealizadas de esfuerzos en una viga rectangular cargada con una fuerza concentrada en el centro del claro se muestra en la figura 13-10. Las trayectorias de esfuerzos principales correspondientes a los esfuerzos de tensión se muestran en la figura por medio de líneas continuas; las de esfuerzos de compresión se muestran con líneas de rayas. El patrón de trayectorias (no mostrado) es severamente perturbado en los soportes y en el punto de aplicación de la carga P, como puede sospecharse viendo la figura 13-7(a).

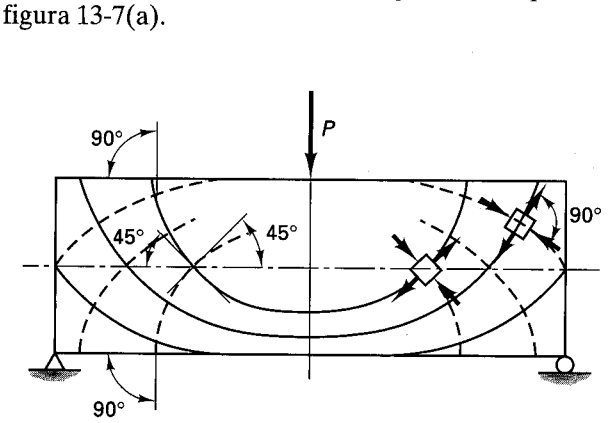


Fig. 13-10 Trayectorias de esfuerzos principales en una viga rectangular.

[5]Una situación algo análoga se encuentra en mecánica de fluidos, donde en problemas "bidimensionales" de paso de fluidos, las *líneas de corriente* y las *líneas equipotenciales* forman un sistema ortogonal de curvas, o sea la *red de flujo*.

Parte B DISEÑO ELÁSTICO POR RESISTENCIA

13-5. Diseño de miembros cargados axialmente

Los miembros axialmente cargados en tensión y los miembros cortos en compresión[6] son diseñados por resistencia usando la ecuación 1-15 (es decir, $A = P/\sigma_{perm}$). La *sección crítica* para un miembro axialmente cargado se presenta en una sección de área transversal mínima, donde el esfuerzo es un máximo. Esto requiere el uso de áreas *netas* en vez de áreas transversales totales. Si una discontinuidad abrupta en el área transversal es impuesta por los requisitos de diseño, el uso de la ecuación 3-11, $\sigma_{máx} = KP/A$, es apropiado. El uso de esta fórmula es necesario en el diseño de partes de máquinas para tomar en cuenta las concentraciones de esfuerzos donde puede ocurrir una falla por fatiga. En el diseño de estructuras estáticas, como edificios, rara vez se consideran los factores de concentraciones de esfuerzos. (Véase la figura 3-14.)

Además de los esfuerzos normales, dados por las ecuaciones previas, actúan también esfuerzos cortantes sobre planos inclinados. Por tanto, si un material es débil en resistencia al cortante en comparación a su resistencia en tensión o en compresión, fallará a lo largo de planos cercanos a los planos de esfuerzo cortante máximo, como se vió en la Sección 12-6. Sin embargo, independientemente del tipo de fractura que pueda realmente ocurrir, el esfuerzo permisible para el diseño de miembros cargados axialmente se basa, con frecuencia, en el esfuerzo *normal*. Este procedimiento de diseño es consistente. El esfuerzo normal máximo que un material puede resistir en la falla está directamente relacionado hacia la resistencia *última* del material. Por consiguiente, aunque la ruptura real puede ocurrir sobre un plano inclinado, el esfuerzo normal máximo puede ser considerado como la resistencia última.

Si en el diseño es necesario considerar la deflexión o la rigidez de un miembro cargado axialmente, el uso de las ecuaciones 3-2 y 3-4 es apropiado. *En algunas situaciones, esos criterios gobiernan la selección de los miembros.*

13-6. Diseño de miembros de torsión

Fórmulas explícitas para el diseño elástico de flechas circulares tubulares y de flechas macizas son dadas en la Sección 6-6. Algunos factores de concentración de esfuerzos esenciales en el diseño de tales miembros sometidos a carga cíclica se dan en la Sección 6-7. Grandes esfuerzos cortantes locales pueden desarrollarse en zonas con cambios del área transversal. Fórmulas de análisis de esfuerzos para algunos miembros tubulares macizos no circulares y de pared delgada se dan en las secciones 6-14 y 6-16. Para esas

[6]Los miembros esbeltos en compresión se verán en el capítulo 15.

secciones, las correspondientes fórmulas para calcular las rigideces de esos miembros son también proporcionadas. Excepto por los factores de concentraciones de esfuerzos, esas fórmulas son apropiadas para el diseño de miembros a torsión para muchos tipos de secciones transversales.

La mayoría de los miembros en torsión se diseñan seleccionando un *esfuerzo cortante permisible*. Esto equivale a usar directamente la teoría de falla por cortante máximo. Sin embargo, ayuda recordar que un estado de esfuerzo cortante puro, que ocurre en torsión, puede ser transformado en esfuerzos principales y, en materiales frágiles, las fracturas a tensión pueden ser causadas por los esfuerzos principales de tensión.

Un enfoque similar se usa en el diseño de flechas para trenes de engranes en equipos mecánicos. Sin embargo, en tales casos, las flechas, además de soportar un par de torsión, actúan también como vigas. Por tanto, este tema se pospone hasta la Sección 13-10.

13-7. Criterios de diseño para vigas prismáticas

Si una viga está sometida a *flexión pura*, se supone que sus fibras están en un estado de esfuerzo uniaxial. Si, además, una viga es prismática (es decir, de forma y sección transversal constantes), la sección crítica ocurre en la sección de momento flexionante máximo. Asignando un esfuerzo permisible, podemos determinar el módulo de sección de tal viga usando la ecuación 8-21, $S = M/\sigma_{máx}$. Después de que es conocido el módulo de sección requerido, puede seleccionarse una viga de proporciones correctas. Sin embargo, si una viga resiste cortante además de flexión, su diseño se vuelve más complicado.

Considere la viga prismática rectangular del ejemplo 13-4 en una sección a 250 mm del soporte izquierdo, donde la viga transmite un momento flexionante *y* una fuerza cortante; véase la figura 13-11(a). Los esfuerzos principales en los puntos K, L, M, L' y K' en esta sección se encontraron antes y están reproducidos en la figura 13-11(b). Si esta sección fuese la crítica, se ve que el diseño de esta viga, con base en la teoría del esfuerzo normal máximo, sería gobernado por los esfuerzos *en las fibras extremas*, ya que ningún otro esfuerzo excede a éstos. En una viga prismática, esos esfuerzos dependen sólo de la magnitud del momento flexionante y son máximos en una sección donde se presenta el momento flexionante máximo. Por tanto, en el diseño ordinario *no* es necesario efectuar el análisis combinado de esfuerzos para puntos interiores. En el ejemplo considerado, el momento flexionante máximo está en el centro del claro. Lo anterior puede generalizarse en una regla básica para el diseño de vigas prismáticas: *Una sección crítica para una viga prismática que soporta cargas transversales actuando normalmente a su eje ocurre donde el momento flexionante alcanza su máximo absoluto.*

Para secciones transversales sin dos ejes de simetría, como las vigas T, hechas de un material que tiene propiedades diferentes en tensión y en compresión, los momentos *máximos* en *ambos sentidos* (positivo o negativo) deben ser examinados. Bajo ciertas circunstancias, un menor momento

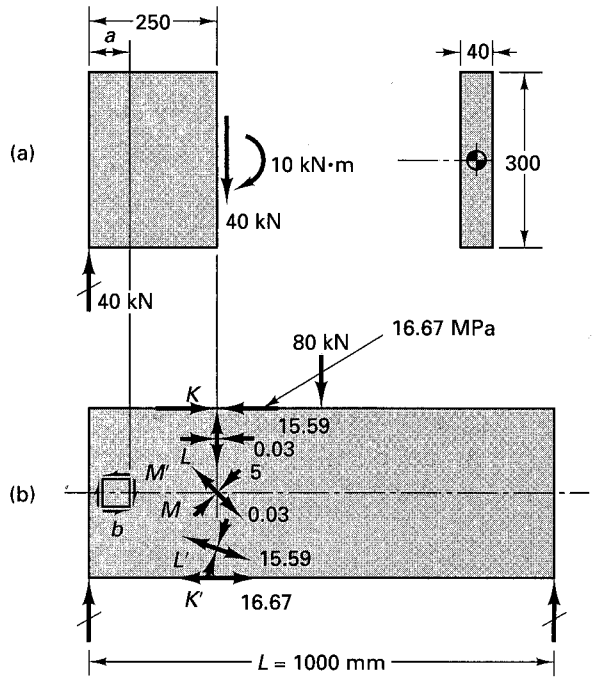


Fig. 13-11

flexionante en un sentido puede causar un esfuerzo más crítico que un momento mayor en otro sentido. La sección en la que el esfuerzo de una fibra extrema en relación con el esfuerzo permisible respectivo es máximo, es la sección crítica.

El criterio anterior para el diseño de vigas prismáticas es incompleto ya que la atención se dirigió específicamente a los esfuerzos causados por el momento. En algunos casos, los esfuerzos cortantes causados por el cortante en una sección pueden regir el diseño. En el ejemplo considerado, figura 13-11, la magnitud del cortante permanece constante en toda sección de la viga. A una pequeña distancia a desde el apoyo izquierdo, la fuerza cortante máxima es aún de 40 kN, mientras que el momento flexionante, $40a$ kN · m es pequeño. El esfuerzo cortante máximo en el eje neutro correspondiente a $V = 40$ kN es el mismo en el punto M' que en el punto M.[7] Por tanto, como en un problema general los esfuerzos de flexión pueden ser pequeños, éstos no gobiernan la selección de una viga y *otra sección crítica para cualquier barra prismática ocurre donde la fuerza cortante es máxima.* Al aplicar este criterio, es costumbre trabajar directamente con el esfuerzo cortante máximo que puede obtenerse con la ecuación 10-6, $\tau = VQ/It$ y no transformar el $\tau_{máx}$ así encontrado en los esfuerzos principales. Para vigas rectangulares e I, el esfuerzo cortante máximo dado por la ecuación 10-6 se reduce a las ecuaciones 10-8a y 10-10, $\tau_{máx} = (3/2)V/A$ y $(\tau_{máx})_{aprox} = V/A_{alma}$, respectivamente.

[7]En el punto M, los esfuerzos cortantes se muestran transformados en los esfuerzos principales.

Si la sección donde el momento flexionante es un máximo, o si la sección donde la fuerza cortante es un máximo, gobierna la selección de una viga prismática, depende de la carga y del material usado. Generalmente, el esfuerzo cortante permisible es menor que el esfuerzo permisible por flexión. Por ejemplo, la razón entre esos esfuerzos permisibles es aproximadamente 1/2, mientras que para algunas maderas puede ser tan bajo como 1/15.[8] Independientemente de esas razones entre esfuerzos, *los esfuerzos de flexión controlan usualmente la selección de una viga.* Sólo en vigas de claro pequeño la fuerza cortante rige el diseño. Para longitudes pequeñas de vigas, las fuerzas aplicadas y las reacciones tienen brazos de momento pequeños y los momentos flexionantes resistentes requeridos son pequeños. Por otra parte, las fuerzas cortantes pueden ser grandes si las fuerzas aplicadas son también grandes.

Los dos criterios para el diseño de vigas son exactos si las dos secciones críticas están en localidades diferentes. Sin embargo, en algunos casos el momento flexionante máximo y la fuerza cortante máxima ocurren en la *misma* sección de la viga. En tales situaciones, esfuerzos combinados mayores que $\sigma_{máx}$ y $\tau_{máx}$, dados por las ecuaciones 8-21 y 10-6, pueden a veces existir en puntos interiores. Por ejemplo, considere una viga I de peso despreciable que soporta una fuerza P en el centro de su claro, figura 13-12(a). El momento flexionante máximo se presenta en el centro del claro. Excepto por el signo, la fuerza cortante es la misma en ambos lados de la fuerza aplicada. En una sección justo a la derecha o justo a la izquierda de la fuerza aplicada, el momento máximo *y* la fuerza cortante máxima ocurren simultáneamente. En la figura 13-12(b) se muestra una sección justo a la izquierda de P con el correspondiente sistema de fuerzas actuando sobre ella. Para esta sección, puede mostrarse que los esfuerzos en las fibras extremas son de 2.50 ksi, mientras que los esfuerzos principales en la unión del alma con los patines, despreciando las concentraciones de esfuerzos, son de ± 2.81 ksi y de ± 0.51 ksi, actuando como se muestra en la figura 13-12(c) y (d).

Es costumbre no considerar directamente el efecto de las perturbaciones locales sobre los esfuerzos longitudinales en la vecindad de una fuerza concentrada. Más bien, el problema de los esfuerzos locales se resuelve requiriendo un área de contacto suficientemente grande para la fuerza aplicada para obtener un esfuerzo de apoyo aceptable. En algunos materiales, como la madera, esto puede requerir el uso de placas de apoyo de acero para repartir el efecto de la fuerza concentrada.

En este ejemplo se ve que el esfuerzo normal máximo no siempre ocurre en las fibras extremas. No obstante, sólo los esfuerzos normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro se investigan en el diseño ordinario. En los códigos de diseño, los esfuerzos permisibles se fijan suficientemente bajos, de manera que se tenga un factor de seguridad adecuado, aun cuando los esfuerzos combinados mayores no son tomados en cuenta. Aumentando un claro para la misma fuerza concentrada aplicada, los esfuerzos de flexión crecen linealmente con la longitud del claro,

[8]La madera es débil en su resistencia cortante *paralela* a su grano.

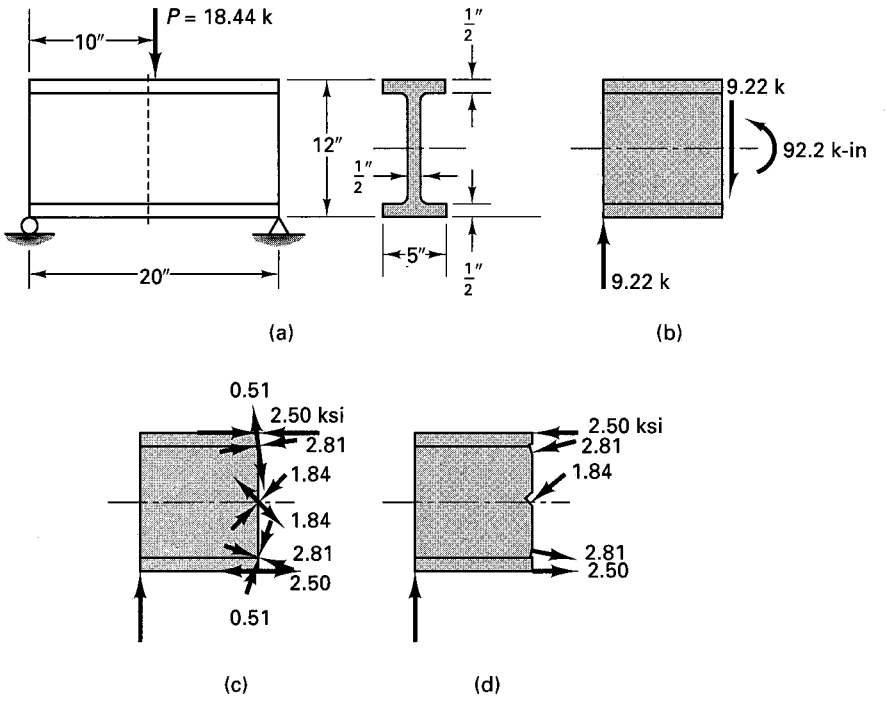


Fig. 13-12

mientras que los esfuerzos cortantes permanecen constantes. Por consiguiente, en la mayoría de los casos, los esfuerzos de flexión se vuelven dominantes rápidamente. Por tanto, en general, es necesario efectuar el análisis de esfuerzos combinados sólo para vigas muy cortas o en arreglos no comunes.

Del análisis previo se observa que, para el diseño de vigas prismáticas, las secciones críticas deben determinarse en cada problema, ya que el diseño se basa por completo en los esfuerzos desarrollados en esas secciones. La mejor manera de localizar las secciones críticas es con ayuda de los diagramas de fuerza cortante y de momento flexionante. Los valores requeridos de $M_{máx}$ y $V_{máx}$ pueden determinarse fácilmente con esos diagramas. La construcción de tales diagramas se vio en el capítulo 7.

13-8. Diseño de vigas prismáticas

Como se indicó en la sección anterior, el enfoque usual para el diseño de vigas prismáticas es controlado por los esfuerzos máximos en las *secciones críticas*. Una sección crítica ocurre donde el momento flexionante es máximo; otra, donde la fuerza cortante es máxima. Esas secciones se determinan convenientemente con ayuda de los diagramas de fuerza cortante y

momento flexionante.[9] En la mayoría de los casos,[10] el *momento máximo absoluto* (sea positivo o negativo) se usa para seleccionar un miembro. De la misma manera, la antes mencionada fuerza cortante máxima es crítica para el diseño. Por ejemplo, considere una viga simple con una fuerza concentrada, como se muestra en la figura 13-13. El diagrama de fuerza cortante, sin tomar en cuenta el peso de la viga, se muestra en la figura 13-13(a), que se construye comúnmente suponiendo la fuerza aplicada concentrada en un punto. En la figura 13-13(b) se considera un margen para el ancho de la fuerza aplicada y las reacciones, suponiéndolas uniformemente distribuidas a lo largo de la viga. Note que en cada caso las fuerzas cortantes de diseño son menores que la fuerza aplicada.

Los esfuerzos permisibles por usarse en el diseño son prescritos por varias autoridades. En la mayoría de los casos, el ingeniero debe seguir un código dependiente de la localización de la obra. En códigos diferentes, aun para el mismo material y uso, los esfuerzos permisibles difieren.

En el diseño elástico, después de que los valores críticos del momento y la fuerza cortante han sido determinados y los esfuerzos permisibles han sido seleccionados, usualmente la viga se diseña primero para resistir un momento máximo usando la ecuación 8-13 o la 8-21 ($\sigma_{máx} = M/S$ o $\sigma_{máx} = Mc/I$). Luego, la viga se *revisa* por esfuerzo cortante. Como la mayor parte de las vigas son regidas por los esfuerzos de flexión, este procedimiento es conveniente. Sin embargo, en algunos casos, particularmente en el diseño de madera y concreto, el esfuerzo cortante suele controlar las dimensiones de la sección transversal.

El método usado para calcular el esfuerzo cortante depende del tipo de sección transversal de la viga. Para secciones rectangulares, el esfuerzo cortante máximo es 1.5 veces el esfuerzo promedio, ecuación 10-8. Para vigas de patín ancho y vigas I, la fuerza cortante vertical total permisible se toma como el área del *alma* multiplicada por un esfuerzo cortante permisible, ecuación 10-10. Para otros casos se usa la ecuación 10-6, $\tau = VQ/It$.

Usualmente hay varios tipos o tamaños comercialmente disponibles que pueden usarse para una viga dada. A menos que se impongan limitaciones específicas al tamaño de la viga, por economía se usa el miembro más ligero. El procedimiento para seleccionar un miembro es un proceso de tanteos.

Debe también notarse que algunas vigas son seleccionadas con base en las deflexiones permisibles. Este tema se tratará en el siguiente capítulo.

Para vigas con cargas estáticamente aplicadas, como las de un edificio, existe la tendencia cada vez mayor a diseñarlas con base en el comportamiento inelástico (plástico). Este enfoque se considerará en el capítulo 20.

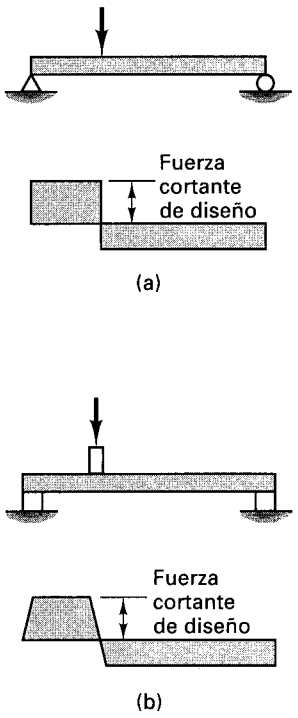


Fig. 13-13 Fuerza cortante de diseño.

[9]Con experiencia, la construcción de diagramas completos puede evitarse. Después de calcular las reacciones y determinar una sección donde $V = 0$ o bien donde V cambia de signo, el momento flexionante máximo correspondiente a esta sección puede encontrarse directamente usando el método de las secciones. Para cargas simples, los manuales dan fórmulas para la fuerza cortante y el momento máximos.

[10]Esto no siempre es cierto para materiales que tienen propiedades diferentes en tensión y en compresión.

Ejemplo 13-5

Seleccione una viga de madera de pino Douglas de sección transversal rectangular para soportar dos fuerzas concentradas, como se muestra en la figura 13-14(a). El esfuerzo permisible en flexión es de 8 MPa; en cortante es de 0.7 MPa y en aplastamiento perpendicular al grano de la madera es de 1.4 MPa.

SOLUCIÓN

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las fuerzas aplicadas se muestran, respectivamente, en la figura 13-14(b) y (c). En la figura 13-14(c) se ve que $M_{máx} = 10\ \text{kN} \cdot \text{m}$. De la ecuación 8-21,

$$S = \frac{M}{\sigma_{perm}} = \frac{10 \times 10^6}{8} = 1.25 \times 10^6\ \text{mm}^3$$

Suponiendo arbitrariamente que el peralte h de la viga será el doble de su ancho b, de la ecuación 8-22,

$$S = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 1.25 \times 10^6$$

Por consiguiente, $h = 247$ mm y $b = 123$ mm.

Consideremos que una viga *cepillada* de 140×240 mm con módulo de sección $S = 1.34 \times 10^6\ \text{mm}^3$ se usa para satisfacer este requisito. Para esta viga, de la ecuación 10-8a,

$$\tau_{máx} = \frac{3V}{2A} = \frac{3 \times 8 \times 10^3}{2 \times 140 \times 240} = 0.357\ \text{MPa}$$

Este esfuerzo cae dentro del límite permisible. Por consiguiente, la viga es satisfactoria.

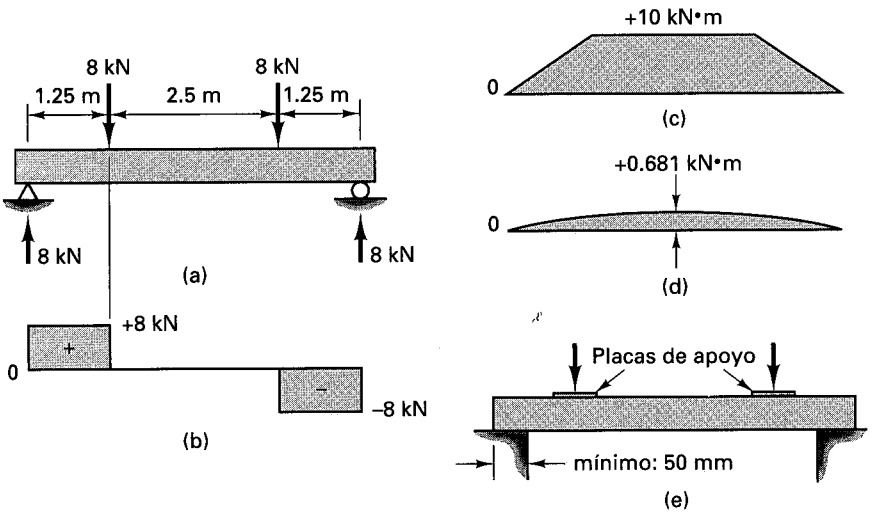


Fig. 13-14

Note que pueden usarse otras proporciones de la viga, y un método de diseño más directo es encontrar una viga de tamaño correspondiente al módulo de sección requerido en una tabla similar a la Tabla 9 del apéndice, que da propiedades de secciones estándar cepilladas en las unidades del sistema inglés.

El análisis se hizo sin considerar el peso propio de la viga que es inicialmente desconocido. (Los ingenieros experimentados a menudo dejan de partida un margen para el peso de la viga.) Sin embargo, éste puede considerarse ahora. Suponiendo que la madera pesa 6.5 kN/m^3, la viga seleccionada pesa 0.218 kN por metro lineal. Esta carga uniformemente distribuida genera un diagrama de momento flexionante parabólico, mostrado en la figura 13-14(d), en el que la ordenada máxima es $w_o L^2/8 = 0.218 \times 5^2/8 = 0.681$ kN · m. (Véase la figura 7-19.) Este diagrama de momento flexionante debe sumarse al diagrama causado por las fuerzas aplicadas. La inspección de esos diagramas muestra que el momento flexionante máximo debido a ambas causas es 0.681 + 10 = 10.68 kN · m. Por consiguiente, el módulo de sección requerido es realmente

$$S = \frac{M}{\sigma_{perm}} = \frac{10.68 \times 10^6}{8} = 1.34 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

La viga cepillada de 140 × 240 mm ya seleccionada proporciona el S requerido.

Para evitar el aplastamiento de la madera en los soportes y bajo las cargas concentradas aplicadas, deben proporcionarse áreas de apoyo adecuadas para esas fuerzas. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, tales áreas A en las cuatro localidades, de acuerdo con la ecuación 1-6, deben ser

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} = \frac{8 \times 10^3}{1.4} = 5710 \text{ mm}^2$$

Esas áreas pueden ser proporcionadas conservadoramente, especificando que los extremos de la viga descansen sobre soportes por lo menos de 50 × 140 mm (7000 mm^2), mientras que bajo las fuerzas concentradas, se usen arandelas de acero de 80 × 80 mm (6400 mm^2).

Ejemplo 13-6

Seleccione una viga I o una viga de acero de patín ancho para soportar la carga mostrada en la figura 13-15(a). Para la viga, $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $\tau_{perm} = 14.5$ ksi.

SOLUCIÓN

Los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga cargada se muestran en la figura 13-15(b) y (c), respectivamente. El momento máximo es de 36 k-ft. De la ecuación 8-21,

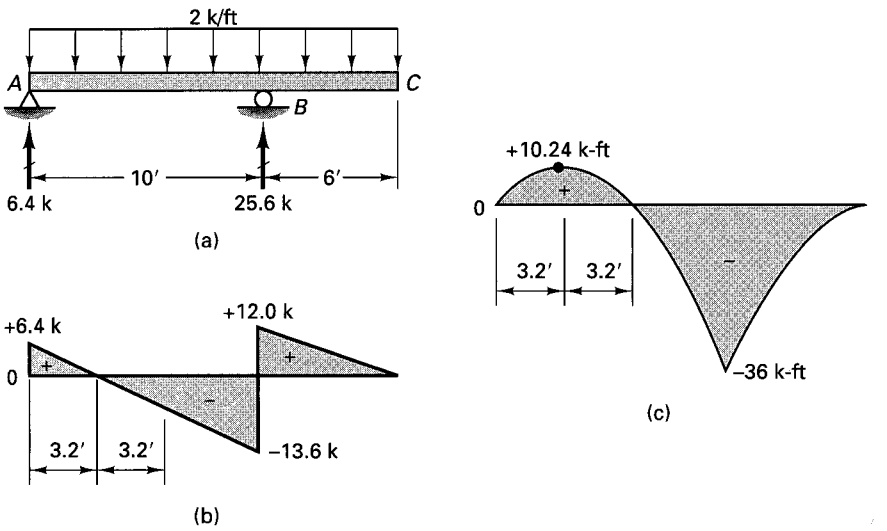


Fig. 13-15

$$S = \frac{36 \times 12}{24} = 18.0 \text{ in}^3$$

Las Tablas 3 y 4A del apéndice muestran que este módulo de sección requerido es proporcionado por una sección S de 10 in con peso de 35 lb/ft ($S = I_x/c = 29.4 \text{ in}^3$). En una tabla más completa puede encontrarse una sección más ligera. Sin embargo, una sección W de patín ancho de 8 in con peso de 24 lb/ft ($S = 20.9 \text{ in}^3$) es también adecuada. Por tanto, por razones de economía, la sección más ligera W8 × 24 será usada. El peso de la viga es pequeño en comparación con las cargas aplicadas y no será tomado en cuenta en los cálculos.

De la figura 13-15(b), $V_{máx} = 13.6$ kips. Por consiguiente, de la ecuación 7-10,

$$(\tau_{máx})_{aprox} = \frac{V}{A_{alma}} = \frac{13.6}{0.245 \times 7.93} = 7.00 \text{ ksi}$$

Este esfuerzo es inferior al valor permisible y la viga seleccionada es entonces satisfactoria.

Bajo los soportes o bajo fuerzas concentradas, las vigas S y las de patín ancho deben revisarse por aplastamiento de las almas. Este fenómeno está ilustrado en el fondo de la figura 13-16(a). El aplastamiento de las almas es más crítico para miembros con almas delgadas que el apoyo directo sobre los patines, que puede ser investigado como en el ejemplo precedente. Para evitar el aplastamiento, el AISC especifica una regla de diseño. Se establece que el esfuerzo directo sobre el área $(a + k)t$ en los extremos y $(a_1 + 2k)t$ en los puntos interiores, no debe exceder $0.75\sigma_{yp}$. En estas expresiones, a y a_1 son las longitudes respectivas de apoyo de las fuerzas aplicadas en porciones exteriores e interiores de una viga, figura 13-16(b), t es el espesor del alma y k es la distancia de la cara exterior de un patín a la punta del filete del alma. Los valores de k y t están tabulados en los catálogos de los fabricantes.

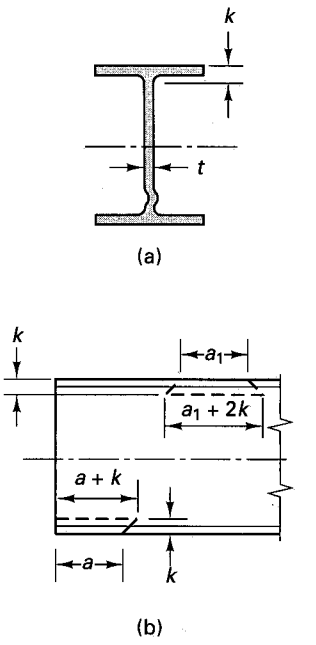


Fig. 13-16

Para este ejemplo, se supone $\sigma_{yp} = 36$ ksi, $0.75\sigma_{yp} = 27$ ksi y los anchos *mínimos* de los soportes, de acuerdo con la regla, son los siguientes:

En el soporte A:

$$27(a + k)t = 6.4 \quad \text{o} \quad 27(a + 7/8) \times 0.245 = 6.4$$

y

$$a = 0.09 \text{ in}$$

En el soporte B:

$$27(a_1 + 2k)t = 25.6 \quad \text{o} \quad 27(a_1 + 2 \times 7/8) \times 0.245 = 25.6$$

y

$$a_1 = 2.12 \text{ in}$$

Estos requisitos pueden cumplirse fácilmente en un caso real.

Los dos ejemplos precedentes ilustran el diseño de vigas cuyas secciones transversales tienen dos ejes de simetría. En ambos casos, los momentos flexionantes controlan el diseño y, como esto es usualmente cierto, es importante ver qué miembros son eficientes en flexión. Una concentración de tanto material como es posible, alejado del eje neutro, resulta en las mejores secciones para resistir flexión, figura 13-17(a). El material concentrado cerca de las fibras exteriores trabaja a un esfuerzo alto. Por esta razón, las secciones tipo I, que se aproximan a este requisito, son ampliamente usadas en la práctica.

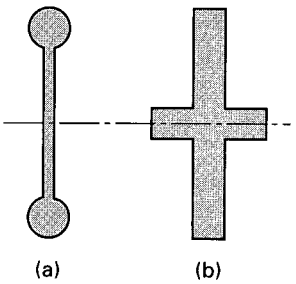


Fig. 13-17 Secciones (a) eficiente y (b) ineficiente para flexión.

Lo anterior se aplica a materiales que tienen casi las mismas propiedades en tensión y en compresión. Si este no es el caso, es deseable un desplazamiento deliberado del eje neutro desde la mitad del peralte. Esto explica el amplio uso de secciones T y canales para tales materiales (véase el ejemplo 8-5).

Finalmente, otros dos temas merecen atención en el diseño de vigas. En muchos casos, las cargas para las que una viga se diseña tienen carácter transitorio. Éstas pueden colocarse sobre la viga con su valor total inmediatamente, por partes o en *localidades diferentes*. Las cargas que no son una parte del "peso muerto" de la estructura misma, se llaman *cargas vivas*. Deben situarse de manera que provoquen los esfuerzos más altos posibles en una viga. En muchos casos, la posición puede determinarse por inspección. Por ejemplo, en una viga simple con una sola carga móvil, la colocación de la carga en el centro del claro genera el momento flexionante máximo, mientras que su colocación muy cerca de un soporte genera la fuerza cortante máxima. En la mayoría de los edificios, la carga viva, que supuestamente proporciona la condición de carga más severa esperada, es especificada en los códigos de construcción con base en una carga por área unitaria de piso. Multiplicando esta carga viva por el espaciamiento de las vigas paralelas se obtiene la *carga viva uniformemente distribuida* por lon-

gitud unitaria de la viga. Para fines de diseño, esta carga se agrega al peso muerto de la construcción. Las situaciones en que la fuerza aplicada es entregada a una viga con un golpe o impactos, serán analizadas en la sección 14-11.

El segundo tema se refiere a la *inestabilidad lateral* de las vigas. Los patines de la viga, si no se soportan lateralmente, pueden ser tan estrechos en relación con el claro que la viga puede pandearse lateralmente y colapsarse.

13-9. Diseño de vigas no prismáticas

Del análisis precedente debe quedar claro que la selección de una viga prismática se basa en los esfuerzos presentes en las secciones críticas. En las demás secciones de la viga, los esfuerzos estarán por debajo del nivel permisible. Por tanto, la capacidad potencial de un material dado no estará plenamente aprovechada. Esta situación puede mejorarse diseñando una viga de sección transversal variable (es decir, haciendo la viga no prismática). Como los esfuerzos de flexión controlan el diseño de la mayoría de las vigas, las secciones transversales pueden hacerse en todas partes suficientemente fuertes para resistir el momento correspondiente. Estas vigas se llaman *vigas de resistencia constante*. El cortante gobierna el diseño en las secciones de esas vigas en que el momento flexionante es pequeño.

Ejemplo 13-7

Diseñe una viga en voladizo de resistencia constante para resistir una fuerza concentrada aplicada en su extremo libre. No tome en cuenta el propio peso de la viga.

SOLUCIÓN

Una viga en voladizo con una fuerza concentrada en su extremo libre se muestra en la figura 13-18(a); el diagrama correspondiente de momentos está dibujado en la figura 13-18(b). Basando el diseño en el momento flexionante, el módulo de sección requerido en una sección arbitraria está dado por la ecuación 8-21:

$$S = \frac{M}{\sigma_{perm}} = \frac{Px}{\sigma_{perm}}$$

Muchas áreas transversales satisfacen este requisito, por lo que primero se supondrá que la viga será de sección transversal rectangular y de *peralte h constante*. El módulo de sección para esta viga está dado por la ecuación 8-22 como $bh^2/6 = S$; por consiguiente,

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_{perm}} \quad \text{o} \quad b = \left(\frac{6P}{h^2\sigma_{perm}}\right)x = \frac{b_o}{L}x \qquad (13\text{-}1)$$

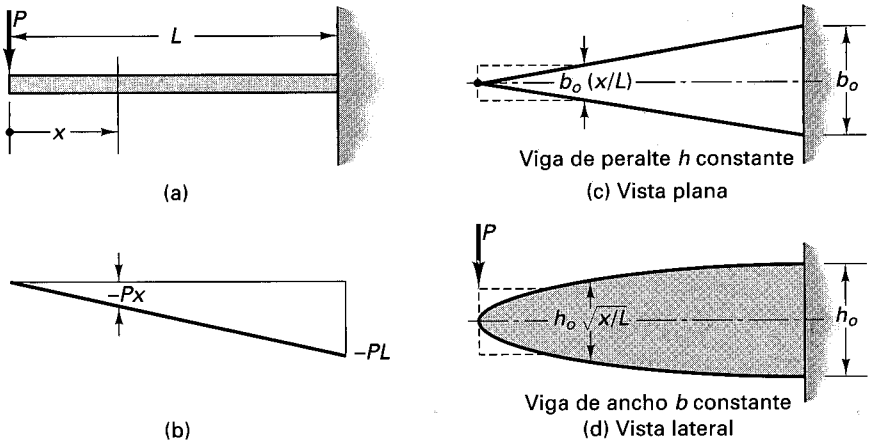


Fig. 13-18

donde la expresión en paréntesis es una constante que se hace igual a b_o/L, de manera que cuando $x = L$, el ancho es b_o. Una viga de resistencia constante con peralte constante en una vista plana se ve como la cuña[11] mostrada en la figura 13-18(c). Cerca del extremo libre, esta cuña debe modificarse para que tenga una resistencia adecuada para resistir la fuerza cortante $V = P$.

Si el ancho b *de la viga es constante,*

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{Px}{\sigma_{\text{perm}}} \quad \text{o} \quad h = \sqrt{\frac{6Px}{b\sigma_{\text{perm}}}} = h_o\sqrt{\frac{x}{L}} \tag{13-2}$$

Esta expresión indica que un voladizo de ancho constante cargado en su extremo es también de resistencia constante si su peralte varía parabólicamente desde el extremo libre, figura 13-18(d).

Las vigas de resistencia aproximadamente constante son usadas en resortes de hojas y en muchas partes de máquinas que son fundidas o forjadas. En el trabajo estructural se hace con frecuencia una aproximación a una viga de resistencia constante. Por ejemplo, el diagrama de momentos para la viga cargada, como se muestra en la figura 13-19(a), está dado por las líneas AB y BC en la figura 13-19(b). Seleccionando una viga de capacidad flexionante igual sólo a M_1, la porción media de la viga queda sobreesforzada. Sin embargo, pueden proporcionarse cubreplacas cerca del centro de la viga para aumentar la capacidad flexionante de la viga compuesta al valor requerido del momento máximo. Para el caso mostrado, las cubreplacas deben extenderse por lo menos sobre la longitud DE de la viga, y en la práctica se extienden sobre una longitud algo mayor. Un resorte de hojas,

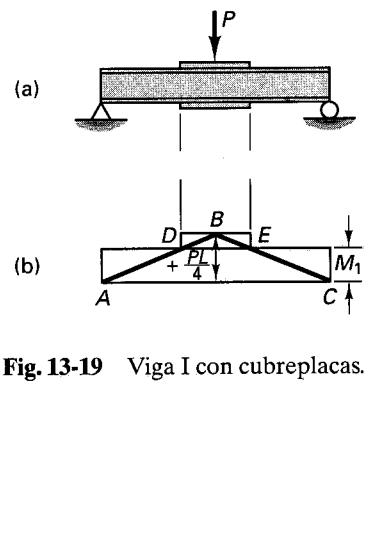


Fig. 13-19 Viga I con cubreplacas.

[11]Como esta viga no es de sección transversal constante, el uso de la fórmula de la flexión elemental no es enteramente correcto. Cuando el ángulo incluido por los lados de la cuña es pequeño, el error en que se incurre es pequeño. Si el ángulo es grande, el error puede ser considerable. Una solución exacta muestra que cuando el ángulo incluido total es de 40°, la solución tiene un error de casi 10%.

que se aproxima a una viga de resistencia constante como la de la figura 13-18(c), se muestra en la figura 13-20.

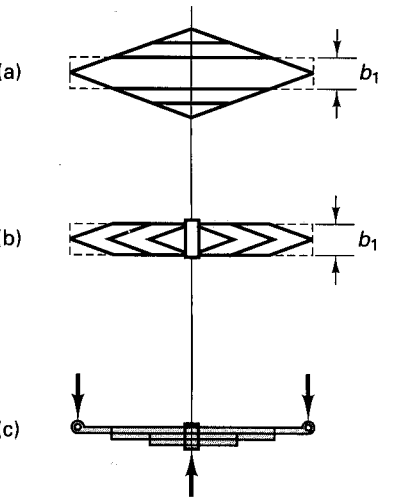


Fig. 13-20 Resorte de hojas.

13-10. Diseño de miembros complejos

En muchos casos, el diseño de miembros complejos no puede llevarse a cabo de la manera rutinaria en que se hizo en los ejemplos simples anteriores. Algunas veces el tamaño del miembro debe ser *supuesto* y efectuarse un análisis completo de esfuerzos en las secciones donde se crea que los esfuerzos son críticos. Los diseños de este tipo pueden requerir varias revisiones. Con frecuencia creciente, los análisis por elemento finito se usan en tales casos para el diseño final. Alternativamente, se recurre a métodos experimentales ya que las fórmulas elementales pueden no ser suficientemente exactas.

Como último ejemplo de este capítulo, se analiza el problema de una flecha de transmisión. Un procedimiento analítico directo es posible en este problema, que es de gran importancia en el diseño de equipo de potencia.

Ejemplo 13-8

Seleccione el tamaño de una flecha de acero maciza que debe impulsar las dos ruedas dentadas mostradas en la figura 13-21(a). Esas ruedas dentadas impulsan cadenas de rodillos con paso de $1\frac{3}{4}$-in[12] como se muestra en la figura 13-21(b) y (c). Los diámetros de paso de las ruedas dentadas mostradas en las figuras están tomados del catálogo del fabricante. Una unidad reductora de velocidad de 20 hp está acoplada directamente a la flecha y la impulsa a 63 rpm. En cada rueda dentada son tomados 10 hp. Suponga la teoría de falla del esfuerzo cortante máximo y sea $\tau_{perm} = 6$ ksi.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ecuación 6-11, el par de torsión entregado al segmento de flecha CD es $T = 63{,}000$ (hp/N) $= (63{,}000)20/63 = 20{,}000$ lb-in $= 20$ k-in. Por consiguiente, los pares de torsión T_1 y T_2 entregados a las ruedas dentadas son $T/2 = 10$ k-in *cada uno*. Como las cadenas están arregladas como se muestra en la figura 13-21(b) y (c), la tensión en la cadena en la rueda dentada B es $P_1 = T_1/(D_1/2) = 10/(10.632/2) = 1.88$ k. Similarmente, $P_2 = 10/(7.313/2) = 2.73$ k. La tensión P_1 sobre la cadena *es equivalente a* un par de torsión T_1 y a una fuerza vertical en B, como se muestra en la figura 13-21(d). En C, la fuerza P_2 actúa horizontalmente y ejerce un par de torsión T_2. Un diagrama completo de cuerpo libre para la flecha AD se muestra en la figura 13-21(d).

[12]Ruedas dentadas y cadenas de rodillos similares son comúnmente usadas en bicicletas.

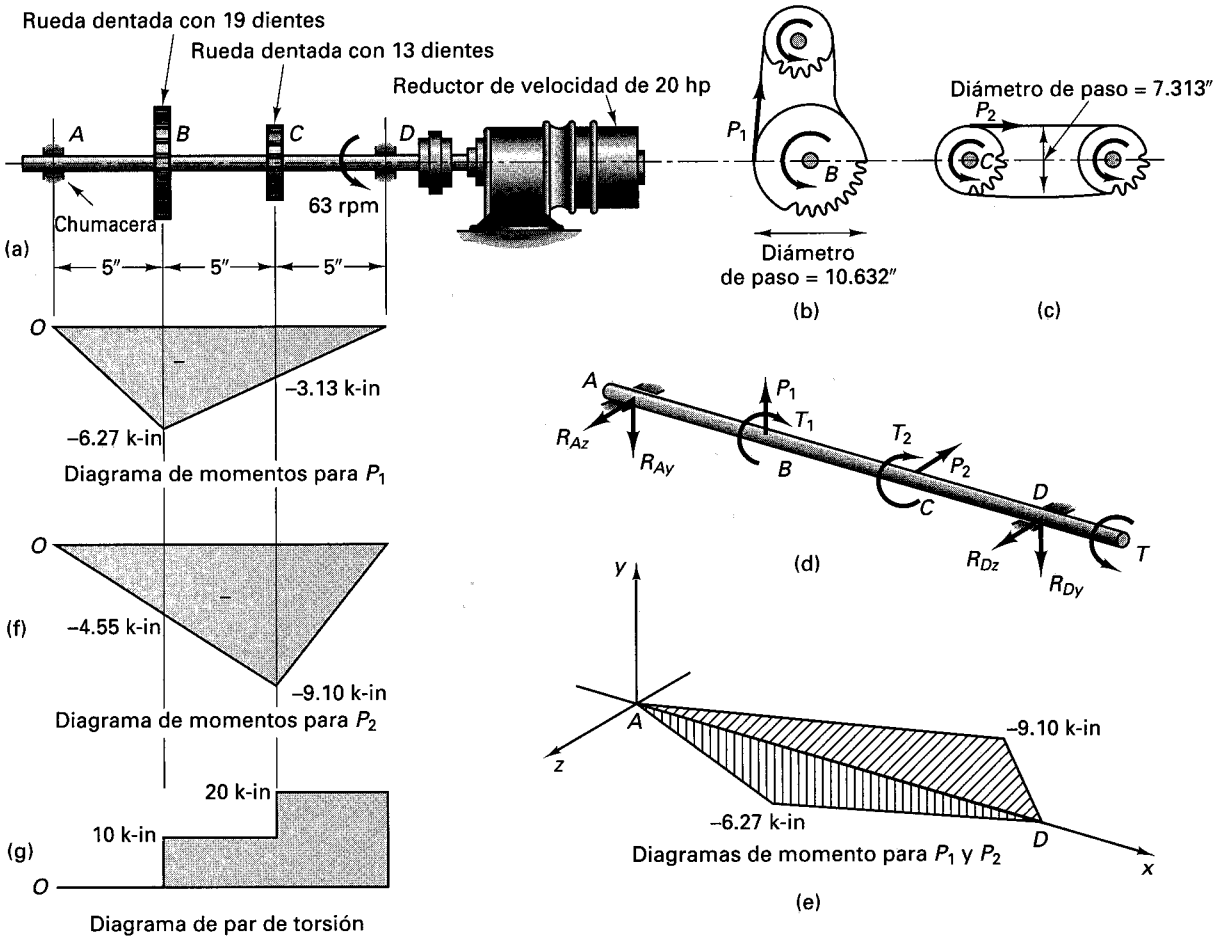


Fig. 13-21

Se ve en el diagrama de cuerpo libre que esta flecha se encuentra sometida simultáneamente a flexión y a torsión. Esos efectos sobre el miembro se estudian convenientemente con ayuda de los diagramas apropiados, que se muestran en la figura 13-21(e)–(g). A continuación, note que aunque la flexión tiene lugar en dos planos, una *resultante vectorial de los momentos* puede usarse en la fórmula de la flexión ya que la viga tiene sección transversal circular.

Teniendo esto en mente, la ecuación general 11-9, que da el esfuerzo cortante máximo, se reduce en este problema de flexión y torsión a

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{flexión}}{2}\right)^2 + \tau_{torsión}^2}$$

$$\tau_{máx} = \sqrt{\left(\frac{Mc}{2I}\right)^2 + \left(\frac{Tc}{I_p}\right)^2}$$

Sin embargo, como para una sección transversal circular, $I_p = 2I$, ecuación 8-20, $I_p = \pi d^4/32$, ecuación 6-2, y $c = d/2$, la última expresión se reduce a

$$\tau_{máx} = \frac{16}{\pi d^3}\sqrt{M^2 + T^2}$$

Asignando el esfuerzo cortante permisible a $\tau_{máx}$, se obtiene una fórmula de diseño, basada en la teoría de falla[13] del esfuerzo cortante máximo, para una flecha sometida a flexión y torsión:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi\tau_{perm}}\sqrt{M^2 + T^2}}$$

Esta fórmula puede usarse para seleccionar el diámetro de una flecha sometida simultáneamente a flexión y torsión. En el ejemplo analizado, unos cuantos tanteos deben convencer al lector que $\sqrt{M^2 + T^2}$ es máximo en la rueda dentada C; por consiguiente, la sección crítica está en C. Entonces

$$M^2 + T^2 = (M_{vert})^2 + (M_{horiz})^2 + T^2$$
$$= (6.27/2)^2 + 9.10^2 + 20^2 = 492.\ k^2\text{-in}^2$$
$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{6\pi}\sqrt{492}} = 2.66 \text{ in}$$

Debe usarse una flecha de $2\frac{11}{16}$-in de diámetro, que es un tamaño comercial.

El efecto de la carga de impacto sobre la flecha no se ha tomado en cuenta en el análisis anterior. En algunas máquinas cuya operación implica sacudidas irregulares, esta condición requiere consideración especial. En el esfuerzo permisible supuesto inicialmente se ha considerado probablemente el efecto de las chavetas y la fatiga del material.

Aunque la ecuación 13-3 y ecuaciones similares basadas en otros criterios de falla son ampliamente usadas en la práctica, se advierte al lector ser cuidadoso al aplicarlas.[14] En muchas máquinas, los diámetros de las flechas cambian abruptamente, dando lugar a concentraciones de esfuerzos. En el análisis de esfuerzos, esto requiere del uso de factores de concentración de

[13]Véase la fórmula basada en la teoría de falla por esfuerzo máximo en el problema 13-52.

[14]Para mayores detalles sobre el diseño mecánico, véase A. H. Burr, *Mechanical Analysis and Design* (*Análisis y diseño mecánico*), Nueva York, Elsevier, 1982; A. D. Deutchman, W. J. Michaels y C. E. Wilson, *Machine Design, Theory and Practice* (*Diseño de máquinas, teoría y práctica*), Nueva York, Macmillan, 1975; J. E. Shigley, *Mechanical Engineering Design* (*Diseño en ingeniería mecánica*), 3a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1977; M. F. Spotts, *Design of Machine Elements* (*Diseño de elementos de máquinas*), 6a. ed., Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1985.

Para el diseño en acero, aleaciones de aluminio y estructuras de madera, véanse las referencias en las secciones pertinentes del capítulo 16; y C. G. Salmon y J. E. Johnson, *Steel Structures* (*Estructuras de acero*), 3a. ed., Nueva York, Harper & Row, 1990.

Referencias para el diseño en concreto reforzado están dadas después del ejemplo 8-11; véase también J. G. MacGregor, *Reinforced concrete, mechanics and design* (*Concreto reforzado, mecánica y diseño*), 3a. ed., Upper Saddle River, NJ, Prentice Hall, 1996.

esfuerzos en flexión, que son usualmente diferentes de los de torsión. Por tanto, el problema debe analizarse considerando los esfuerzos reales en la sección crítica. (Véase la figura 13-22.) Entonces, debe usarse un procedimiento apropiado, como el círculo de Mohr de esfuerzos, para determinar el esfuerzo relevante, dependiendo del criterio de fractura seleccionado.

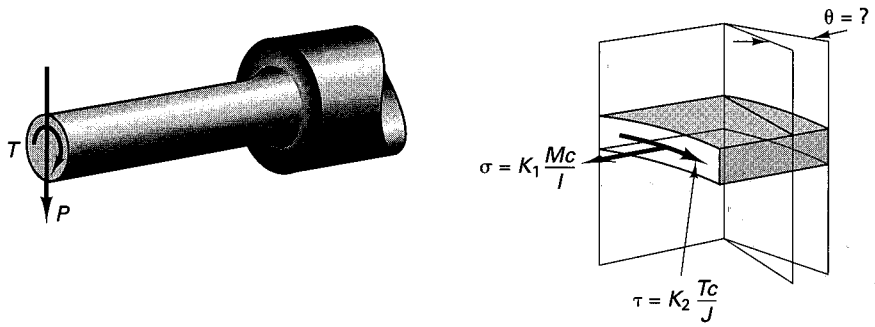


Fig. 13-22 Análisis de una flecha con concentraciones de esfuerzos.

PROBLEMAS

Sección 13-2. Problemas diversos de análisis de esfuerzos

13-1. Un cilindro de concreto probado en posición vertical falló bajo un esfuerzo de compresión de 30 MPa. La falla ocurrió sobre un plano a 30° con la vertical. Sobre un croquis, muestre los esfuerzos normal y cortante que actuaron sobre el plano de falla.

13-2. En una investigación sobre el flujo plástico del plomo, fue necesario controlar el estado de esfuerzo para el elemento de un tubo. En un caso, un tubo largo cilíndrico con extremos cerrados se sometió a presión y simultáneamente a un par de torsión. El tubo tenía 100 mm de diámetro exterior con paredes de 4 mm. ¿Cuáles fueron los esfuerzos principales en la superficie exterior de la pared del cilindro si la presión interna fue de 1.5 MPa y el par de torsión externamente aplicado fue de 200 N · m?

13-3. Un tanque cilíndrico de pared delgada que pesa 100 lb/ft está soportado como se muestra en la figura. Si, además, es sometido a una presión interna de 200 psi, ¿qué estado de esfuerzos se desarrollará en los puntos *A* y *B*? Muestre los resultados sobre elementos aislados. El radio medio del tanque es de 10 in y su espesor es de 0.20 in. Comente sobre la importancia del peso muerto del tanque en los esfuerzos totales.

13-4. Un recipiente cilíndrico a presión y su contenido son izados por cables, como se muestra en la figura. El diámetro medio del cilindro es de 600 mm y el espesor de su pared es de 6 mm. Determine el estado de esfuerzo en los puntos *A* y *B* y muestre los resultados calculados sobre elementos aislados cuando el recipiente está sometido a una presión interna de 0.50 MPa y su masa es de 102 kg/m.

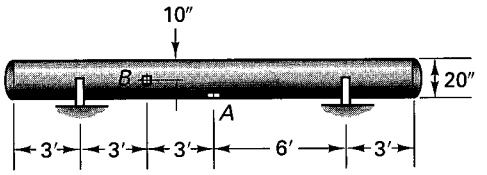


Fig. P13-3

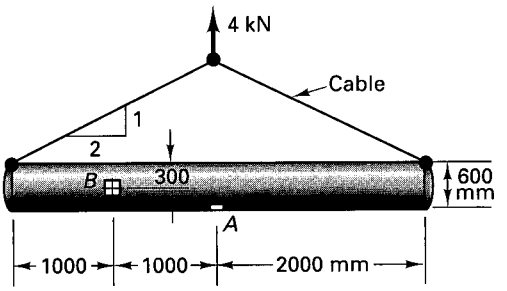


Fig. P13-4

13-5. Un recipiente a presión cilíndrico de 2500 mm de diámetro con paredes de 12 mm de espesor opera a 1.5 MPa de presión interna. Si las placas están soldadas según una espiral helicoidal a 30° (véase la figura), determine los esfuerzos que actúan normal y tangencialmente a la soldadura.

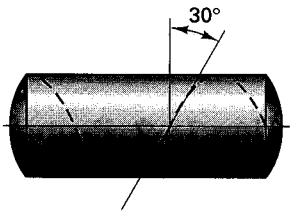


Fig. P13-5

13-6. Un recipiente a presión cilíndrico de pared delgada con radio medio $r = 300$ mm y espesor $t = 6$ mm es izado por dos cables en la posición mostrada en la figura. Si el recipiente tiene una presión interna manométrica de 0.50 MPa y pesa 102 kg/m, determine el estado de esfuerzo en el punto A. Muestre los resultados sobre un elemento aislado apropiadamente orientado.

13-7. Una columna de 45 ft de altura está hecha con un tubo estándar de acero de 12 in de diámetro interior que pesa 49.56 lb/ft. (Véase la Tabla 7 del apéndice.) Si este tubo tiene una presión interna de 600 psi y además está sometido a una carga de viento de 40 lb/ft en toda su altura, ¿cuál es el estado de esfuerzo en el punto A? Muestre claramente sus esfuerzos calculados sobre un elemento aislado; los esfuerzos principales no tienen que determinarse.

13-8. Un recipiente a presión cilíndrico de pared delgada con diámetro medio de 20 in y espesor de 0.25 in está empotrado en un muro, formando un voladizo, como se muestra en la figura. (a) Si se le aplica una presión interna de 250 psi y además una fuerza exterior excéntrica $P = 31.4$ k, ¿qué esfuerzos se tendrán en el punto A? Muestre los resultados sobre un elemento apropiadamente orientado. (b) ¿Qué esfuerzo cortante máximo se desarrolla en el elemento? (*Advertencia*: Los tres círculos principales de Mohr deben examinarse.)

13-9. Un recipiente a presión cilíndrico de pared delgada unido rígidamente a una pared, como se muestra en la figura, está sometido a una presión interna p y a un par de torsión T externamente aplicado. Debido a esas causas combinadas, los esfuerzos sobre el plano a–a son $\sigma_{x'} = 0$ y $\tau_{x'y'} = 10$ MPa. Determine la presión interna p y la magnitud del par T. El diámetro medio del recipiente es de 400 mm y el espesor de la pared es de 6 mm.

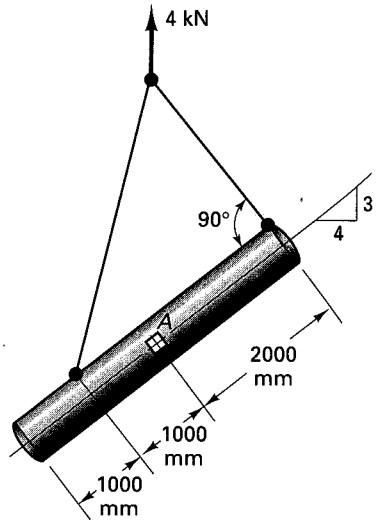


Fig. P13-6

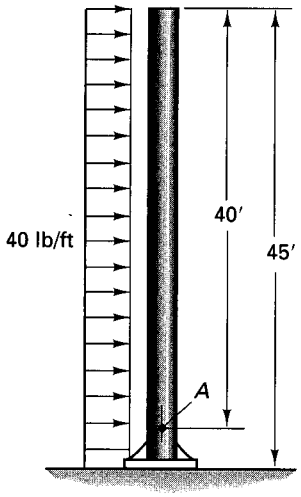


Fig. P13-7

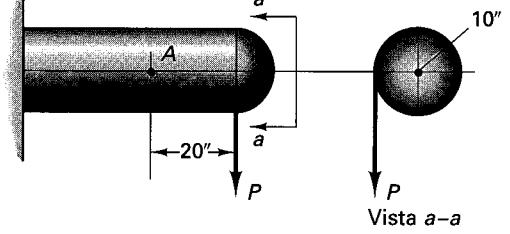


Fig. P13-8

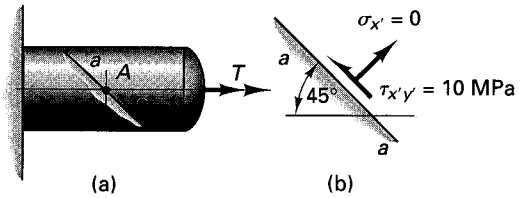


Fig. P13-9

13-10. Un conjunto de tubos de acero inoxidable sin costuras forman parte de un sistema de tubería, dispuestos como se muestra en la figura. Una junta de expansión flexible se inserta en C, que es capaz de resistir esfuerzos de aro, pero no de transmitir fuerzas longitudinales. La tubería tiene 60 mm de diámetro exterior y 2 mm de espesor. Si la presión interna es de 2 MPa, determine el estado de esfuerzo en los puntos A y B. Muestre los resultados sobre elementos infinitesimales vistos desde el exterior. Ninguna distinción entre las dimensiones interiores y exteriores del tubo tiene que hacerse en los cálculos. Todas las dimensiones mostradas en la figura están en milímetros. No se requieren transformaciones de esfuerzos.[1]

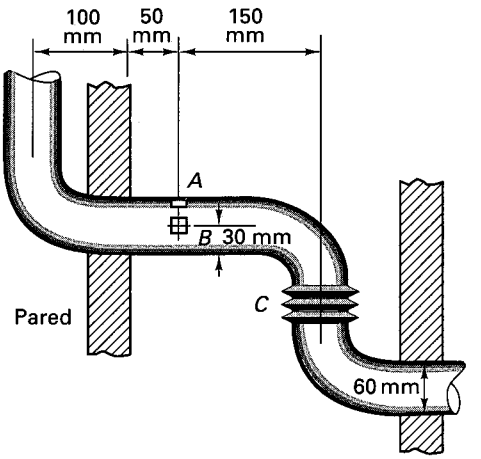


Fig. P13-10

13-11. En el punto A sobre la cara, aguas arriba de una presa, la presión del agua es de -40 kPa, y un esfuerzo de tensión medido sobre la presa, paralelo a esta superficie es de 20 kPa. Calcule los esfuerzos σ_x, σ_y y τ_{xy} en ese punto y muéstrelos sobre un elemento aislado.

13-12. Un malacate soporta una carga de 15 k por medio de un cable, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales en el punto A debidos a esta carga.

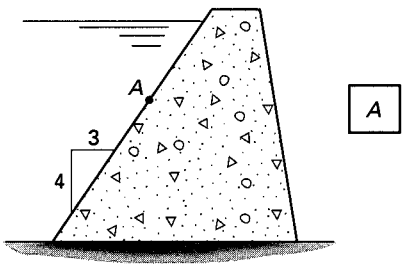


Fig. P13-11

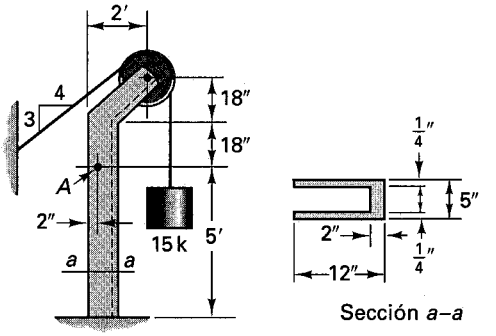


Fig. P13-12

[1]Los datos en el problema son ficticios; sin embargo, una falla mayor ocurrió en una planta petroquímica debido a un descuido en el comportamiento básico de este sistema de tubería. (Cortesía de I. Finnie.)

13-13. Al aplicar una fuerza vertical P, la prensa de palanca ejerce una fuerza de 1000 lb sobre un objeto cilíndrico, como se muestra en la figura. La mandíbula móvil se desliza en una guía que impide su movimiento hacia arriba. (a) Determine la magnitud de la fuerza vertical aplicada P y la componente de fuerza hacia abajo desarrollada en la articulación A; (b) determine los esfuerzos debidos a empuje axial, cortante transversal y momento flexionante que actúan sobre un elemento en el punto C de la sección a–a; (c) dibuje un elemento en el punto C con lados paralelos y perpendiculares al eje del miembro BA y muestre los esfuerzos que actúan sobre el elemento; (d) usando el círculo de Mohr, determine el esfuerzo principal máximo y el esfuerzo cortante máximo en C.

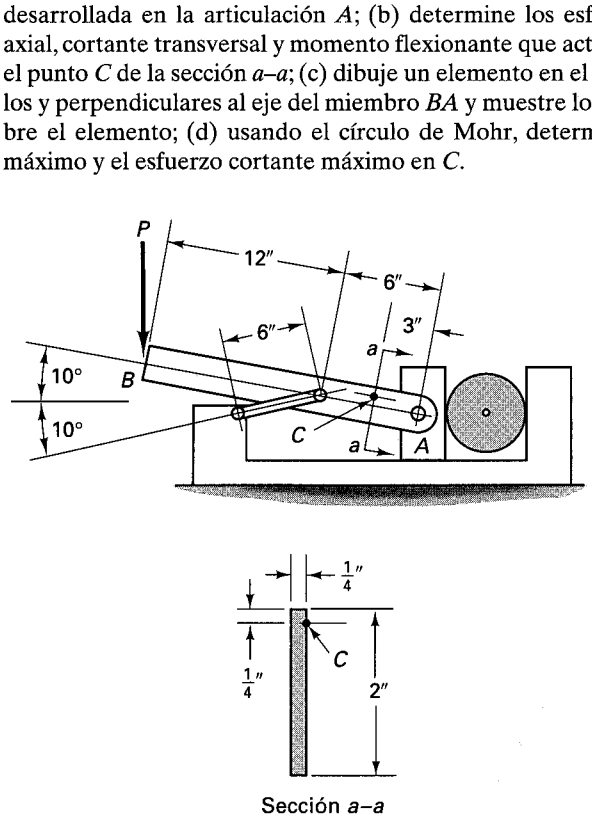


Fig. P13-13

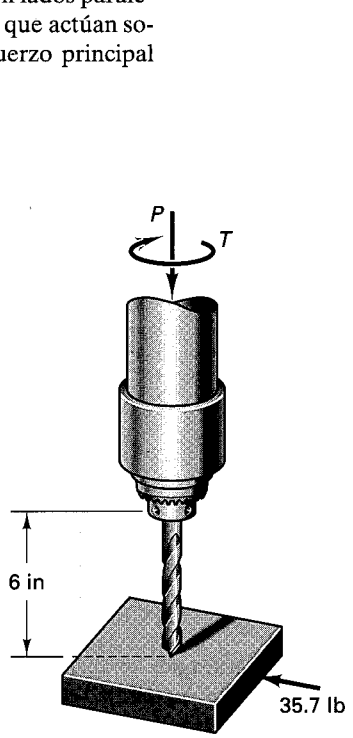


Fig. P13-14

13-14. Una broca de $\frac{1}{2}$-in es insertada en un portabroca, como se muestra en la figura. Durante la operación de taladrado, una fuerza axial $P = 3.92$ k y un par de torsión $T = 10\pi/128$ k-in actúan sobre la broca. Si una fuerza horizontal de 35.7 lb es accidentalmente aplicada a la placa que está siendo taladrada, ¿cuál es la magnitud del esfuerzo principal máximo que se desarrolla en la parte superior de la broca? Determine por inspección el punto críticamente sometido a esfuerzo de la broca.

13-15. Una flecha circular maciza está cargada como se muestra en la figura. En la sección $ACBD$ los esfuerzos debidos a la fuerza de 10 kN, el peso de la flecha y el tambor redondo son los siguientes: esfuerzo de flexión máximo = 40 MN/m^2, es-

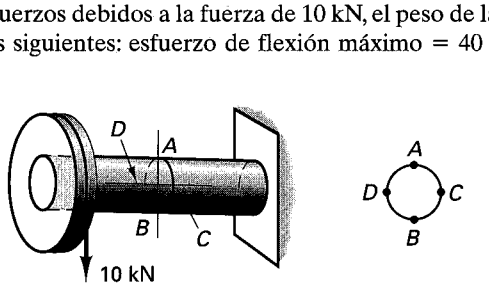


Fig. P13-15

fuerzo torsional máximo = 30 MN/m^2 y el esfuerzo cortante máximo debido a V = 6 MN/m^2. (a) Considere elementos en los puntos A, B, C y D e indique las magnitudes y sentidos de los esfuerzos que actúan sobre ellos. En cada caso, indique desde qué dirección se está observando el elemento. (b) Usando el círculo de Mohr, encuentre los sentidos y magnitudes de los esfuerzos principales y del esfuerzo cortante máximo en el punto A.

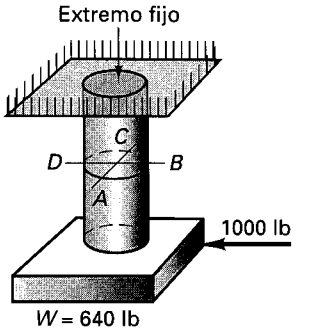


Fig. P13-16

13-16. Una barra circular de 2 in de diámetro con un bloque rectangular unido a su extremo libre está suspendido, como se muestra en la figura. Se aplica también una fuerza horizontal excéntricamente al bloque como se muestra. El análisis de los esfuerzos en la sección $ABCD$ da los siguientes resultados: esfuerzo de flexión máximo = 1000 psi, esfuerzo torsionante máximo = 300 psi, esfuerzo cortante máximo debido a V = 400 psi y esfuerzo axial directo = 200 psi. (a) Fije un elemento en el punto A e indique las magnitudes y sentidos de los esfuerzos que actúan sobre él (el borde superior del elemento debe coincidir con la sección $ABCD$). (b) Usando el círculo de Mohr, encuentre la dirección y magnitud de los esfuerzos cortantes (principales) máximos y de los esfuerzos normales asociados en el punto A.

13-17. Una barra rectangular doblada está sometida a una fuerza inclinada de 3000 N, como se muestra en la figura. La sección transversal de la barra es de 12 × 12 mm. (a) Determine el estado de esfuerzo en el punto A causado por la fuerza aplicada y muestre los resultados sobre un elemento. (b) Encuentre el esfuerzo principal máximo.

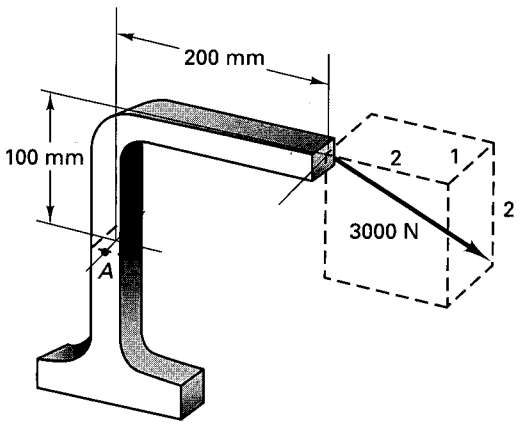


Fig. P13-17

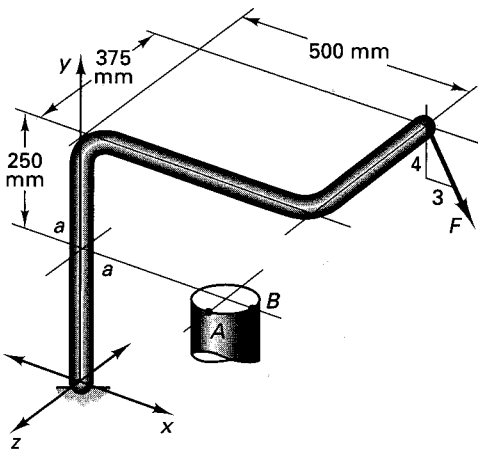


Fig. P13-18

13-18. Una barra de 50 mm de diámetro está sometida en su extremo libre a una fuerza inclinada $F = 225\pi$ N, como se muestra en la figura. (La fuerza F en planta actúa en la dirección del eje x.) Determine las magnitudes y los sentidos de los esfuerzos debidos a F sobre los elementos A y B en la sección a–a. Muestre los resultados sobre elementos claramente relacionados a los puntos sobre la barra. No se requieren los esfuerzos principales.

13-19. Una barra horizontal rectangular de 12 × 12 mm y 100 mm de longitud está unida a un extremo de un soporte rígido. Dos de los lados de la barra forman un ángulo de 30° con la vertical, como se muestra en la figura. Por medio de cierto dispositivo (no mostrado), una fuerza vertical F = 4.45 N se aplica actuando a través

de una esquina de la barra. (Véase la figura.) Calcule el esfuerzo en los puntos A y B causados por la fuerza aplicada F. Ignore las concentraciones de esfuerzos. Muestre los resultados sobre los elementos vistos desde arriba. Las transformaciones de esfuerzos para obtener los esfuerzos principales son opcionales.

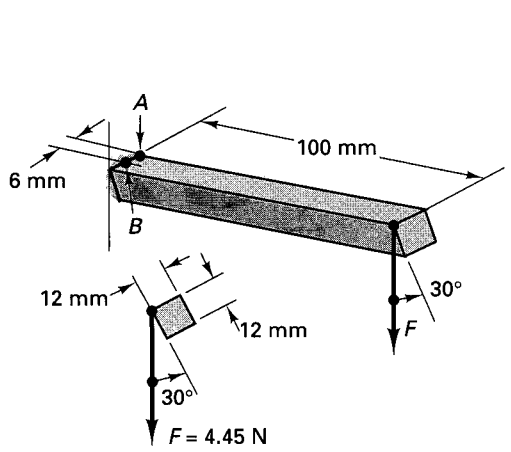


Fig. P13-19

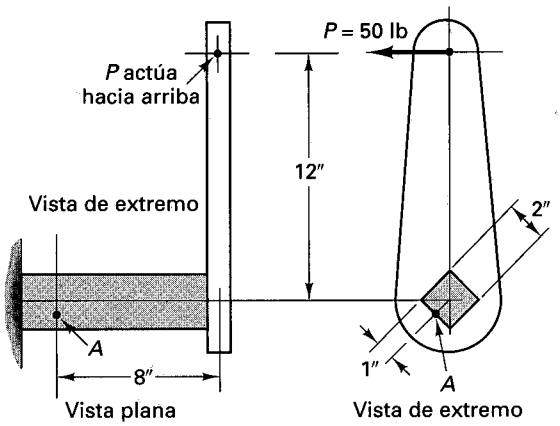


Fig. P13-20

13-20. Una barra cuadrada de 2 × 2 in está unida a un soporte rígido, como se muestra en la figura. Determine los esfuerzos principales en el punto A causados por la fuerza $P = 50$ lb aplicada a la manivela.

13-21. Un letrero de 400 lb está soportado por un tubo de acero estándar de $2\frac{1}{2}$ in, como se muestra en la figura. La fuerza de viento horizontal máxima que actúa so-

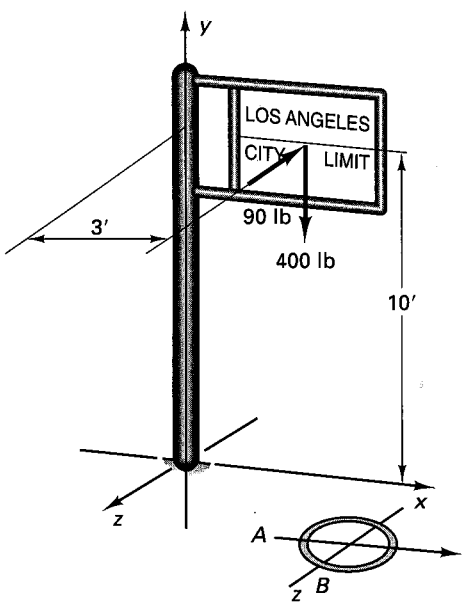


Fig. P13-21

bre este letrero es de 90 lb. Determine el estado de esfuerzo causado por esta carga en los puntos A y B en el extremo empotrado. Los esfuerzos principales no son requeridos. Indique los resultados sobre croquis de elementos del tubo cortados en esos puntos. Esos elementos deben verse desde afuera del tubo.

13-22. Para el arco de tres articulaciones mostrado en la figura, determine los esfuerzos principales a 75 mm por arriba del centroide de la sección transversal en la sección *a–a* debido a la carga vertical aplicada en la mitad izquierda de la estructura. Debido a la gran curvatura, el arco en la sección investigada puede tratarse como una barra recta.

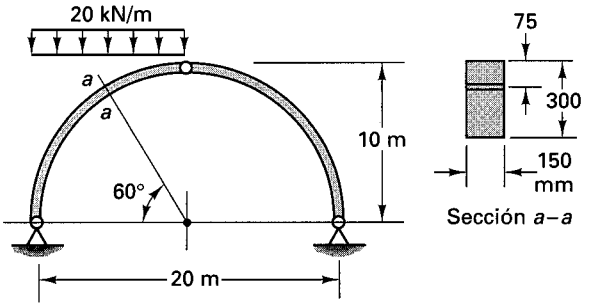


Fig. P13-22

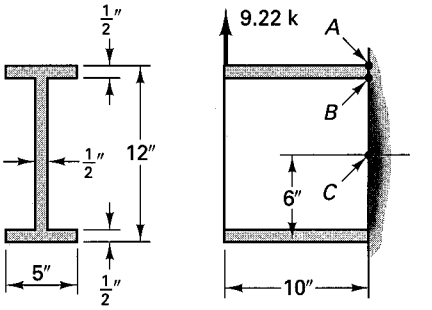


Fig. P13-23

13-23. Una viga corta I en voladizo está cargada como se muestra en la figura. Encuentre los esfuerzos principales y sus direcciones en los puntos A, B y C. El punto B está en el alma, en la unión con el patín. Ignore el peso de la viga y el efecto de las concentraciones de esfuerzos. Use la fórmula exacta para determinar los esfuerzos cortantes.

13-24. El voladizo mostrado en la figura está cargado por una fuerza inclinada P que actúa en el plano de simetría de la sección transversal. (a) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza aplicada P si ésta causa una deformación unitaria axial de 200 μm/m en el punto A? $E = 30 \times 10^6$ psi. (b) ¿Cuál es la deformación unitaria principal máxima en A?

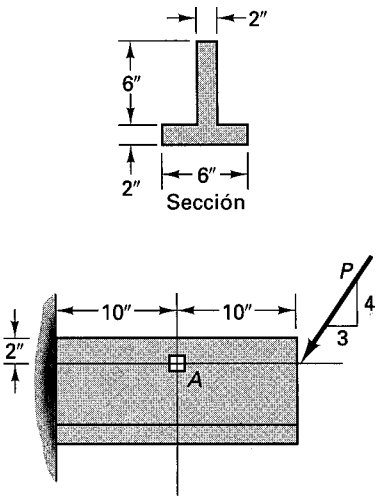


Fig. P13-24

13-25. El esfuerzo cortante principal en el punto A causado por la aplicación de la fuerza P es de 120 psi; véase la figura. ¿Cuál es la magnitud de P?

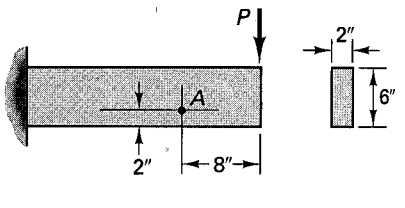


Fig. P13-25

13-26. Una viga simple de 50 × 120 mm salva un claro de 1500 mm y soporta una carga uniformemente distribuida de 80 kN/m, incluido su propio peso. Determine los esfuerzos principales y sus direcciones en los puntos A, B, C, D y E en la sección mostrada en la figura.

13-27. Una viga rectangular de madera de 100 × 400 mm soporta una carga de 40 kN, como se muestra en la figura. El grano de la madera forma un ángulo de 20° con el eje de la viga. Encuentre los esfuerzos cortantes en los puntos A y B a lo largo del grano de la madera debido a la fuerza concentrada aplicada.

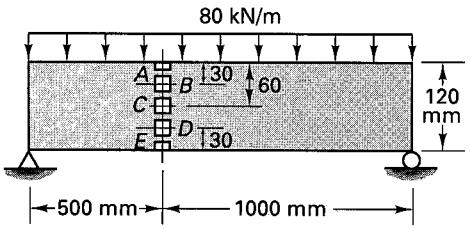


Fig. P13-26

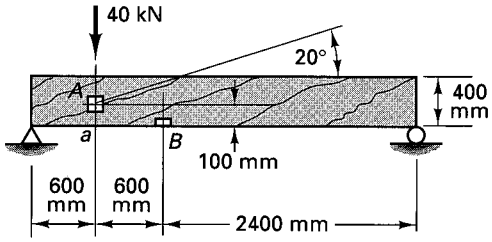


Fig. P13-27

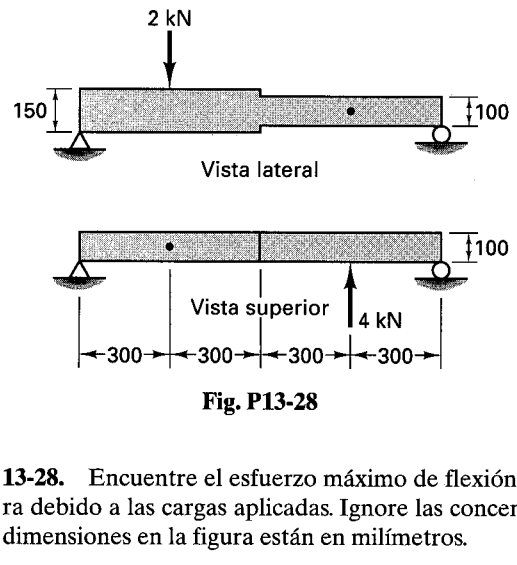


Fig. P13-28

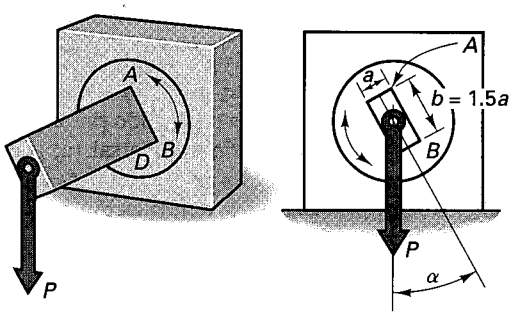


Fig. P13-29

13-28. Encuentre el esfuerzo máximo de flexión para la viga mostrada en la figura debido a las cargas aplicadas. Ignore las concentraciones de esfuerzos. Todas las dimensiones en la figura están en milímetros.

13-29. En un dispositivo mecánico, una barra rectangular horizontal de longitud L está fija en el extremo giratorio y cargada por medio de una correa sostenida por un perno con una fuerza vertical P en su extremo libre, como se muestra en la figura. Encuentre el ángulo α para el cual el esfuerzo normal en A es máximo y localice el eje neutro para la viga en esta posición. Ignore las concentraciones de esfuerzos, que tendrían que ser consideradas en un problema real.

13-30. Una flecha de 50 mm de diámetro es sometida simultáneamente a un par de torsión y a flexión pura. En toda sección de esta flecha, el esfuerzo principal máximo causado por la carga aplicada es +160 MPa y simultáneamente, el esfuerzo longitudinal de tensión máximo es +120 MPa. Determine el momento flexionante y el par de torsión aplicados.

13-31. Compare la capacidad por momento de un ángulo de acero de 102 × 102 × 12.7 mm en las dos posiciones diferentes mostradas en la figura. En ambos casos, la carga vertical aplicada actúa por el centro de cortante. (*Sugerencia*: La Tabla 6B da el radio de giro mínimo r para la sección transversal. Por tanto, según la ecuación 16-19a, $I_{mín} = Ar^2_{mín}$. Alternativamente, $I_{mín}$ puede calcularse directamente considerando que el ángulo consiste en dos placas.)

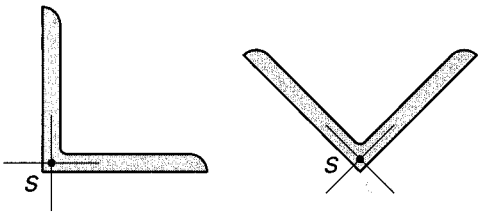


Fig. P13-31

13-32. Una alarma contra fuego está formada por un alambre de cobre como elemento sensitivo, tal como se muestra en la figura. Si la holgura es de 2 mm cuando no hay tensión en el alambre, encuentre el número de vueltas que deben darse al tornillo para accionar la alarma de manera que los contactos se abran para un aumento de temperatura de 40°C. Para la barra de bronce, $EI = 20\ \text{N} \cdot \text{m}^2$ y la constante de resorte $k = 20$ N/mm. El alambre de cobre tiene 4.5 m de longitud, $A = 6\ \text{mm}^2$, $E = 100$ GPa y $\alpha = 20 \times 10^{-6}$/°C. El tornillo de ajuste tiene una rosca por milímetro.

13-33. Dos soleras metálicas de igual espesor pero de diferente material están unidas entre sí y apoyadas en un extremo para actuar como voladizo, como se muestra en la figura. Determine la deflexión del borde libre causada por un cambio de temperatura de δT. Sea α_1 el coeficiente de expansión de una barra y α_2 el de la otra. Suponga que los módulos elásticos de ambos materiales son iguales. Tales elementos bimetálicos son ampliamente usados en dispositivos para el control de temperatura. (*Sugerencia*: Considere que una fuerza longitudinal y un momento existen en cada solera. Las deformaciones unitarias en la interfaz son las mismas en los dos materiales.)

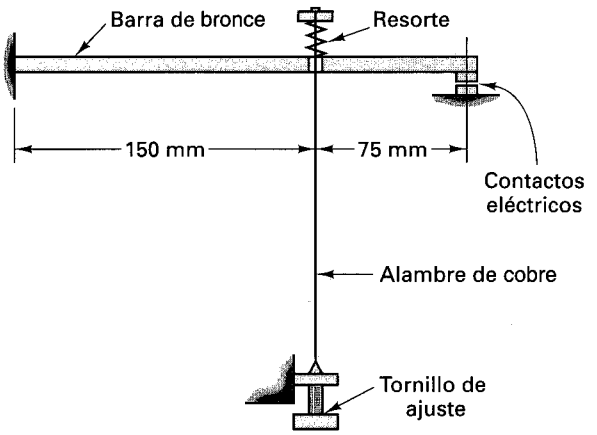


Fig. P13-32

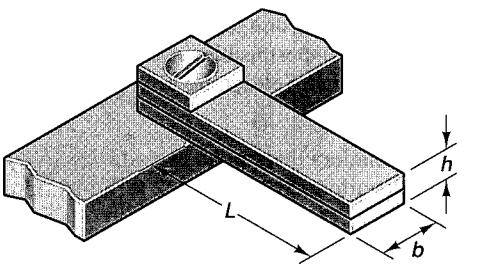


Fig. P13-33

Secciones 13-5 y 13-6

13-34. Seleccione el diámetro de una flecha de acero circular maciza que debe transmitir un par de torsión de 6 kN · m y un momento flexionante de 4 kN · m si el esfuerzo cortante máximo permisible es de 80 MPa.

13-35. Para la condición de carga y el esfuerzo cortante permisible dados en el problema anterior, determine el diámetro de una flecha de acero circular hueca tal que la razón del diámetro interior al exterior sea de 0.80.

Sección 13-8

13-36. Una viga de madera de pino Douglas de sección transversal rectangular está cargada como se muestra en la figura. ¿Cuál es el tamaño cepillado estándar requerido para el miembro y cuáles son los tamaños mínimos de las placas de apoyo bajo las fuerzas concentradas, así como las longitudes mínimas de viga en los soportes? En los cálculos, considere el peso de la viga. El esfuerzo permisible en flexión es de 1250 psi; en cortante es de 95 psi y en compresión perpendicular al grano es de 625 psi. Use la Tabla 9 para determinar las propiedades reales de las secciones de la madera.

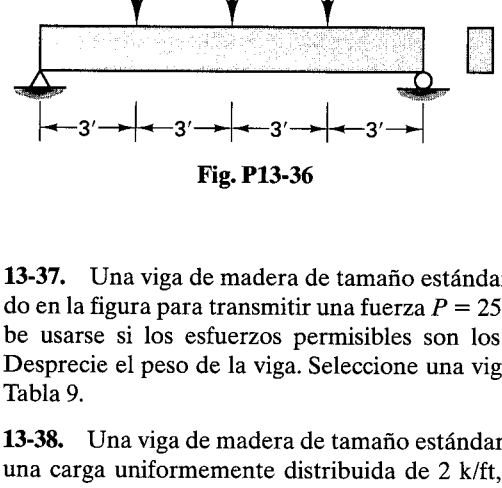


Fig. P13-36

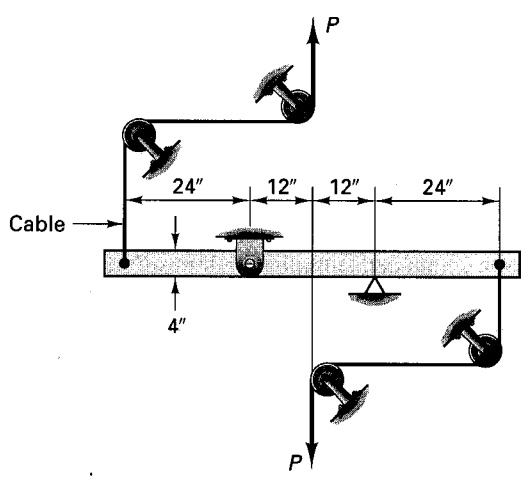


Fig. P13-37

13-37. Una viga de madera de tamaño estándar se usará en el dispositivo mostrado en la figura para transmitir una fuerza $P = 250$ lb. ¿Qué tamaño de miembro debe usarse si los esfuerzos permisibles son los dados en el problema anterior? Desprecie el peso de la viga. Seleccione una viga de ancho nominal de 3 in; use la Tabla 9.

13-38. Una viga de madera de tamaño estándar de 16 ft de longitud debe soportar una carga uniformemente distribuida de 2 k/ft, incluido su propio peso, como se muestra en la figura. (a) Determine la longitud a tal que el momento flexionante máximo entre los soportes sea numéricamente igual al momento sobre el soporte derecho. (b) Seleccione el tamaño de viga requerido y calcule la longitud mínima de los soportes. Use los esfuerzos permisibles dados en el problema 13-36.

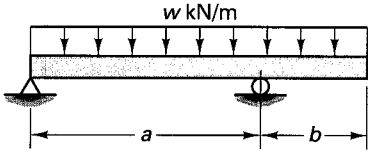


Fig. P13-38

13-39. Una viga de madera de 100 × 150 mm (tamaños cepillados) va a ser cargada con dos cargas iguales P, como se muestra en la figura. Determine la posición de esas cargas y su magnitudes cuando se alcance justo un esfuerzo de flexión de 10 MPa y un esfuerzo cortante de 2.5 MPa. Desprecie el peso de la viga.

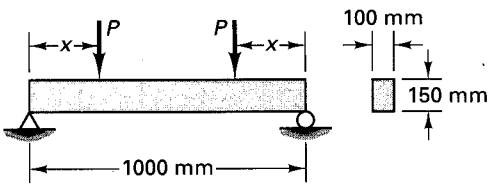


Fig. P13-39

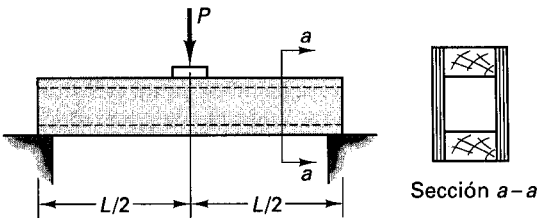


Fig. P13-40

13-40. Una viga en caja de 300 mm de peralte se fabrica pegando dos tableros de madera contrachapada de 75 × 200 mm a dos tablones de madera para formar la sección transversal mostrada en la figura. Si la viga se usa para soportar una fuerza concentrada en el centro del claro (véase la figura), (a) con base en la capacidad por cortante de la sección, ¿cuál puede ser la magnitud de la fuerza aplicada P?, (b) ¿de qué longitud puede ser el claro?, y (c) ¿qué áreas de apoyo deben proporcionarse bajo las cargas concentradas? Ignore el peso de la viga. Los esfuerzos permisibles son 8 MPa en flexión, 800 kPa en cortante para la madera contrachapada, 400 kPa en cortante para las juntas pegadas y 4.3 MPa en compresión perpendicular al grano.

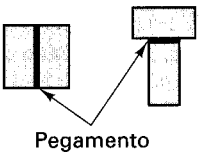


Fig. P13-41

13-41. Una viga de plástico va a fabricarse con dos piezas de 20 × 60 mm para salvar un claro de 600 mm y soportar una carga w uniformemente distribuida e intermitentemente aplicada. Las piezas pueden disponerse de dos maneras alternativas, como se muestra en la figura. Los esfuerzos permisibles son de 4 MPa en flexión, 600 kPa por cortante en el plástico y de 400 kPa por cortante en el pegamento. ¿Cuál arreglo de las piezas debe usarse y qué carga w puede aplicarse?

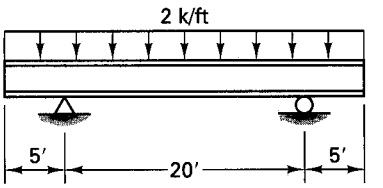


Fig. P13-43

13-42. Considere dos diseños alternativos para una viga de 24 ft de claro que debe soportar una carga uniformemente distribuida de 1 k/ft. Ambas vigas estarán simplemente apoyadas. Una de ellas es de acero y la otra de madera. Los esfuerzos permisibles para el acero son de 24 ksi en flexión y de 14.4 ksi en cortante; para la madera son, respectivamente, de 1250 y de 95 psi. (a) Encuentre el tamaño requerido para cada viga con base en los criterios dados de resistencia. (En un diseño completo, las deflexiones de la viga son también generalmente determinadas.) Considere en los cálculos los pesos propios de las vigas; véanse la Tablas 4B y 9 del apéndice. (b) ¿Qué porcentaje de la carga total es debido al peso de la viga en cada caso?

13-43. Seleccione la sección S o W más ligera para una viga con voladizos que debe soportar una carga uniformemente distribuida de 2 k/ft, como se muestra en la figura. La carga especificada incluye el peso de la viga. Los esfuerzos permisibles son de 24 ksi en flexión y de 14.4 ksi en cortante.

13-44. Se muestra en la figura una parte de la planta estructural del piso de un edificio de oficinas. Largueros de madera de 12 ft de claro a cada 16 ft soportan por arriba un piso de madera y por abajo un plafón de yeso. Suponga que la carga viva generada por los ocupantes en cualquier zona es de 75 lb por pie cuadrado de área de piso. Suponga también que la carga muerta debida al piso, largueros y plafón es

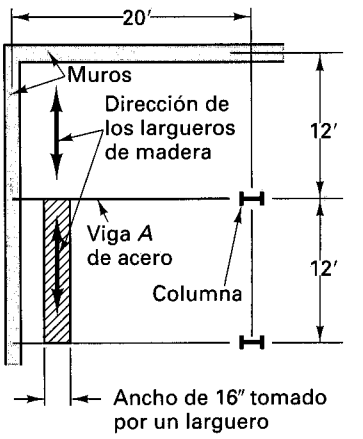


Fig. P13-44

de 25 lb por pie cuadrado de área de piso. (a) Determine el peralte requerido para largueros estándar comerciales nominalmente de 2 in de ancho. Para la madera, el esfuerzo permisible de flexión es de 1200 psi y el esfuerzo cortante permisible es de 100 psi. (b) Seleccione el tamaño requerido para la viga A de acero. Como los largueros que transmiten su carga a esta viga están a poca separación entre sí, suponga que la viga recibe una carga uniformemente distribuida. Los esfuerzos permisibles para el acero son de 24 ksi y de 14.4 ksi por flexión y cortante, respectivamente. Escoja un perfil W o un perfil S, el que sea más ligero. Ignore el ancho de la columna.

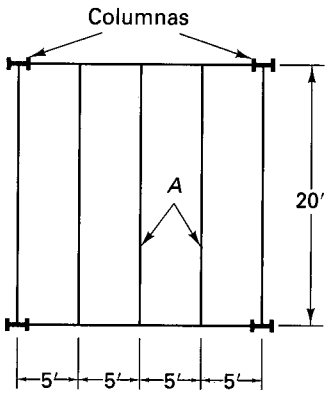


Fig. P13-45

13-45. Una crujía del piso de un casa habitación está estructurada como se muestra en la figura. Determine el tamaño requerido de peso mínimo para la viga A de acero. Suponga que la carga viva es de 75 lb/ft^2 de área de piso. Suponga además que el peso del piso de madera, de la losa de concreto estructural, del cielo raso, de las vigas seleccionadas, etc., es también de aproximadamente 75 lb/ft^2 de área de piso (carga muerta). Use los esfuerzos permisibles dados en la parte (b) del problema 13-44.

13-46. Un carro de cuatro ruedas que se mueve sobre rieles va a usarse en servicio industrial ligero. Cuando está cargado, se aplica una fuerza de 10 kN a cada chumacera. Si las chumaceras están localizadas con respecto a los rieles como se indica en la figura, ¿qué tamaño de eje redondo deberá usarse? Suponga que el esfuerzo permisible por flexión es de 80 MPa y que el esfuerzo cortante permisible es de 40 MPa.

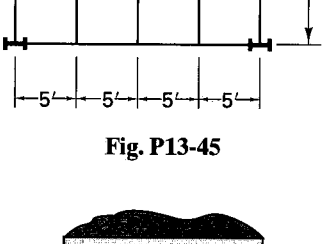


Fig. P13-46

13-47. Una viga estándar de acero (perfil S) sirve como riel para una grúa viajera de 4 toneladas de capacidad; véase la figura. Determine el tamaño requerido para la viga y la fuerza máxima en el colgante. Localice la posición de la grúa de manera que ésta cause esfuerzos máximos en cada condición. Suponga una conexión articulada en la pared e ignore el peso de la viga en los cálculos. El esfuerzo permisible en flexión es de 16 ksi y en cortante de 9.6 ksi.

13-48. Una viga laminada de madera pegada soporta un riel y está cargada por un lado de un carro de cuatro ruedas, como se muestra en la figura. La viga está hecha con tablones laminados de 40 × 100 mm. (a) Sitúe el carro de manera que se genere el momento flexionante máximo en la viga. (b) Sitúe el carro de manera que se genere la fuerza cortante máxima en la viga. (c) Determine el número necesario de tablones laminados. Los esfuerzos permisibles son 14 MPa en flexión y 1 MPa en cortante. En los cálculos ignore el peso de la viga. (*Sugerencia*: Sitúe la rueda izquierda del carro a una distancia x del soporte izquierdo y escriba una expresión para el momento flexionante. Haga igual a cero la derivada de esta expresión para determinar la posición del carro para tener el momento flexionante máximo.)

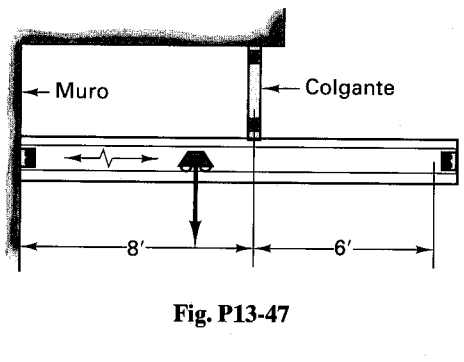


Fig. P13-47

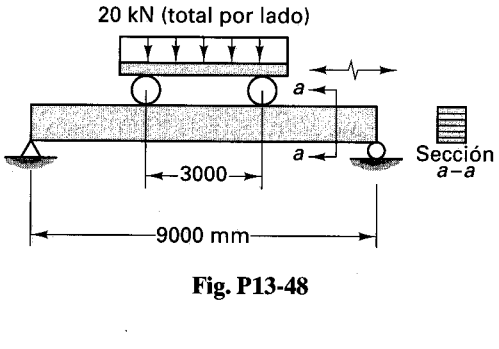


Fig. P13-48

Sección 13-9

13-49. Determine la elevación y planta de una viga en voladizo con esfuerzo de flexión uniforme y sección transversal circular para que resista una fuerza P concentrada en su extremo libre. Desprecie el peso de la viga.

13-50. En muchos problemas de diseño en la ingeniería es muy difícil determinar las magnitudes de las cargas que actuarán sobre una estructura o una parte de máquina. El desempeño satisfactorio en una instalación existente puede proporcionar la base para una extrapolación. Tomando esto en cuenta suponga que cierto letrero, como el mostrado en la figura, ha funcionado satisfactoriamente sobre un tubo estándar de acero de 4 in cuando su centroide está a 10 ft sobre el terreno. ¿Cuál debe ser el tamaño del tubo si el letrero se coloca a 30 ft sobre el terreno? Suponga que la presión del viento sobre el letrero a la mayor altura es 50% mayor que en la instalación original. Varíe el tamaño del tubo a lo largo de su longitud según se requiera; sin embargo, por facilidad de fabricación, los segmentos sucesivos de tubo deben ajustarse entre sí. Al ordenar los segmentos de tubo, considere también el aspecto estético. Por simplicidad de los cálculos, desprecie el peso de los tubos y la presión del viento sobre éstos.

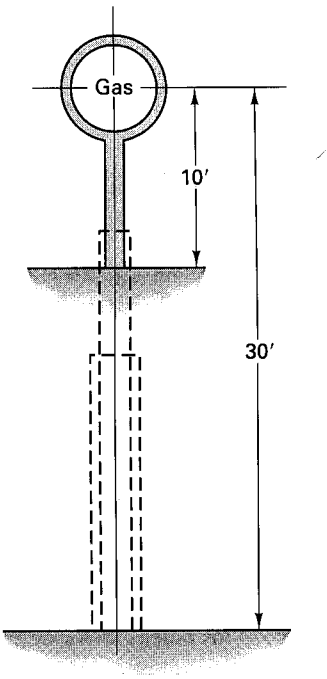


Fig. P13-50

13-51. Una viga W 310 × 97 tiene dos cubreplacas de 200 × 100 mm, como se muestra en la figura 13-19(a). Si el claro es de 5 m, (a) ¿qué fuerza concentrada P puede aplicarse a la viga y dónde deben recortarse las cubreplacas? Desprecie el peso de la viga y suponga que la sección de la viga y las cubreplacas están apropiadamente interconectadas. Note que las cubreplacas usualmente se extienden unos pocos milímetros más allá del punto teórico de recorte. (b) Obtenga una solución si, en vez de P, se aplica una carga uniformemente distribuida. Suponga que el esfuerzo de flexión permisible es de 160 MPa en ambos casos.

Sección 13-10

13-52. (a) Demuestre que el esfuerzo principal mayor para una flecha circular sometida simultáneamente a un par de torsión y a un momento flexionante es

$$\sigma_1 = (c/J)(M + \sqrt{M^2 + T^2})$$

(b) Demuestre que la fórmula de diseño para flechas, con base en la teoría del esfuerzo máximo, es

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi\sigma_{\text{perm}}}(M + \sqrt{M^2 + T^2})}$$

13-53. En una sección crítica, una flecha circular maciza transmite un par de torsión de 40 kN · m y un momento flexionante de 10 kN · m. Determine el tamaño de la flecha requerida para que el esfuerzo cortante máximo no pase de 50 MPa.

13-54. Resuelva el problema anterior, suponiendo que $\sigma_{yp} = 100$ MPa y el factor de seguridad es de 2 con el criterio de fluencia de von Mises dado por la ecuación 12-12.

13-55. La flecha principal de un elevador inclinado de cangilones está colocada como se muestra en la figura. La flecha es impulsada en A a 11 rpm y requiere 45 kW para su operación continua. Suponiendo que se usa la mitad de la potencia entregada en cada rueda dentada, determine el tamaño de la flecha requerida de manera que el esfuerzo cortante máximo no exceda de 40 MPa. El esfuerzo asignado toma en cuenta los chaveteros.

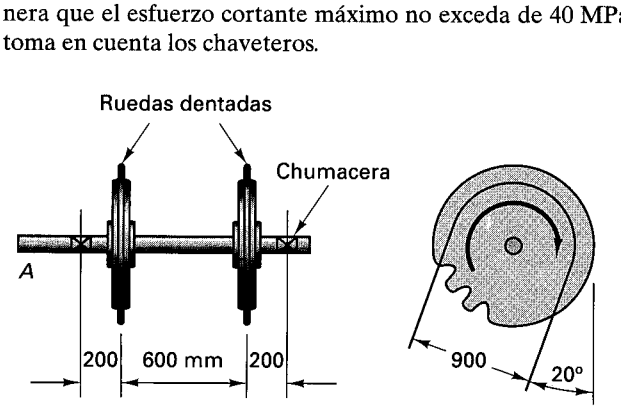


Fig. P13-55

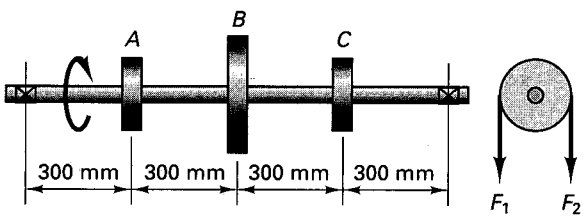


Fig. P13-56

13-56. En la figura se muestra una flecha con poleas. Las chumaceras en los extremos son autoalineantes (es decir, no introducen momentos en los soportes de la flecha). La polea B es la impulsora. Las poleas A y C son las impulsadas y toman 900 kN · mm y 300 kN · mm de par de torsión, respectivamente. La resultante de las tensiones en cada polea es de 1.80 kN actuando hacia abajo. Determine el tamaño requerido para la flecha de manera que el esfuerzo cortante principal no exceda de 40 MPa.

13-57. Dos poleas de 4π de radio están unidas a una flecha sólida de 2 in de diámetro, que está soportada por chumaceras, como se muestra en la figura. Si el esfuerzo cortante principal máximo está limitado a 6 ksi, ¿cuál es la magnitud máxima posible de las fuerzas F? El esfuerzo cortante directo causado por V no tiene que ser considerado.

13-58. Sobre una flecha de baja velocidad actúa una carga P cuya aplicación excéntrica es causada por una fuerza que se desarrolla entre los engranes. Determine la magnitud permisible de la fuerza P con base en la teoría del esfuerzo cortante máximo si $\tau_{perm} = 45$ MPa. El pequeño diámetro de la flecha en voladizo es de 75 mm. Considere que la sección crítica está donde la flecha cambia de diámetro, que

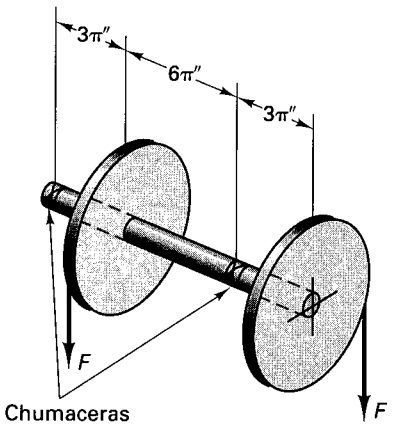


Fig. P13-57

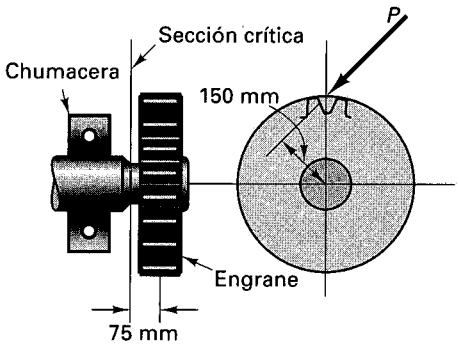


Fig. P13-58

$M = 0.3P$ N · m y $T = 0.6P$ N · m. Note que como el tamaño del diámetro cambia abruptamente, deben considerarse los siguientes factores de concentración de esfuerzos: $K_1 = 1.6$ en flexión y $K_2 = 1.2$ en torsión.

13-59. Una flecha impulsa dos poleas según se muestra en la figura. Las tensiones en las bandas son conocidas. Determine el tamaño requerido para la flecha. Suponga que $\tau_{perm} = 6000$ psi para flechas con chaveteros. Como la flecha operará bajo condiciones de carga aplicada repentinamente, multiplique las cargas dadas por un factor de impacto de 1 1/2.

13-60. Una máquina que impregna un tejido con hule, como en la fabricación de neumáticos, lo lleva a cabo presionando hule caliente sobre el tejido entre potentes cilindros rotatorios. Este proceso se llama calandrado. Un cilindro típico con dimensiones aproximadas se muestra en la figura. Los extremos de los cilindros están soportados por apoyos de rodillo autoalineantes. (a) Estime la presión que puede permitirse que se desarrolle entre los cilindros como una línea de carga p durante el paso del tejido. En los cálculos, ignore el efecto del tamaño reducido de los cilindros en sus extremos y asigne un esfuerzo permisible para el acero usando la curva S-N en la figura 2-26 para 10^7 ciclos con un factor de seguridad de 2.5. Considere que los soportes transmiten fuerzas concentradas. (b) Con base en (a), diseñe el tamaño reducido de los extremos, incluyendo la selección del filete en la transición del rodillo. Si es necesario, suponga que el esfuerzo cortante permisible es $\tau_{perm} = \sigma_{perm}/2$. (*Nota:* En un diseño real, la deflexión de los cilindros cargados debe también ser considerada.)

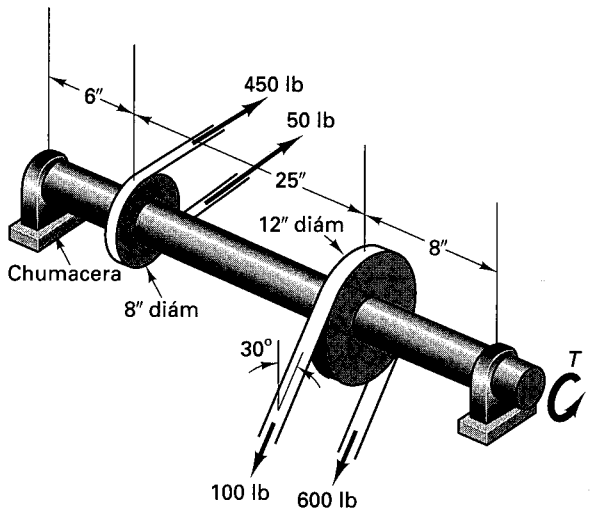


Fig. P13-59

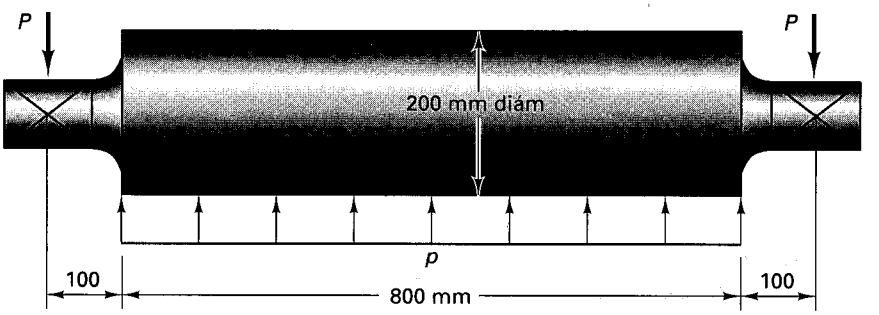


Fig. P13-60

14

Deflexiones en vigas por integración directa

14-1. Introducción

El eje de una viga se desvía de su posición inicial bajo la acción de las fuerzas aplicadas. En muchos casos prácticos se buscan los valores exactos de esas deflexiones en las vigas: Los elementos de máquinas deben ser suficientemente rígidos para prevenir desalineamientos y para mantener la exactitud dimensional bajo carga; en edificios, las vigas de piso no deben deflexionarse excesivamente para evitar los indeseables efectos sicológicos de los pisos flexibles en los ocupantes y para minimizar o prevenir la ruptura de los materiales frágiles de los acabados; igualmente, la información sobre las características de deformación en los miembros es esencial en el estudio de vibraciones de máquinas así como de estructuras estacionarias y móviles. Las deflexiones también se usan en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

En este capítulo se deduce la ecuación diferencial gobernante para la deflexión de vigas y se identifican los diferentes tipos de condiciones de frontera. Siguen varios ejemplos ilustrativos para diferentes tipos de carga y condiciones de frontera, incluyendo vigas estáticamente indeterminadas (que no presentan dificultades especiales al usarse este enfoque matemático). Se proporciona una sección sobre la aplicación de las funciones de singularidad para las soluciones simbólicas de ecuaciones diferenciales con

funciones discontinuas de carga a lo largo del claro. Se presentan también métodos para resolver problemas por superposición así como el cálculo de deflexiones por flexión asimétrica.

Se presenta brevemente un método para calcular deflexiones en vigas y el efecto de las cargas de impacto. El capítulo concluye con un análisis de la deflexión inelástica de vigas. Esos resultados son esenciales para tratar los estados límite por colapso plástico que se verán en el capítulo 20.

14-2. Relación momento-curvatura

Las deflexiones de vigas debido a flexión se determinan a partir de las deformaciones que tienen lugar a lo largo del claro. Ellas se basan en la hipótesis cinemática que establece que durante la flexión las secciones planas en toda la viga permanecen planas. Esta hipótesis fue primero presentada en la sección 8-2 al deducir la fórmula de la flexión para vigas con secciones transversales simétricas, y se amplió en la sección 9-8 a vigas de sección transversal arbitraria para flexión respecto a un eje principal o respecto a ambos ejes. Por ahora supondremos que la flexión tiene lugar sólo en relación con uno de los ejes principales de la sección transversal. Tal caso se ilustra en la figura 14-1, donde se supone además que el radio de curvatura ρ de la *curva elástica* puede variar a lo largo del claro. *Excepto por una ligera modificación de carácter general, la deducción que sigue conduce a los mismos resultados encontrados antes en la sección 8-2.* Las deflexiones debidas al cortante no serán consideradas en esta deducción; esto se tratará en el ejemplo 14-12 de la Sección 14-11.

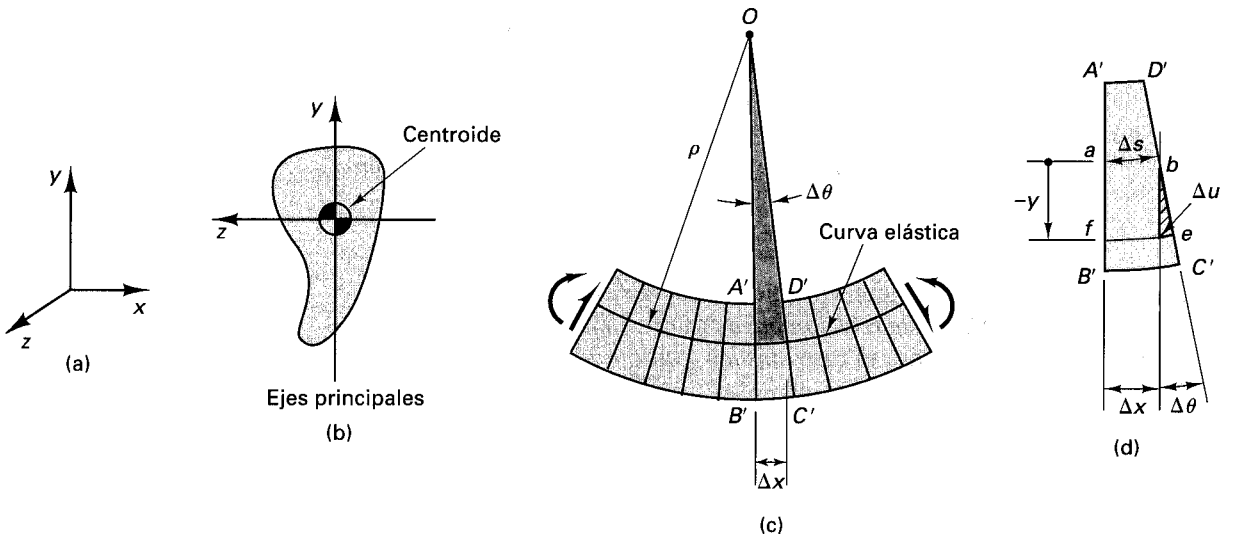


Fig. 14-1 Deformación de una viga en flexión.

El centro de curvatura O para la curva elástica para cualquier elemento puede encontrarse extendiendo hasta su intersección dos secciones adyacentes cualquiera, como la $A'B'$ y $D'C'$. En la vista amplificada del elemento $A'B'C'D'$ en la figura 14-1(d), puede verse que en una viga flexionada, el ángulo incluido entre dos secciones adyacentes es $\Delta\theta$. Si la distancia y desde la superficie neutra a las fibras deformadas se mide en la manera usual, o sea positiva hacia arriba, la deformación Δu de cualquier fibra puede expresarse como

$$\Delta u = -y\,\Delta\theta \tag{14-1}$$

Para valores negativos de las y esto da un alargamiento, lo que es consistente con la deformación mostrada en la figura.

Las fibras que se encuentran en la superficie neutra curva de la viga deformada, caracterizadas en la figura 14-1(d) por la fibra ab, no están deformadas en absoluto. Por tanto, la longitud de arco Δs corresponde a la longitud inicial de todas las fibras entre las secciones $A'B'$ y $D'C'$. Teniendo esto en cuenta, al dividir la ecuación 14-1 entre Δs, se pueden formar las siguientes relaciones:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = -y\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad \text{o} \quad \frac{du}{ds} = -y\frac{d\theta}{ds} \tag{14-2}$$

Se puede ver que du/ds es la deformación unitaria normal en una fibra de la viga a una distancia y del eje neutro. Por tanto,

$$\frac{du}{ds} = \varepsilon \tag{14-3}$$

El término $d\theta/ds$ en la ecuación 14-2 tiene un claro significado geométrico. Con ayuda de la figura 14-1(c), se ve que, como $\Delta s = \rho\Delta\theta$,

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \kappa \tag{14-4}$$

que es la definición de *curvatura*[1] κ introducida antes en la ecuación 8-1.

Con base en esto, al sustituir las ecuaciones 14-3 y 14-4 en la ecuación 14-2, puede expresarse la relación fundamental entre la curvatura de la curva elástica y la deformación unitaria normal como

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\varepsilon}{y}} \tag{14-5}$$

Es importante notar que como ninguna propiedad del material se usó en la obtención de la ecuación 14-5, *esta relación puede usarse en problemas inelásticos así como en elásticos*. Para el caso *elástico*, como $\varepsilon = \varepsilon_x = \sigma_x/E$ y $\sigma_x = -My/I$,

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}} \tag{14-6}$$

[1]Note que θ y s deben crecer en la misma dirección.

Esta ecuación relaciona el momento flexionante M en una sección dada de un viga elástica con momento de inercia I respecto al eje neutro con la curvatura $1/\rho$ de la curva elástica.

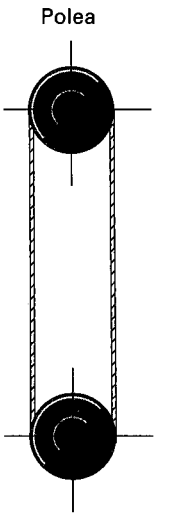


Fig. 14-2

Ejemplo 14-1

Para cortar metales, una sierra de banda de 15 mm de ancho y 0.60 mm de espesor corre sobre dos poleas de 400 mm de diámetro, como se muestra en la figura 14-2. ¿Qué esfuerzo flexionante máximo se desarrolla en la sierra al pasar sobre una polea? Considere $E = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

En esta aplicación, el material debe comportarse elásticamente. Cuando la hoja delgada de la sierra pasa sobre la polea, se conforma al radio de ésta; por consiguiente, $\rho \approx 200$ mm.

Usando la ecuación 8-11, $\sigma = -My/I$, junto con la ecuación 14-6 y después de algunas simplificaciones menores, se obtiene una útil relación:

$$\sigma = -\frac{Ey}{\rho} \tag{14-7}$$

Con $y = \pm c$, el esfuerzo de flexión máximo en la sierra es

$$\sigma_{máx} = \frac{Ec}{\rho} = \frac{200 \times 10^3 \times 0.30}{200} = 300 \text{ MPa}$$

El alto esfuerzo desarrollado en la sierra de banda requiere materiales de alta resistencia para esta aplicación.

14-3. Ecuación diferencial gobernante

En textos sobre geometría analítica se muestra que en coordenadas cartesianas, la curvatura de una línea se define como

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} \tag{14-8}$$

donde x y v son las coordenadas de un punto sobre una curva. Para el problema que estamos tratando, la distancia x localiza un punto sobre la curva elástica de una viga deflexionada y v da la deflexión del mismo punto con respecto a su posición inicial.

Si la ecuación 14-8 se sustituye en la ecuación 14-6 se obtiene la ecuación diferencial exacta para la curva elástica. En general, la solución de una ecuación como esa es muy difícil de encontrar. Sin embargo, como las

deflexiones toleradas en la mayoría de las estructuras son muy pequeñas, la pendiente dv/dx de la curva elástica es también muy pequeña. Por tanto, el cuadrado de la pendiente v' es una cantidad ignorable en comparación con la unidad y la ecuación 14-8 se simplifica a

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2} \tag{14-9}$$

Esta simplificación elimina la *no linealidad geométrica* del problema, y la ecuación diferencial gobernante para deflexiones pequeñas, usando la ecuación 14-6, es

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}} \tag{14-10}$$

donde se entiende que $M = M_z$ e $I = I_z$.

Note que en la ecuación 14-10 se emplea el sistema coordenado xyz para localizar los puntos materiales en una viga para calcular el momento de inercia I. Por otra parte, en el problema en un plano, es el sistema xv de ejes el que se usa para localizar puntos sobre la curva elástica.

La dirección positiva del eje v se toma en el mismo sentido que la del eje y positivo y la de la dirección positiva de la carga aplicada q, figura 14-3. Note especialmente que si la pendiente positiva dv/dx de la curva elástica aumenta al crecer x, la curvatura $1/\rho \approx d^2v/dx^2$ es positiva. Este sentido de la curvatura concuerda con la curvatura inducida por los momentos positivos M aplicados. Por esta razón, los signos son positivos en ambos lados de la ecuación 14-10.[3]

[2]En algunos textos, la dirección positiva para la deflexión v se toma hacia abajo con el eje x dirigido hacia la derecha. Para tal selección de coordenadas, la curvatura positiva es cóncava hacia abajo, figura 9-19(b). Sin embargo, si se retiene el sentido usual para los momentos positivos, figura 9-19(a), la correspondiente curvatura de la viga flexionada es cóncava hacia arriba. Por tanto, como la curvatura inducida por momentos positivos M es opuesta a la asociada con la curvatura positiva de la curva elástica, se tiene

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{14-10a}$$

Algunos textos analizan los problemas básicos de deflexiones en vigas en el plano xz, como se muestra en la figura 9-19(b), y definen la deflexión w hacia abajo como positiva. Según esto, la ecuación gobernante tiene también un signo negativo:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \tag{14-10b}$$

Esta notación es particularmente preferida en el estudio de placas y cascarones.

[3]La ecuación de la curva elástica fue formulada por James Bernoulli, un matemático suizo, en 1694. Leonhard Euler (1707-1783) amplió su aplicación.

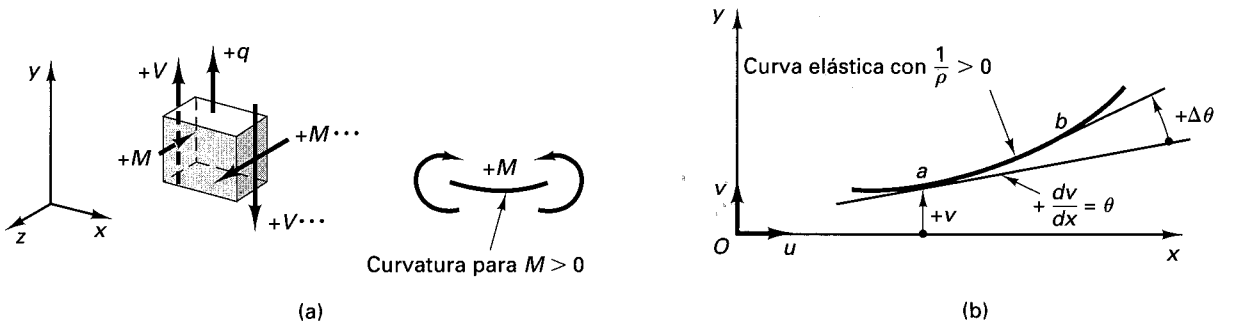


Fig. 14-3 Momento y su relación con la curvatura.

Generalmente, sólo la ecuación 14-10 se usa en este texto y si ocurre una flexión biaxial, las direcciones de la deflexión se determinan por inspección.

Es importante notar que para la curva elástica, al nivel de exactitud de la ecuación 14-10, se tiene $ds = dx$. Esto resulta del hecho de que, como antes, el cuadrado de la pendiente dv/dx es sumamente pequeño en comparación con la unidad y entonces,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dv^2} = \sqrt{1 + (v')^2}\, ds \approx dx \qquad (14\text{-}11)$$

Así entonces, en la teoría de las deflexiones pequeñas, se dice que no existe diferencia en longitud entre la longitud inicial del eje de la viga y el arco de la curva elástica. Dicho de otra manera, no hay desplazamiento horizontal de los puntos que se encuentran sobre la superficie neutra (es decir, en $y = 0$).

La teoría de vigas analizada aquí se limita a deflexiones que son pequeñas con respecto a la longitud del claro. Sin embargo, es extraordinariamente exacta cuando se compara con las soluciones exactas basadas en la ecuación 14-8. Una idea de la exactitud implicada puede obtenerse notando que se tiene aproximadamente un error de 1% en relación con la solución exacta si las deflexiones de un claro simple son del orden de 1/20 de su longitud. Aumentando la deflexión a 1/10 de la longitud del claro, que ordinariamente se consideraría una deflexión intolerablemente grande, el error se eleva aproximadamente a 4%. Como en la mayoría de las aplicaciones de ingeniería se requieren miembros a flexión rígidos, esta limitación de la teoría no es seria. Sin embargo, por claridad, las deflexiones de vigas se mostrarán muy exageradamente en todos los diagramas.

14-4. Deducción alternativa de la ecuación gobernante

En las teorías clásicas de placas y cascarones que tratan con deflexiones pequeñas se establecen ecuaciones análogas a la ecuación 14-10. El enfoque característico puede ilustrarse con el problema de una viga.

En una condición deformada, el punto A' sobre el eje de una viga descargada, figura 14-4, de acuerdo con la ecuación 14-11, está directamente sobre su posición inicial A. La tangente a la curva elástica en el mismo punto gira un ángulo dv/dx. Una sección plana con el centroide en A' gira también el mismo ángulo dv/dx ya que durante la flexión las secciones permanecen normales al eje flexionado de una viga. Por tanto, el desplazamiento u de un punto material a una distancia[4] y de la curva elástica es

$$u = -y\frac{dv}{dx} \tag{14-12}$$

donde el signo negativo muestra que para y y v' positivos, el desplazamiento u es hacia el origen. Para $y = 0$, no hay desplazamiento u, tal como es requerido por la ecuación 14-11.

Recuerde ahora la ecuación 3-1, que establece que $\varepsilon_x = du/dx$. Por tanto, de la ecuación 14-12, $\varepsilon_x = -y\, d^2v/dx^2$ ya que v es una función sólo de x.

La misma deformación unitaria normal puede también encontrarse con las ecuaciones 5-14 y 8-11, que dan $\varepsilon_x = -My/EI$. Al igualar las dos expresiones alternativas para ε_x y eliminando y de ambos lados de la ecuación,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

que es la ecuación 14-10 previamente deducida.

14-5. Formas alternativas de la ecuación gobernante

Las relaciones diferenciales entre las cargas aplicadas, las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes, ecuaciones 7-3 y 7-4, pueden combinarse con la ecuación 14-10 para dar la siguiente secuencia de ecuaciones:

$$v = \text{deflexiones de la curva elástica}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = v' = \text{pendiente de la curva elástica}$$

$$M = EI\frac{d^2v}{dx^2} = EIv'' \tag{14-13}$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = (EIv'')'$$

$$q = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2v}{dx^2}\right) = (EIv'')''$$

[4]Como el ángulo dv/dx es pequeño, su coseno puede tomarse igual a la unidad.

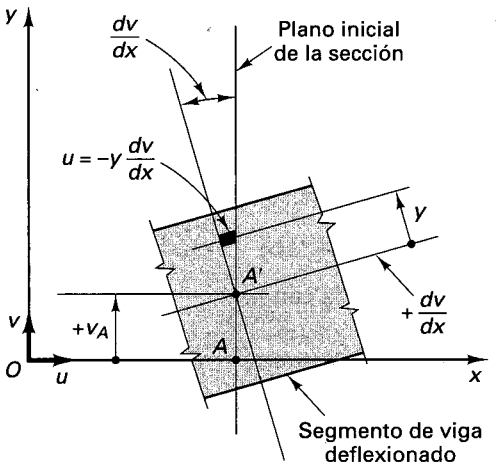


Fig. 14-4 Desplazamientos longitudinales en una viga debido a la rotación de una sección plana.

Al aplicar esas relaciones, la convención de signos mostrada en la figura 14-3 debe ser observada estrictamente. Para vigas con rigidez flexionante *constante EI*, la ecuación 14-13 se simplifica en tres ecuaciones gobernantes alternativas para determinar la deflexión de una viga cargada:

$$\boxed{EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x)} \tag{14-14a}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = V(x) \tag{14-14b}$$

$$\boxed{EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x)} \tag{14-14c}$$

La selección de una de esas ecuaciones para determinar v depende de la facilidad con que una expresión para carga, cortante o momento pueda ser formulada. Menos constantes de integración se necesitan en las ecuaciones de menor orden. La ecuación 14-14b es raramente usada ya que es más conveniente comenzar una solución con la función de carga $q(x)$ o con la función de momento $M(x)$.

14-6. Condiciones de frontera

Para la solución de problemas de deflexiones en vigas, además de las ecuaciones diferenciales deben prescribirse condiciones de frontera. Varios tipos de condiciones homogéneas de frontera son los siguientes:

1. *Empotramiento*: En este caso, el desplazamiento v y la pendiente dv/dx deben ser cero. Por consiguiente, en el extremo considerado, donde $x = a$,

$$v(a) = 0 \qquad v'(a) = 0 \tag{14-15a}$$

2. *Soporte de rodillo* o *soporte articulado*: En el extremo considerado, no puede existir ni deflexión v ni momento M. Por consiguiente,

$$v(a) = 0 \qquad M(a) = EIv''(a) = 0 \tag{14-15b}$$

Aquí, la condición físicamente evidente para M está relacionada con la derivada de v respecto a x según la ecuación 14-14.

3. *Extremo libre*: Tal extremo está libre de momento y de fuerza cortante. Por consiguiente,

$$M(a) = EIv''(a) = 0 \qquad V(a) = (EIv'')'_{x=a} = 0 \tag{14-15c}$$

4. *Soporte guiado*: En este caso se permite el movimiento vertical pero la rotación del extremo está impedida. El soporte no es capaz de resistir ninguna fuerza cortante. Por tanto,

$$v'(a) = 0 \qquad V(a) = (EIv'')'_{x=a} = 0 \tag{14-15d}$$

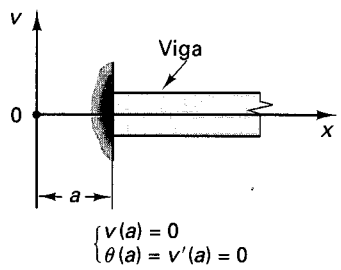
Las mismas condiciones de frontera para vigas con *EI constante* están resumidas en la figura 14-5. Note los dos tipos básicamente diferentes de condiciones de frontera. Algunas condiciones pertenecen a las cantidades de fuerza y se dice que son *condiciones estáticas de frontera*. Otras describen un comportamiento geométrico o de deformación de un extremo; son *condiciones cinemáticas de frontera*.

Condiciones no homogéneas de frontera, donde se prescribe una fuerza cortante, un momento, una rotación o un desplazamiento en la frontera, se presentan también en las aplicaciones. En tales casos, los ceros en las apropiadas ecuaciones 14-15a a la 14-15d son reemplazados por la cantidad especificada.

Esas condiciones de frontera se aplican tanto a vigas estáticamente determinadas como a indeterminadas. Como ejemplos de vigas de un solo claro estáticamente indeterminadas, considere los tres casos mostrados en la figura 14-6. La viga en 14-6(a) es indeterminada de primer grado ya que sólo una de las reacciones puede ser retirada quedando la viga en condición estable. En este ejemplo no hay fuerzas horizontales. Las condiciones de frontera mostradas en la figura 14-5(a) son aplicables en el extremo A y las de la figura 14-5(b) en el extremo B.

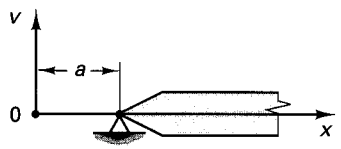
Las relaciones verticales para la viga en la figura 14-6(b) pueden encontrarse directamente de la estática. Como los soportes articulados no pueden moverse horizontalmente, hay una tendencia para el desarrollo de reacciones horizontales en los soportes debido a la deflexión de la viga. Sin embargo, para deflexiones pequeñas de vigas, de acuerdo con la ecuación 14-11, $ds \approx dx$ y no puede desarrollarse entonces ninguna deformación unitaria axial importante en vigas cargadas transversalmente.[5] Por tanto, las componentes horizontales de las reacciones en vigas con soportes inmóviles son despreciables. Con base en esto, ninguna reacción horizontal tiene que considerarse en la viga mostrada en la figura 14-6(c). Por tanto, la

[5] La fuerza horizontal se vuelve muy importante en placas delgadas. Véase S. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells* (*Teoría de placas y cascarones*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1959, p. 6.



$\begin{cases} v(a) = 0 \\ \theta(a) = v'(a) = 0 \end{cases}$

(a) Empotramiento

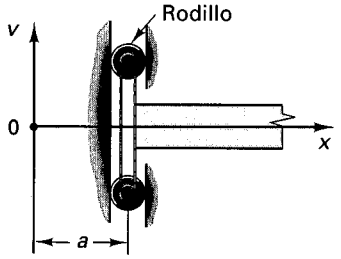


$\begin{cases} v(a) = 0 \\ M(a) = EIv''(a) = 0 \end{cases}$

(b) Soporte simple

$\begin{cases} M(a) = EIv''(a) = 0 \\ V(a) = EIv'''(a) = 0 \end{cases}$

(c) Extremo libre



$\begin{cases} \theta(a) = v'(a) = 0 \\ V(a) = EIv'''(a) = 0 \end{cases}$

(d) Soporte guiado

Fig. 14-5 Condiciones homogéneas de frontera para vigas con *EI* constante. En (a) ambas condiciones son *cinemáticas*; en (c) ambas son *estáticas*; en (b) y (d) las condiciones son mixtas.

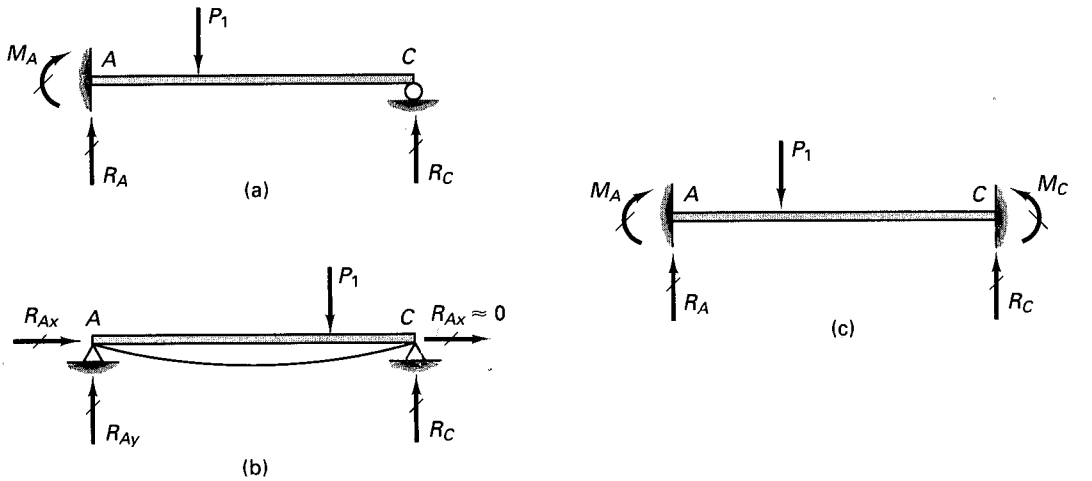


Fig. 14-6 La viga en (a) es indeterminada de primer grado. Si se supone que la reacción horizontal es despreciable, la viga en (b) es determinada y la viga en (c) es indeterminada de segundo grado.

viga mostrada es indeterminada de segundo grado. En este caso, dos fuerzas reactivas cualesquiera pueden retirarse y la viga seguirá estando en equilibrio.

En algunos problemas surgen discontinuidades en las funciones matemáticas de carga o rigidez del miembro a lo largo de una longitud dada del claro. Por ejemplo, tales discontinuidades ocurren bajo fuerzas o momentos concentrados y en cambios abruptos de áreas transversales que afectan el valor *EI*. En tales casos, las condiciones de frontera deben complementarse con los requisitos físicos de *continuidad de la curva elástica*. Esto significa que en cualquier unión de las dos zonas de una viga en que ocurre una discontinuidad, la deflexión y la tangente a la curva elástica deben ser las mismas independientemente de la dirección con que se aproxime uno al punto común. En la figura 14-7 se ilustra una geometría inaceptable de curvas elásticas.

Usando las funciones de singularidad vistas en la sección 14-8, las condiciones de continuidad de la curva elástica son idénticamente satisfechas.

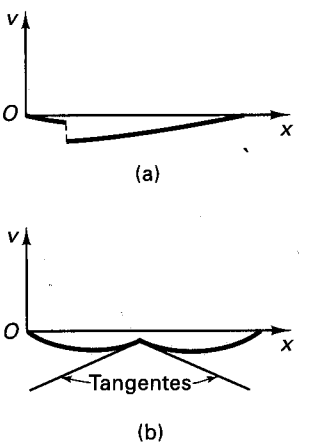


Fig. 14-7 Condiciones geométricas inaceptables en una curva elástica continua.

14-7. Soluciones por integración directa

Como ejemplo general del cálculo de deflexiones en vigas, considere la ecuación 14-14c, $EIv^{iv} = q(x)$. Integrando sucesivamente cuatro veces esta expresión, se obtiene la solución formal para v. Entonces,

$$EIv^{iv} = EI\frac{d^4v}{dx^4} = EI\frac{d}{dx}(v''') = q(x) \qquad 14\text{-}16a$$

$$EIv''' = \int_0^x q\,dx + C_1$$

$$EIv'' = \int_0^x dx \int_0^x q\,dx + C_1x + C_2$$

$$EIv' = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q\,dx + C_1x^2/2 + C_2x + C_3 \tag{14-16b}$$

$$EIv = \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x q\,dx + C_1x^3/3! + C_2x^2/2! + C_3x + C_4$$

En estas ecuaciones, las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 tienen un significado físico especial. Como, según la ecuación 14-14b, $EIv''' = V$, al sustituir esta relación en la segunda de las ecuaciones 14-16 y simplificar, se reproduce la ecuación 7-6; es decir,

$$V = \int_0^x q\,dx + C_1 \tag{7-6}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación 7-7 e integrando, se obtiene una forma diferente de la ecuación 7-7.

$$M = \int_0^x dx \int_0^x q\,dx + C_1x + C_2 \tag{14-17}$$

El lado derecho de esta ecuación es idéntico a la tercera de las ecuaciones 14-16.

Esos resultados muestran que las constantes C_1 y C_2 son una parte de las ecuaciones de equilibrio y son las *condiciones estáticas de frontera*. En este punto no entran en el problema ni propiedades cinemáticas ni del material. Sin embargo, a continuación, dividiendo M entre EI para sustituirlo en la ecuación 14-10, se introducen esas propiedades, limitando las soluciones al comportamiento *elástico* de vigas *prismáticas*. Así entonces, reescribiendo la ecuación 14-10, por claridad, en varias formas diferentes,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{dv'}{dx} = \frac{M}{EI} \tag{14-18}$$

Luego, usando la ecuación 14-17 e integrando dos veces, se reproducen las últimas dos relaciones de las ecuaciones 14-16. Esas dos ecuaciones y las nuevas constantes de integración C_3 y C_4 asociadas, definen la pendiente y la deflexión de la curva elástica (es decir, ellas describen las relaciones cinemáticas de una viga cargada lateralmente). Esas constantes son las *condiciones de frontera cinemáticas*.

Si en vez de la ecuación 14-14(c) se comienza con la ecuación 14-14(a), $EIv'' = M(x)$, después de dos integraciones la solución es

$$EIv = \int_0^x dx \int_0^x M\,dx + C_3x + C_4 \tag{14-19}$$

En ambas ecuaciones, las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 deben determinarse a partir de las condiciones en las fronteras. En la ecuación 14-19, las constantes C_1 y C_2 son incorporadas en la expresión para M. Las constantes

C_1, C_2, C_3/EI y C_4/EI, respectivamente, son usualmente[6] los valores iniciales de V, M, θ y v en el origen.

El primer término a la derecha de la última parte de la ecuación 14-16 y el correspondiente en la ecuación 14-19 son las soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales respectivas. La solución de la ecuación 14-16 es especialmente interesante ya que depende sólo de las condiciones de carga de la viga. Este término permanece constante independientemente de las condiciones de frontera prescritas, mientras que las *constantes* son determinadas a partir de las condiciones de frontera.

Si las funciones de carga, fuerza cortante y momento son continuas y la rigidez flexionante EI es constante, la evaluación de las integrales particulares es muy directa. Cuando se tienen discontinuidades, las soluciones pueden encontrarse para cada segmento de viga en que las funciones sean continuas; la solución completa se obtiene entonces obligando a que se cumplan las condiciones de continuidad en las fronteras comunes de los segmentos de la viga. Alternativamente, procedimientos[7] gráficos o numéricos de integraciones sucesivas pueden usarse muy efectivamente en la resolución de problemas prácticos.

Cualquiera de las ecuaciones 14-14 o 14-16 puede usarse para encontrar deflexiones en vigas. La selección depende enteramente de los datos iniciales y de la cantidad de trabajo necesario para resolver un problema. Si se comienza con la carga aplicada, las cuatro integraciones deben llevarse a cabo. Por otra parte, si se escribe la función momento flexionante, el número de integraciones requeridas se reduce a dos.

Resumen del procedimiento Los mismos *tres conceptos básicos* de la mecánica de sólidos repetidamente aplicados anteriormente se usan para desarrollar la teoría de la deflexión elástica de vigas. Éstos pueden resumirse como sigue:

1. Las *condiciones de equilibrio* (estáticas) se usan en un elemento de viga para establecer las relaciones entre la carga aplicada y la fuerza cortante, ecuación 7-3, así como entre la fuerza cortante y el momento flexionante, ecuación 7-4.
2. La *geometría de deformación* (cinemática) se usa suponiendo que las secciones planas de un elemento de viga permanecen planas después de la deformación. Tales secciones planas se intersecan y definen deformaciones unitarias de la viga así como el radio de curvatura de un elemento. Aunque en el sentido antes mencionado la expresión para la curvatura, ecuación 14-4, es exacta, la teoría se limita a deflexiones pequeñas, ya que sen θ es aproximado por θ, ecuación 14-9. No se toma en cuenta en la formulación ningún alabeo debido al cortante en las secciones.
3. Las *propiedades de los materiales* (relaciones constitutivas) en la forma de la ley de Hooke, ecuación 2-8, se aplican supuestamente sólo a esfuerzos y deformaciones unitarias normales longitudinales. El efecto de Poisson se ignora.

[6]En ciertos casos, donde se usan funciones trascendentes, estas constantes no tienen este significado. Básicamente, toda la función, que incluye las constantes de integración, debe satisfacer las condiciones de frontera.

[7]Tales procedimientos son útiles en problemas complicados. Véase, por ejemplo, N. M. Newmark, "Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads", ("Procedimientos numéricos para calcular deflexiones, momentos y cargas de pandeo"), *Trans. ASCE*, **108**, 1943, 1161. Las soluciones por elemento finito de tales problemas son ahora ampliamente usadas en la práctica.

Una solución de cualquiera de las ecuaciones 14-14a, 14-14b o 14-14c,[8] *sujeta a las condiciones de frontera prescritas*, constituye una solución de un problema dado de viga elástica cargada transversalmente. Esas ecuaciones son aplicables tanto a problemas de vigas estáticamente determinadas *como* a indeterminadas.[9] Sin embargo, las soluciones son más simples si las funciones $q(x)$ e $I(x)$ son continuas en todo un claro. Cuando ocurren discontinuidades en $q(x)$ o $I(x)$, la continuidad de la curva elástica en tales puntos debe ser mantenida. Si I es constante, las funciones de singularidad para describir las cargas pueden usarse efectivamente.

Nótese que aunque bajo discontinuidades de carga y sección transversal se desarrollan grandes perturbaciones locales en las deformaciones y en los esfuerzos, las deflexiones de vigas son menos sensitivas a esos efectos. Las deflexiones se determinan usando integración, un proceso que tiende a suavizar la función.

Varios ejemplos ilustrativos de vigas estáticamente determinadas e indeterminadas se presentan a continuación. Las aplicaciones de las funciones de singularidad para deflexiones en vigas elásticas se dan en la siguiente sección.

Ejemplo 14-2

Un momento flexionante M_1 se aplica en el extremo libre de un voladizo de longitud L y rigidez flexionante constante EI, figura 14-8(a). Encuentre la ecuación de la curva elástica.

SOLUCIÓN

Las condiciones de frontera están indicadas cerca de la figura por *inspección* de las condiciones en los extremos. En $x = L$, $M(L) = +M_1$, que es una condición no homogénea.

Del diagrama de cuerpo libre en la figura 14-8(b), puede observarse que el momento flexionante es $+M_1$ en toda la viga. Aplicando la ecuación 14-14a, integrando sucesivamente y usando las condiciones de frontera, se obtiene la solución para v:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = M_1$$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_1x + C_3$$

Pero $\theta(0) = 0$; por consiguiente, en $x = 0$, se tiene $EIv'(0) = C_3 = 0$ y

$$EI\frac{dv}{dx} = M_1x$$

$$EIv = \frac{1}{2}M_1x^2 + C_4$$

[8] La convención de signos adoptada para cargas aplicadas y fuerzas cortantes conduce a que éstas aparezcan con signos positivos en todas las ecuaciones 14-13 y 14-14, lo que es conveniente en los cálculos a mano.

[9] Esto es análogo a los problemas de barras cargadas axialmente vistos en la Sección 4-7.

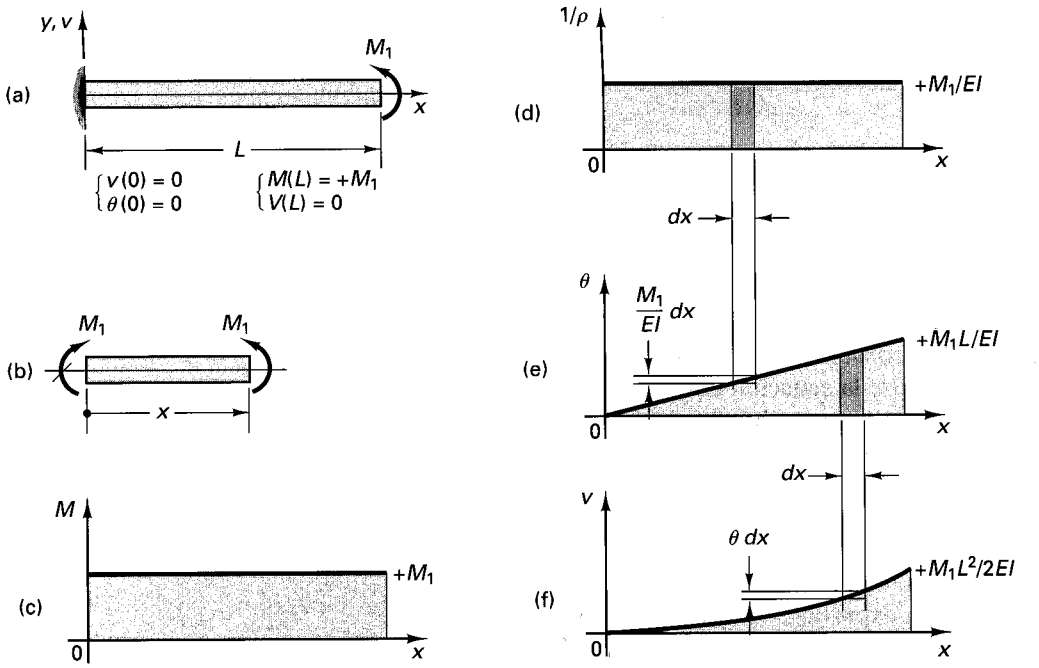


Fig. 14-8

Pero $v(0) = 0$; por tanto, $EIv(0) = C_4 = 0$ y

$$v = \frac{M_1 x^2}{2EI} \tag{14-20}$$

El signo positivo del resultado indica que la deflexión debida a M_1 es hacia arriba. El valor máximo de v ocurre en $x = L$. La pendiente de la curva elástica en el extremo libre es M_1L/EI radianes.

La ecuación 14-20 muestra que la curva elástica es una parábola. Sin embargo, cada elemento de la viga experimenta momentos y deformaciones iguales. Por tanto, la curva elástica debería ser una parte de un círculo. La inconsistencia resulta del uso de una relacion impropia para la curvatura $1/\rho$. Puede demostrarse que el error cometido está en la razón de $(\rho - v)^3$ a ρ^3. Como la deflexión v es mucho menor que ρ, el error es muy pequeño.

Es importante asociar el procedimiento anterior de integración sucesiva con una solución o interpretación gráficas. Esto se muestra en la secuencia de las figuras 14-8(c) a la (f). Primero se muestra el diagrama convencional de momentos. Luego, usando las ecuaciones 14-9 y 14-10, $1/\rho \approx d^2v/dx^2 = M/EI$, se traza el diagrama de curvatura que aparece en la figura 14-8(d). Para el caso elástico, esto es simplemente una gráfica de M/EI. Integrando el diagrama de curvatura, se obtiene el diagrama para θ. En la siguiente integración se obtiene la curva elástica. En este ejemplo, como la viga está fija en el origen, las condiciones $\theta(0) = 0$ y $v(0) = 0$ se usan para construir los diagramas. Este enfoque gráfico o sus

equivalentes numéricos son muy útiles en la resolución de problemas con *EI* variable.

Ejemplo 14-3

Una viga simple soporta una carga uniformemente distribuida hacia abajo w_o. La rigidez flexionante *EI* es constante. Encuentre la curva elástica por los tres siguientes métodos: (a) Use la ecuación diferencial de segundo orden para obtener la deflexión de la viga. (b) Use la ecuación de cuarto orden en vez de la usada en el inciso (a). (c) Ilustre una solución gráfica del problema.

SOLUCIÓN

(a) Un diagrama de la viga junto con las condiciones dadas de frontera se muestra en la figura 14-9(a). La expresión para *M* por usarse en la ecuación diferencial de segundo orden se encontró en el ejemplo 7-8. De la figura 7-19,

$$M = \frac{w_o L x}{2} - \frac{w_o x^2}{2}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación 14-14a, integrándola dos veces y usando las condiciones de frontera, se encuentra la ecuación de la curva elástica:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M = \frac{w_o L x}{2} - \frac{w_o x^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{w_o L x^2}{4} - \frac{w_o x^3}{6} + C_3$$

$$EIv = \frac{w_o L x^3}{12} - \frac{w_o x^4}{24} + C_3 x + C_4$$

Pero $v(0) = 0$; por consiguiente, $EIv(0) = 0 = C_4$; y, como $v(L) = 0$,

$$EIv(L) = 0 = \frac{w_o L^4}{24} + C_3 L \qquad \text{y} \qquad C_3 = -\frac{w_o L^3}{24}$$

$$v = -\frac{w_o x}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3) \tag{14-21}$$

Debido a la simetría, la deflexión máxima ocurre en $x = L/2$. Al sustituir este valor de *x* en la ecuación 14-21, se obtiene

$$|v|_{\text{máx}} = \frac{5w_o L^4}{384EI} \tag{14-22}$$

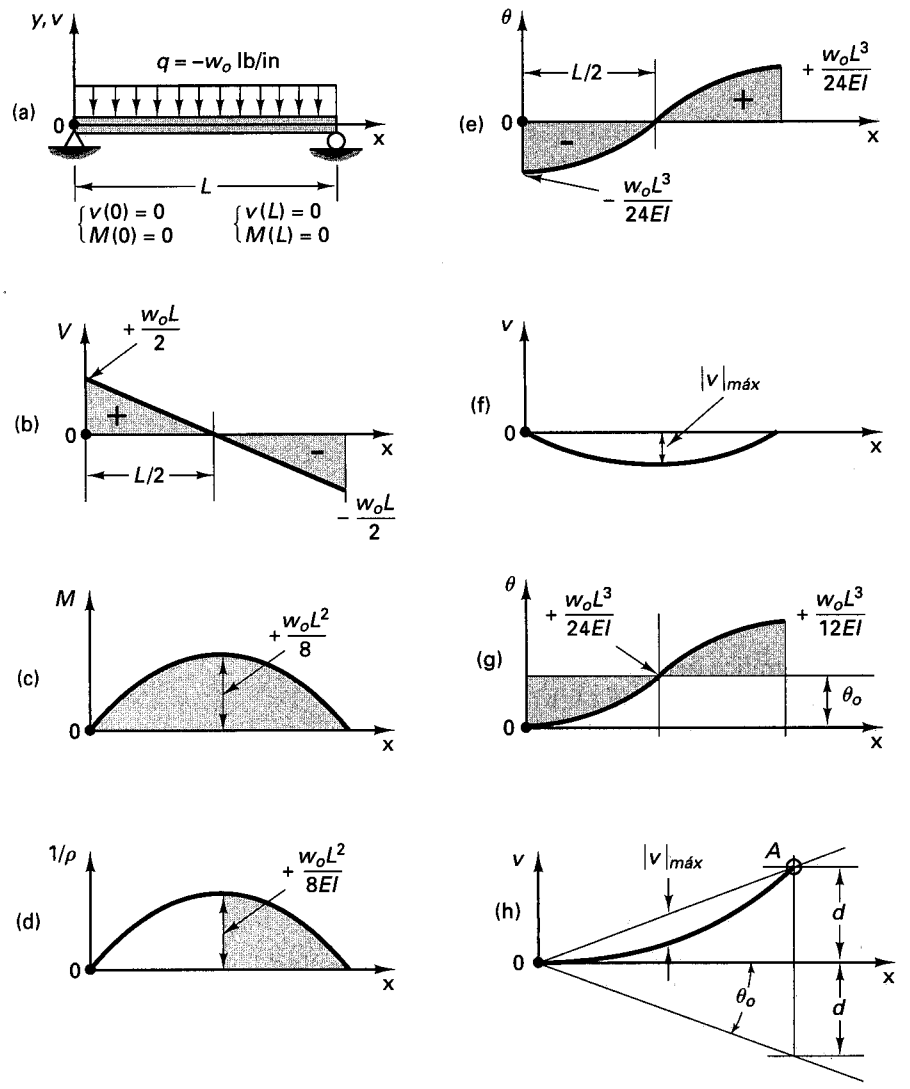


Fig. 14-9

La condición de simetría podría también haberse usado para determinar la constante C_3. Como se sabe que $v'(L/2) = 0$, se tiene

$$EIv'(L/2) = \frac{w_o L(L/2)^2}{4} - \frac{w_o(L/2)^3}{6} + C_3 = 0$$

y, como antes, $C_3 = -w_o L^3/24$.

(b) La aplicación de la ecuación 14-14c a la solución de este problema es directa. Las constantes se toman de las condiciones de frontera.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -w_o$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -w_o x + C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Pero $M(0) = 0$; por consiguiente, $EIv'''(0) = 0 = C_2$; y, como $M(L) = 0$,

$$EIv''(L) = 0 = -\frac{w_o L^2}{2} + C_1 L \qquad \text{o} \qquad C_1 = \frac{w_o L}{2}$$

por consiguiente,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{w_o L x}{2} - \frac{w_o x^2}{2}$$

El resto del problema es igual que en el inciso (a). En este enfoque no se requiere ningún cálculo preliminar de reacciones. Como se mostrará después, esto es conveniente en algunos problemas estáticamente indeterminados.

(c) Los pasos necesarios para una solución gráfica del problema completo están mostrados en las figuras 14-9(b) a la (f). En las figuras 14-9(b) y (c), están mostrados los diagramas convencionales de fuerza cortante y momento flexionante. El diagrama de curvatura se obtiene graficando M/EI, como se hizo en la figura 14-9(d).

Como por simetría, la pendiente a la curva elástica en $x = L/2$ es horizontal, $\theta(L/2) = 0$. Por tanto, la construcción del diagrama θ puede comenzarse desde el centro. En este procedimiento, la ordenada derecha en la figura 14-9(e) debe ser igual al área sombreada de la figura 14-4(d) y viceversa. Sumando el diagrama θ se encuentra la deflexión elástica v. El área sombreada de la figura 14-9(e) es numéricamente igual a la deflexión máxima. En el procedimiento anterior se usó la condición de simetría. Se da a continuación un procedimiento de aplicación general.

Después de que el diagrama de curvatura se ha establecido en la figura 14-9(d), el diagrama θ puede construirse con un valor inicial supuesto de θ en el origen. Por ejemplo, con $\theta(0) = 0$ se suma el diagrama de curvatura para obtener el diagrama θ, figura 14-9(g). Note que la forma de la curva así encontrada es idéntica a la de la figura 14-9(e). Sumando el área del diagrama θ se obtiene la curva elástica. En la figura 14-9(h) esta curva se extiende de 0 a A. Esto viola la condición de frontera en A, donde la deflexión debe ser cero. Sin embargo se tienen deflexiones correctas al medirlas verticalmente desde una línea recta que pase por 0 y A. Esta línea inclinada corrige las ordenadas de deflexión causadas por la incorrectamente supuesta $\theta(0)$. De hecho, después de construir la figura 14-9(h), se sabe que $\theta(0) = -d/L = -w_o L^3/24EI$. Cuando se usa este valor de $\theta(0)$, el problema se revierte a la solución precedente, figuras 14-9(e) y (f). En la figura 14-9(h), las mediciones inclinadas no tienen sentido. El procedimiento descrito es aplicable para vigas con voladizos. En tales casos, la línea base para medir deflexiones debe pasar por los puntos de soporte.

Ejemplo 14-4

Una viga empotrada en sus extremos soporta una carga uniformemente distribuida hacia abajo w_o, figura 14-10 (a). El EI para la viga es constante. (a) Encuentre la expresión para la curva elástica usando la ecuación diferencial gobernante de cuarto orden. (b) Verifique los resultados encontrados usando la ecuación diferencial de segundo orden.

SOLUCIÓN

(a) Como se vio en conexión con la figura 14-6(c), esta viga es estáticamente indeterminada de segundo grado ya que las reacciones horizontales se suponen iguales a cero. La solución se obtiene por cuatro integraciones sucesivas de la ecuación 14-14c según la manera mostrada en las ecuaciones 14-16. Las constantes de integración se encuentran entonces en las condiciones de frontera.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -w_o$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -w_o x + C_1$$

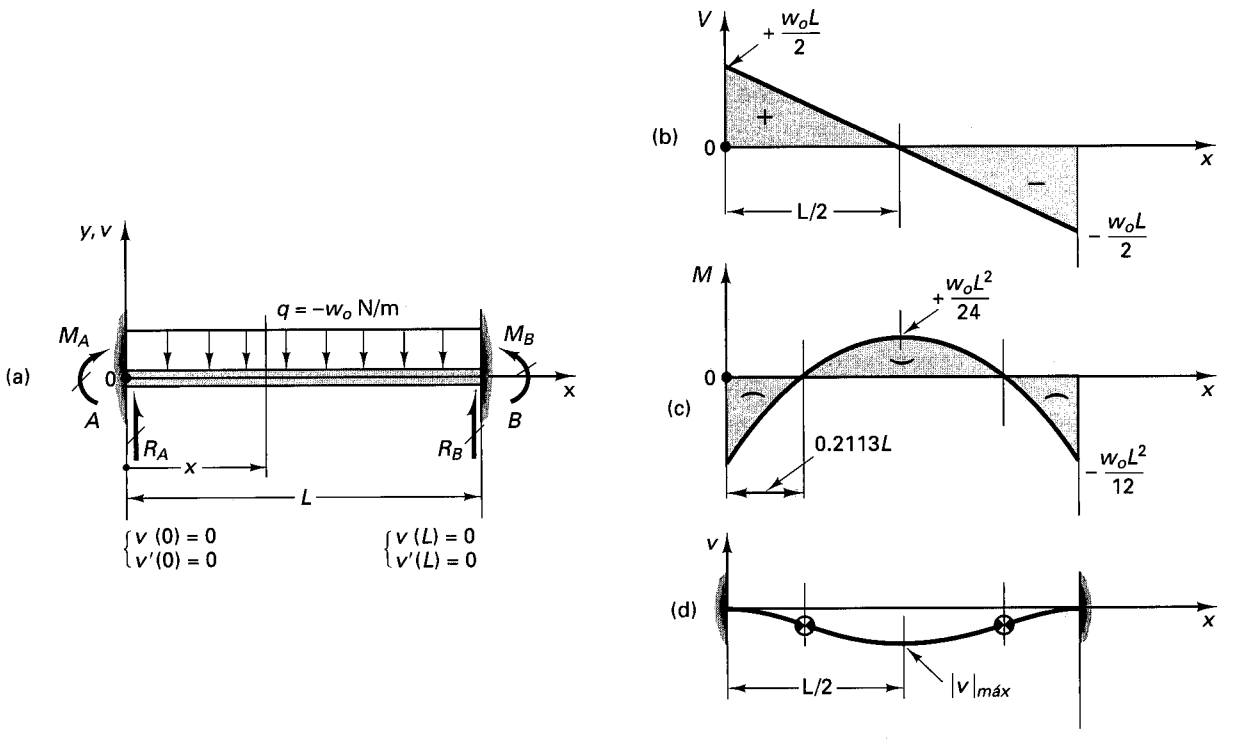


Fig. 14-10

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_o x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_o x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = -\frac{w_o x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Se dispone de cuatro condiciones cinemáticas de frontera para determinar las constantes de integración:

$$EIv(0) = EIv_A = 0 = C_4$$

$$EIv'(0) = EIv'_A = 0 = C_3$$

$$EIv(L) = EIv_B = 0 = -\frac{w_o L^4}{24} + C_1\frac{L^3}{6} + C_2\frac{L^2}{2}$$

$$EIv'(L) = EIv'_B = 0 = -\frac{w_o L^3}{6} + C_1\frac{L^2}{2} + C_2 L$$

Las constantes C_3 y C_4 no entran en las dos últimas ecuaciones ya que son cero. Resolviendo simultáneamente las dos últimas ecuaciones,

$$C_1 = \frac{w_o L}{2} \qquad \text{y} \qquad C_2 = -\frac{w_o L^2}{12}$$

Sustituyendo estas constantes en la ecuación de la curva elástica y al efectuar algunas simplificaciones se obtiene,

$$v = -\frac{w_o x^2}{24EI}(L - x)^2 \tag{14-23}$$

De acuerdo con las ecuaciones 14-14a y 14-14b, EI multiplicada por las segunda y tercera derivadas de la deflexión $v(x)$ dan $M(x)$ y $V(x)$, respectivamente. En $x = 0$, esas relaciones definen las reacciones en A. Por consiguiente, C_1 es la reacción vertical y C_2 es el momento en el soporte. En este caso, debido a la simetría, las reacciones verticales pueden encontrarse directamente por estática. Sin embargo, esto no es necesario en esta solución típica de un *problema de valor en la frontera*. El momento y la fuerza cortante en B pueden encontrarse a partir de la misma expresión en $x = L$.

Los diagramas de fuerza cortante, momento flexionante y deflexión para esta viga se muestran en la figura 14-10. La deflexión máxima absoluta que ocurre en el centro del claro es

$$|v|_{\text{máx}} = \frac{w_o L^4}{384EI} \tag{14-24}$$

(b) Esta solución se encuentra usando la ecuación 14-14a, y aunque la reacción vertical en A puede determinarse directamente por estática, será tratada aquí como incógnita. Según esto,

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = M_A + R_A x - \frac{w_o x^2}{2}$$

Integrando dos veces,

$$EI\frac{dv}{dx} = M_A x + R_A\frac{x^2}{2} - \frac{w_o x^3}{6} + C_3$$

$$EIv = M_A\frac{x^2}{2} + R_A\frac{x^3}{6} - \frac{w_o x^4}{24} + C_3 x + C_4$$

Las constantes C_3 y C_4 *así como* R_A y M_A se encuentran de las cuatro condiciones cinemáticas de frontera:

$$EIv(0) = EIv_A = 0 = C_4$$

$$EIv'(0) = EIv'^A = 0 = C_3$$

$$EIv(L) = EIv_B = 0 = M_A\frac{L^2}{2} + R_A\frac{L^3}{6} - \frac{w_o L^4}{24}$$

$$EIv'(L) = EIv'_B = 0 = M_A L + R_A\frac{L^2}{2} - \frac{w_o L^4}{6}$$

Resolviendo las últimas dos ecuaciones simultáneamente,

$$R_A = \frac{w_o L}{2} \quad \text{y} \quad M_A = -\frac{w_o L^2}{12}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación para la deflexión *con* $C_3 = C_4 = 0$, se obtiene de nuevo la ecuación 14-23.

Ejemplo 14-5

Determine la ecuación de la curva elástica para la viga continua uniformemente cargada mostrada en la figura 14-11(a). Use la ecuación diferencial de segundo orden. EI es constante.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, la solución puede limitarse a determinar la deflexión de cualquier claro. Además, también por la simetría, puede concluirse que en el soporte medio, no sólo es cero la deflexión, sino también la pendiente, ya que la curva elástica no puede girar en ninguna dirección. De esta manera, el problema puede reducirse al problema estáticamente

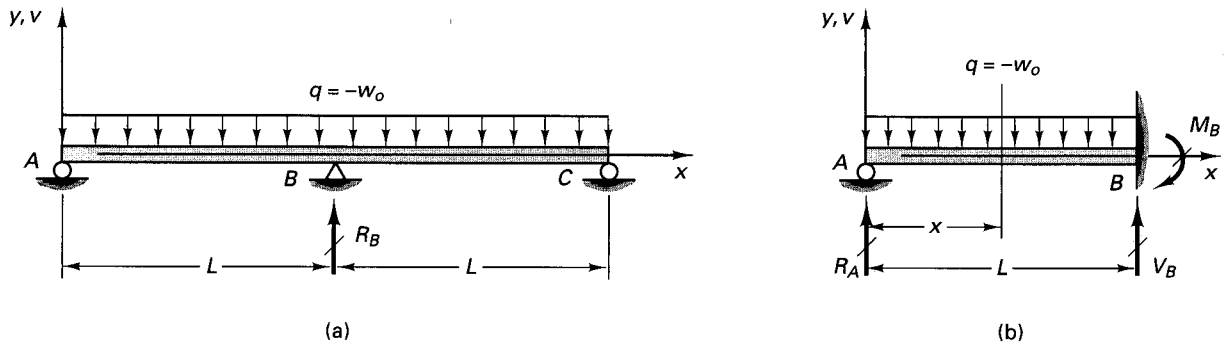


Fig. 14-11

indeterminado de primer grado mostrado en la figura 14-11(b) con condiciones conocidas de frontera.

Usando la ecuación 14-14(a), la solución procede de la manera usual. Se formula una expresión para $M(x)$ y se efectúan dos integraciones sucesivas de la ecuación diferencial. Las condiciones de frontera proporcionan la información necesaria para determinar las constantes de integración y una reacción desconocida R_A.

Solución con la ecuación diferencial de segundo orden:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M(x) = R_A x - \frac{w_o x^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} - \frac{w_o x^3}{6} + C_3$$

$$EIv = R_A\frac{x^3}{6} - \frac{w_o x^4}{24} + C_3 x + C_4$$

Condiciones de frontera:

$$EIv(0) = EIv_A = 0 = C_4$$

$$EIv'(L) = EIv'_B = 0 = R_A\frac{L^2}{2} - \frac{w_o L^3}{6} + C_3$$

$$EIv(L) = EIv_B = 0 = R_A\frac{L^3}{6} - \frac{w_o L^4}{24} + C_3 L$$

Resolviendo las últimas dos ecuaciones simultáneamente,

$$R_A = \frac{3w_o L}{8} \qquad \text{y} \qquad C_3 = -\frac{w_o L^3}{48}$$

que al sustituirlas en la ecuación de la curva elástica, conducen a

$$v = -\frac{w_o x}{48EI}(L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \qquad (14\text{-}25)$$

Por simetría, las reacciones en A y en C son iguales y, por estática, la reacción en B es

$$R_B = \frac{5w_oL}{4} \tag{14-26}$$

Esta reacción es también numéricamente igual a $2V_B$.

Ejemplo 14-6

Una viga simple soporta una fuerza concentrada P hacia abajo a una distancia a del apoyo izquierdo, figura 14-12(a). La rigidez flexual EI es constante. Encuentre la ecuación de la curva elástica por integración sucesiva.

SOLUCIÓN

La solución se obtendrá usando la ecuación diferencial de segundo orden. Las reacciones y condiciones de frontera se muestran en la figura 14-12(a). El diagrama de momentos, dibujado en la figura 14-12(b), muestra claramente una discontinuidad en $M(x)$ en $x = a$, lo que requiere la formulación de dos funciones diferentes. Primero, la solución procede independientemente para cada segmento de la viga.

Para el segmento AD:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Pb}{EIL}x$$

Para el segmento DB:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Pa}{EI} - \frac{Pa}{EIL}x$$

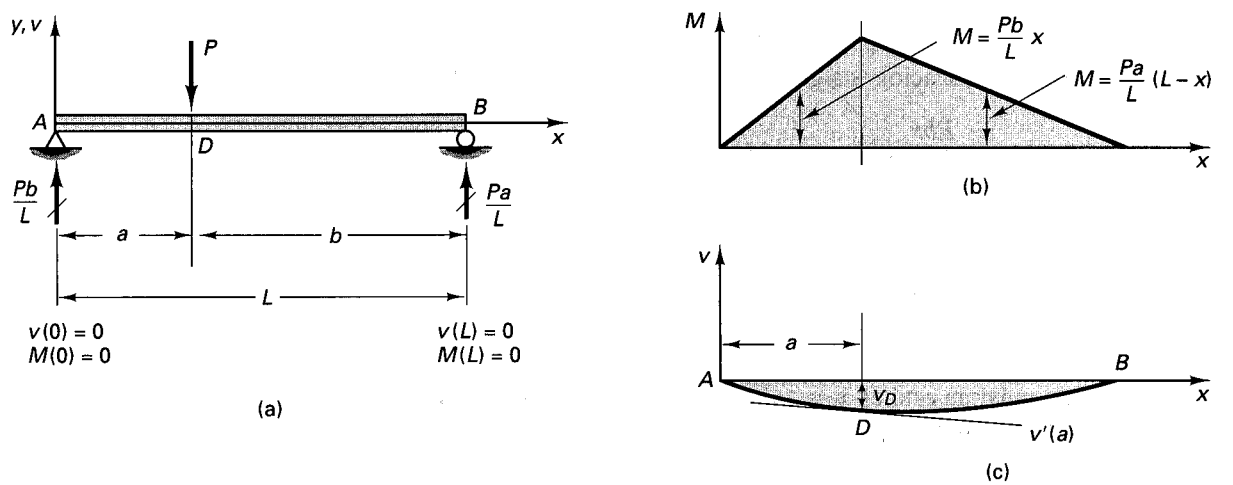


Fig. 14-12

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Pb}{EIL}\frac{x^2}{2} + A_1 \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{Pa}{EI}x - \frac{Pa}{EIL}\frac{x^2}{2} + B_1$$

$$v = \frac{Pb}{EIL}\frac{x^3}{6} + A_1x + A_2 \qquad v = \frac{Pa}{EI}\frac{x^3}{2} - \frac{Pa}{EIL}\frac{x^3}{6} + B_1x + B_2$$

Para determinar las cuatro constantes A_1, A_2, B_1 y B_2, deben usarse dos condiciones de frontera y dos condiciones de continuidad.

Para el segmento AD:

$$v(0) = 0 = A_2$$

Para el segmento DB:

$$v(L) = 0 = \frac{PaL^2}{3EI} + B_1L + B_2$$

Igualando las deflexiones para ambos segmentos en $x = a$,

$$v_D = v(a) = \frac{Pa^3b}{6EIL} + A_1a = \frac{Pa^3}{2EI} - \frac{Pa^4}{6EIL} + B_1a + B_2$$

Igualando las pendientes para ambos segmentos en $x = a$,

$$\theta_D = v(a) = \frac{Pa^2b}{2EIL} + A_1 = \frac{Pa^2}{EI} - \frac{Pa^3}{2EIL} + B_1$$

Al resolver las cuatro ecuaciones simultáneamente, se encuentra

$$A_1 = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) \qquad A_2 = 0$$

$$B_1 = -\frac{Pa}{6EIL}(2L^2 + a^2) \qquad B_2 = \frac{Pa^3}{6EI}$$

Con estas constantes, por ejemplo, la curva elástica para el segmento AD de la viga, después de simplificaciones algebraicas, toma la forma

$$v = -\frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2) \tag{14-27}$$

La deflexión v_D bajo la carga aplicada P es

$$v_D = v(a) = -\frac{Pa^2b^2}{3EIL} \tag{14-28}$$

La deflexión máxima ocurre en el segmento más largo de la viga. Si $a > b$, el punto de deflexión máxima está en $x = \sqrt{a(a + 2b)/3}$, lo que se deduce de hacer igual a cero la expresión para la pendiente. La deflexión en este punto es

$$|v|_{\text{máx}} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL} \tag{14-29}$$

Usualmente, la deflexión en el centro del claro es casi igual a la deflexión numéricamente máxima. Tal deflexión es mucho más fácil de determinar, lo que recomienda su uso. Si la fuerza P se aplica en el centro del claro, con $a = b = L/2$, por sustitución directa en la ecuación 14-28 o en la 14-29, se tiene

$$|v|_{\text{máx}} = \frac{PL^3}{48EI} \tag{14-30}$$

Aquí es conveniente recordar la definición de la *constante de resorte* o *rigidez* k dada por la ecuación 3-6. En el contexto presente, para una fuerza P colocada a una distancia arbitraria a del soporte,

$$k = \frac{P}{v_B} = \frac{3EIL}{a^2b^2} \tag{14-31}$$

Para una caso particular, cuando $a = b = L/2$, esta ecuación se reduce a

$$k_o = \frac{48EI}{L^3} \tag{14-32}$$

Esta expresión se obtiene también directamente de la ecuación 14-30.

Las ecuaciones previas son útiles en los análisis estático y dinámico y son esenciales en el análisis de vibraciones.

La solución de problemas de deflexiones con funciones discontinuas de carga se facilitan considerablemente con el uso de funciones de singularidad que se verán en la siguiente sección.

Ejemplo 14-7

Una viga simplemente apoyada de 5 m de longitud está cargada con una fuerza de 20 N hacia abajo en un punto a 4 m del soporte izquierdo, como se muestra en la figura 14-13(a). El momento de inercia de la sección transversal de la viga es $4I_1$ para el segmento AB e I_1 para el resto de la viga. Determine la curva elástica.

SOLUCIÓN

Un problema similar fue resuelto en el ejemplo anterior. Otro procedimiento útil será ilustrado aquí, es conveniente en algunos casos complicados donde diferentes expresiones M/EI son aplicables a varios segmentos de la viga. Este método consiste en seleccionar un origen en un extremo de la viga y efectuar integraciones sucesivas hasta que se obtienen expresiones para θ y v para el primer segmento. Se determinan luego los valores de θ y v en el extremo del primer segmento. Debido a condiciones de continuidad, éstas son las constantes iniciales en las integraciones efectuadas en el segmento siguiente. Este proceso se repite hasta que se alcanza el extremo alejado de la viga; entonces se imponen las condiciones de frontera para determinar las constantes desconocidas restantes. Un nuevo origen se

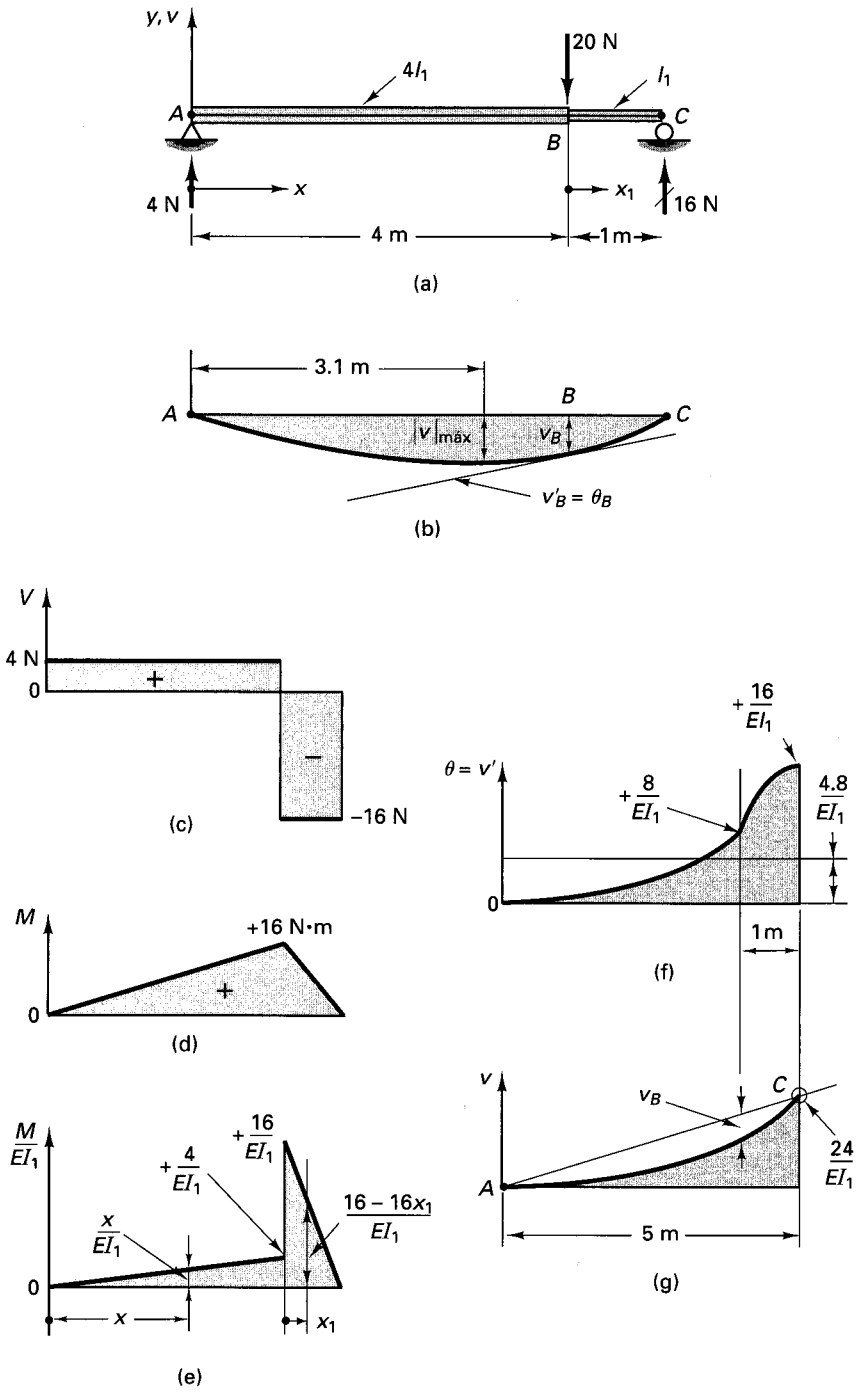

y, v
20 N
4I1
I1
A
B
C
4 N
x
x1
16 N
4 m
1 m
(a)
3.1 m
A
B
C
|v|máx
vB
v'B = θB
(b)
V
4 N
0
+
−
−16 N
(c)
M
+16 N·m
0
+
(d)
M/EI1
+16/EI1
+4/EI1
x/EI1
(16 − 16x1)/EI1
0
x
x1
(e)
θ = v'
+16/EI1
+8/EI1
4.8/EI1
0
1 m
(f)
v
vB
C
A
24/EI1
5 m
(g)

Fig. 14-13

usa en cada unión de los segmentos y todas las x se toman como positivas en la misma dirección.

Para el segmento AB, $0 < x < 4$:

$$M = 4x \quad \text{y} \quad EI = 4EI_1$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{x}{EI_1}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{x^2}{2EI_1} + A_1$$

$$v = \frac{x^3}{6EI_1} + A_1x + A_2$$

En $x = 0$, $v(0) = v_A = 0$ y $\theta(0) = \theta_A$. Por consiguiente, $A_1 = \theta_A$ y $A_2 = 0$.

En el extremo del segmento AB:

$$\theta(4) = \theta_B = \frac{8}{EI_1} + \theta_A \quad \text{y} \quad v(4) = v_B = \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A$$

Para el segmento BC, $0 < x_1 < 1$:

$$M = 4(4 + x_1) - 20x_1 = 16 - 16x_1 \quad \text{y} \quad EI = EI_1$$

$$\frac{d^2v}{dx_1^2} = \frac{16}{EI_1} - \frac{16x_1}{EI_1}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx_1} = \frac{16x_1}{EI_1} - \frac{8x_1^2}{EI_1} + A_3$$

$$v = \frac{8x_1^2}{EI_1} - \frac{8x_1^3}{3EI_1} + A_3x_1 + A_4$$

En $x_1 = 0$, $v(0) = v_B$ y $\theta(0) = \theta_B$. Por consiguiente, de la solución anterior, $A_4 = v_B = 32/3EI_1 + 4\theta_A$ y $A_3 = \theta_B = 8/EI_1 + \theta_A$. Las expresiones para θ y v en el segmento BC se obtienen entonces como

$$\theta = \frac{16x_1}{EI_1} - \frac{8x_1^2}{EI_1} + \frac{8}{EI_1} + \theta_A$$

$$v = \frac{8x_1^2}{EI_1} - \frac{8x_1^3}{3EI_1} + \frac{8x_1}{EI_1} + \theta_Ax_1 + \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A$$

Finalmente, se aplica la condición en C para determinar el valor de θ_A. En $x_1 = 1$, $v(1) = v_c = 0$; por tanto,

$$0 = \frac{8}{EI_1} - \frac{8}{3EI_1} + \frac{8}{EI_1} + \theta_A + \frac{32}{3EI_1} + 4\theta_A \quad \text{y} \quad \theta_A = -\frac{4.8}{EI_1}$$

Sustituyendo este valor de θ_A en las expresiones respectivas para θ y v, pueden obtenerse ecuaciones para esas cantidades para cualquier segmento.

Por ejemplo, la ecuación para la pendiente en el segmento AB es $\theta = x^2/2EI_1 - 24/5EI_1$. Al hacer esta cantidad igual a cero, se encuentra $x = 3.1$ m. La deflexión máxima ocurre en este valor de x y $|v|_{máx} = 9.95/EI_1$. Característicamente, la deflexión en el centro del claro (en $x = 2.5$ m) es casi la misma, o sea $9.4/EI_1$.

Un procedimiento gráfico autoexplicativo se muestra en las figuras 14-13(d) a la (g). Variaciones en I no causan complicaciones en la solución gráfica, lo que es una gran ventaja en problemas complejos. Pueden usarse múltiples orígenes como se muestra en la figura 14-14 para simplificar el trabajo numérico, como en el presente ejemplo.

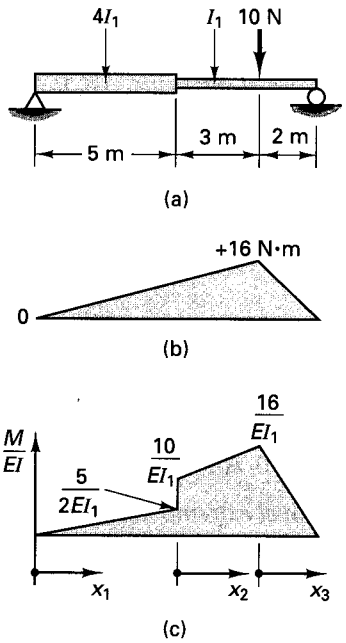


Fig. 14-14 Orígenes múltiples de x.

14-8. Funciones de singularidad para vigas

La posibilidad de escribir expresiones simbólicas matemáticas para funciones discontinuas de carga, fuerza cortante y momento a lo largo de una viga usando funciones de singularidad, fue introducida en la sección 7-14. Esas funciones pueden usarse en forma muy efectiva para la resolución de problemas de deflexiones en vigas estáticamente determinadas o indeterminadas. Sin embargo, conviene limitar su aplicación a *vigas prismáticas de EI constante*. De otra manera, surgen considerables complicaciones.

Además de la conveniencia de resolver con funciones de singularidad vigas de claros simples, esas funciones pueden también aplicarse a vigas sobre varios soportes. En todo caso, una sola función simbólica matemática para las fuerzas que actúan sobre una viga, junto con la ecuación 14-14c y después de integraciones sucesivas, da la solución para la deflexión en una viga.[10]

Se presentan a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 14-8

Resuelva el ejemplo 14-6 usando funciones de singularidad.

SOLUCIÓN

Primero, la función de singularidad se escribe para la fuerza concentrada P para el lado derecho de la ecuación 14-16. Luego, por integraciones sucesivas se determinan las constantes de integración según sea conveniente.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -P\langle x - a\rangle_*^{-1}$$

[10]Las funciones de singularidad pueden también usarse para construir líneas de influencia de vigas prismáticas. Las funciones especiales requeridas para tales problemas están dadas en E. P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids* (*Introducción a la mecánica de sólidos*), Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1968, pp. 403-405.

$$EI\frac{d^3v}{dx_3} = -P\langle x - a\rangle^0 + C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -P\langle x - a\rangle^1 + C_1x + C_2$$

Pero $M(L) = 0$; por consiguiente, $EIv''(0) = 0 = C_2$; y como $M(L) = 0$,

$$EIv''(L) = -Pb + C_1L = 0 \qquad \text{o} \qquad C_1 = Pb/L$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{P}{2}\langle x - a\rangle^2 + \frac{Pb}{2L}x^2 + C_3$$

$$EIv = -\frac{P}{6}\langle x - a\rangle^3 + \frac{Pb}{6L}x^3 + C_3x + C_4$$

Pero $v(0) = 0$; por consiguiente, $EIv(0) = 0 = C_4$. Similarmente, de o S $v(L) = 0$,

$$EIv(L) = 0 = -\frac{Pb^3}{6} + \frac{PbL^2}{6} + C_3L \qquad \text{o} \qquad C_3 = -\frac{Pb}{6L}(L^2 - b^2)$$

$$v = \frac{Pb}{6EIL}\left[x^3 - (L^2 - b^2)x - \frac{L}{b}\langle x - a\rangle^3\right] \tag{14-33}$$

Esta ecuación se aplica a todo el claro. Para $0 < x < a$, el último término debe omitirse. Esta expresión reducida concuerda con la ecuación 14-27 encontrada antes.

Ejemplo 14-9

Resuelva el ejemplo 14-5 usando una función de singularidad.

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación 14-14c usando una función de singularidad se considera todo el claro continuo de esta viga. La reacción desconocida R_B se trata como una fuerza concentrada hacia arriba. Aquí, además de las cuatro condiciones de frontera, debe notarse que la deflexión en B es cero. Éste es un enfoque general ya que no se utiliza la simetría del problema.

$$EI\frac{d^4v}{dx^4} = q(x) = -w_o + R_B\langle x - L\rangle^{-1}$$

$$EI\frac{d^3v}{dx^3} = -w_ox + R_B\langle x - L\rangle^0 + C_1$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_ox^2}{2} + R_B\langle x - L\rangle^1 + C_1x + C_2$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_o x^3}{6} + R_B\frac{\langle x-L\rangle^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EIv = -\frac{w_o x^4}{24} + R_B\frac{\langle x-L\rangle^3}{6} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Las condiciones estática y cinemática en A, B y C proporcionan información para determinar las constantes de integración:

$$EIv''(0) = 0: \qquad C_2 = 0$$

$$EIv(0) = 0: \qquad C_4 = 0$$

$$EIv(L) = 0: \qquad -\frac{w_o L^4}{24} + C_1\frac{L^3}{6} + C_3 L = 0$$

$$EIv(2L) = 0: \quad -\frac{2w_o L^4}{3} + R_B\frac{L^3}{6} + C_1\frac{4L^3}{3} + 2C_3 L = 0$$

$$EIv''(2L) = 0: \qquad -2w_o L^2 + R_B L + 2C_1 L = 0$$

Resolviendo las últimas tres ecuaciones simultáneamente,

$$C_1 = \frac{3}{8}w_o L \qquad C_3 = -\frac{w_o L^3}{48} \qquad \text{y} \qquad R_B = \frac{5}{4}w_o L$$

Sustituyendo esas constantes en la ecuación para la deflexión de la viga,

$$v = -\frac{w_o}{48EI}(2x^4 - 3Lx^3 + L^3 x - 10L\langle x-L\rangle^3)$$

Los primeros tres términos en el paréntesis concuerdan con los encontrados en el ejemplo 14-5. El último término en esta ecuación se aplica sólo para $x > L$, cuando toma la forma $10L(x-L)^3$.

14-9. Deflexiones de superposición

Los procedimientos de integración vistos antes para obtener las deflexiones elásticas de vigas cargadas son aplicables en general. Sin embargo, el lector debe observar que numerosos problemas con diferentes cargas han sido resueltos y están disponibles.[11] Casi todas las soluciones tabuladas son para condiciones de carga simple. Por tanto, en la práctica, las deflexiones de vigas sometidas a varias o complicadas condiciones de carga son usualmente sintetizadas a partir de las cargas más simples, usando el *principio de superposición*. Por ejemplo, el problema en la figura 14-15 puede separarse en tres casos diferentes como se muestra. La suma algebraica de las tres soluciones separadas da la deflexión total.

[11] Véase cualquier manual de ingeniería civil o mecánica.

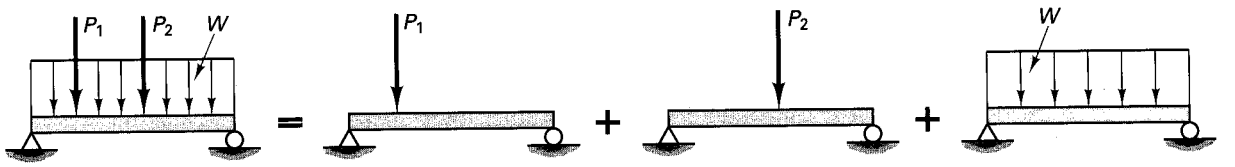


Fig. 14-15 Resolución de un problema complejo mediante varios problemas simples.

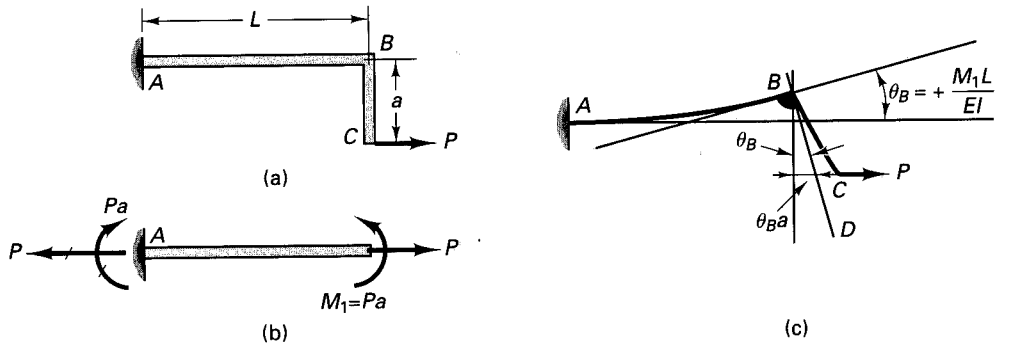


Fig. 14-16 Un método para analizar deflexiones en marcos.

El procedimiento de superposición para determinar deflexiones elásticas en vigas puede extenderse a sistemas estructurales que consistan en varios miembros sometidos a flexión. Por ejemplo, considere el marco simple mostrado en la figura 14-16(a), en el que se busca la deflexión del punto C debida a la fuerza aplicada P. La deflexión de la barra vertical BC sola puede encontrarse tratándola como un voladizo empotrado en B. Sin embargo, debido a la carga aplicada, el nodo B se deflexiona y gira. Esto se determina estudiando el comportamiento del miembro AB.

Un diagrama de cuerpo libre del miembro AB se muestra en la figura 14-16(b). Se ve que este miembro resiste una fuerza axial P y un momento $M_1 = Pa$. Usualmente el efecto de una fuerza axial P sobre las deflexiones debido a flexión puede ignorarse.[12] El alargamiento axial de un miembro es también, usualmente, muy pequeño en comparación con las deflexiones por flexión. Por tanto, el problema puede reducirse a determinar la deflexión y rotación de B causadas por un momento de extremo M_1. Esta solución se obtuvo en el ejemplo 14-2, dando el ángulo θ_B mostrado en la figura 14-16(c). Multiplicando el ángulo θ_B por la longitud a del miembro vertical, se determina la deflexión del punto C debida a la rotación del nudo B. Entonces, la deflexión del miembro BC tratado sólo se incrementa por $\theta_B a$. La deflexión vertical de C es igual a la deflexión vertical del punto B.

Al interpretar la forma de las estructuras deformadas, como la mostrada en la figura 14-16(c), debe tenerse en mente claramente que las deformaciones están dibujadas muy exageradamente en sus magnitudes. En la teoría de las deformaciones pequeñas vista aquí, los cosenos de todos los ángulos pequeños como el θ_B se toman igual a la unidad. Las deflexiones y las rotaciones de la curva elástica considerada aquí son pequeñas.

[12]Véase la Sección 16-9 sobre vigas-columnas.

Las vigas con voladizos pueden también analizarse convenientemente usando el concepto de superposición en la manera recién descrita. Por ejemplo, la porción de una viga entre los soportes, como AB en la figura 14-17(a), es aislada[13] y se encuentra la rotación de la tangente en B. El resto del problema es análogo al caso visto antes.

Aproximaciones similares a las hechas antes se hacen también en estructuras compuestas. Por ejemplo, en la figura 14-8(a), una viga simple descansa sobre un soporte rígido en un extremo y sobre un soporte flexible con constante de resorte k en el otro extremo. Si R_B es la reacción en B, el soporte B se asienta $\Delta = R_B/k$, figura 14-18(b). Una viga rígida tomaría el alineamiento de la línea AB', formando un ángulo $\theta_1 = \tan^{-1}(\Delta/L) \approx \Delta/L$ radianes con la línea horizontal. Para una viga elástica, la curva elástica entre A y B' puede encontrarse de la manera usual. Sin embargo, como las ordenadas tales como la ab, figura 14-18(b), forman un ángulo θ muy pequeño con la vertical, $ab \approx cb$. Por consiguiente, la deflexión de un punto como el b es muy aproximadamente $\theta_1 x + cb$. Las deflexiones de vigas en situaciones en que se tienen articulaciones intermedias, figura 14-18(c), se tratan similarmente. Para estas vigas, la tangente a las curvas elásticas adyacentes *no es continua* a través de una articulación.

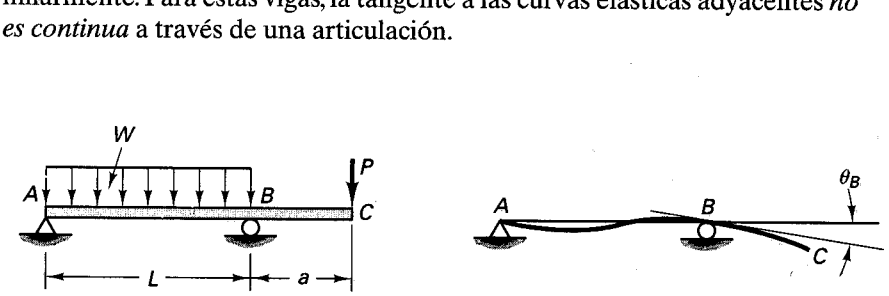


Fig. 14-17 Un método para analizar deflexiones de un voladizo.

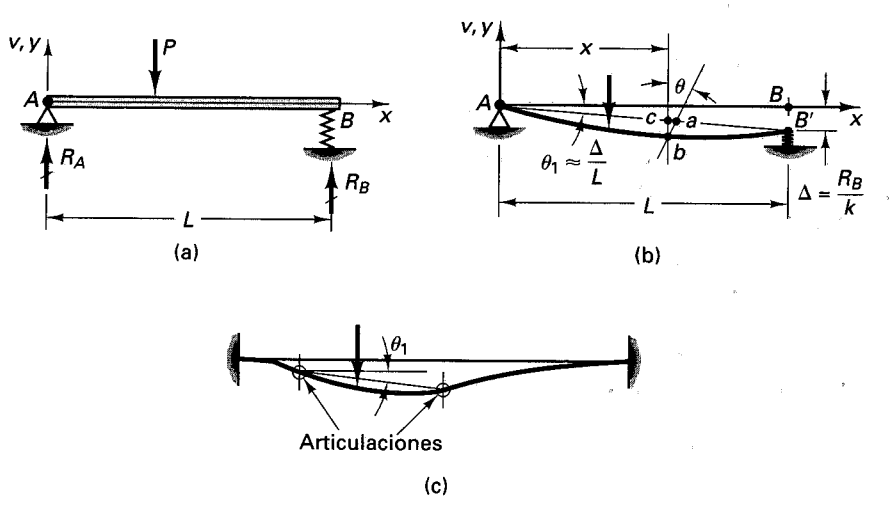


Fig. 14-18 Deflexiones en una estructura compuesta.

[13] El efecto del voladizo sobre el segmento de viga AB debe incluirse introduciendo el momento flexionante $-Pa$ en el soporte B.

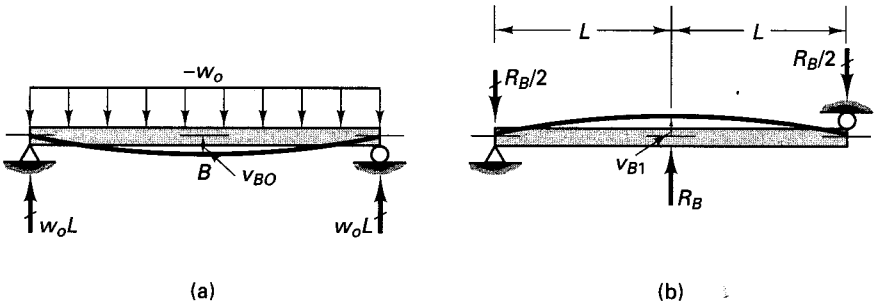


Fig. 14-19 Superposición de dos soluciones para determinar reacciones.

El método de superposición puede usarse de manera efectiva para determinar deflexiones o reacciones de vigas estáticamente indeterminadas. Como ilustración, consideremos la viga continua analizada en el ejemplo 14-5. Retirando el soporte R_B, la viga se deflexionará en el centro, como se muestra en la figura 14-19(a). Aplicando la fuerza R_B con dirección hacia arriba, la condición requerida de desplazamiento nulo en B puede restituirse. Las expresiones respectivas para esas deflexiones están dadas por las ecuaciones 14-22 y 14-30. Igualándolas, R_B resulta igual a $5w_oL/4$, valor que concuerda con el resultado previo (véase el ejemplo 14-5).

Ejemplo 14-10

Dos vigas en voladizo AD y BF de igual rigidez flexionante $EI = 24 \times 10^{12}$ N·mm^2, mostradas en la figura 14-20(a), están interconectadas por medio de una barra tensa de acero DC ($E = 200$ GPa). La barra DC tiene 5000 mm de longitud y un área transversal de 300 mm^2. Encuentre la deflexión del voladizo AD en D debida a una fuerza $P = 50$ kN aplicada en F.

SOLUCIÓN

Separando la estructura en D se obtienen los dos diagramas de cuerpo libre mostrados en las figuras 14-20(b) y (c). En ambos diagramas se muestra actuando la misma fuerza desconocida X (una condición de estática). La deflexión del punto D es la misma, ya sea que se considere la viga AD en D o bien la parte superior de la barra DC. La deflexión Δ_1 del punto D en la figura 14-20(b) es causada por X. La deflexión Δ_2 del punto D sobre la barra es igual a la deflexión v_c de la viga BF causada por las fuerzas P y X menos el alargamiento elástico de la barra DC.

Por estática:

$$X_{\text{tirón sobre } AD} = X_{\text{tirón sobre } DC} = X$$

Por geometría:

$$\Delta_1 = \Delta_2 \qquad \text{o} \qquad |v_D| = |v_C| - \Delta_{\text{barra}}$$

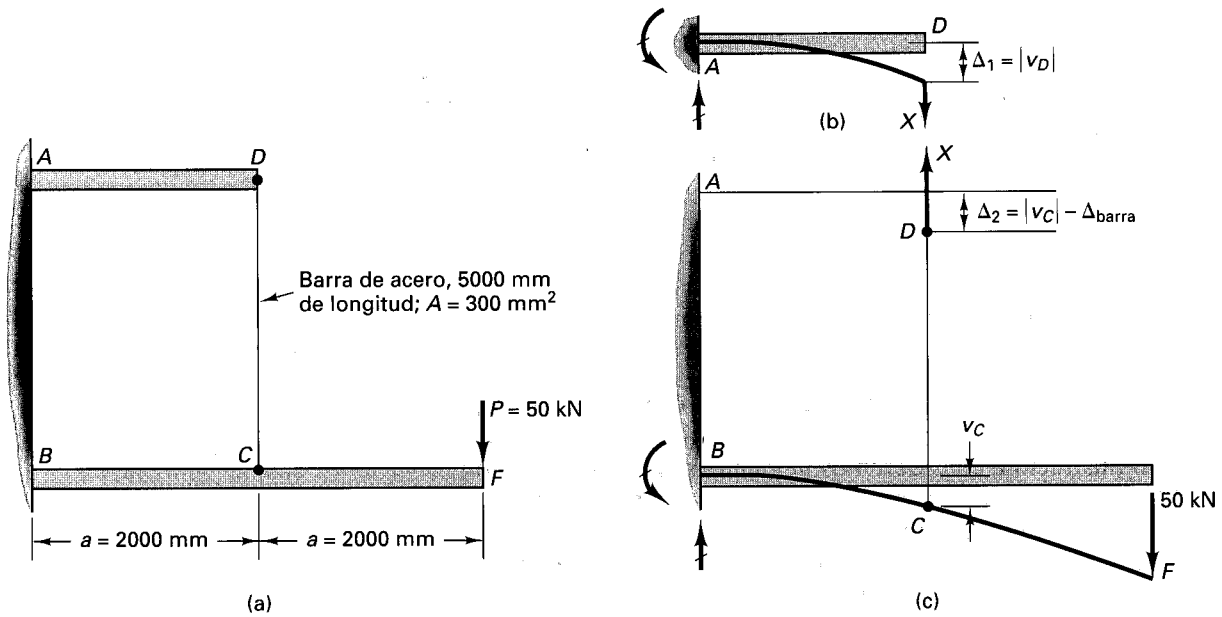


Fig. 14-20

Las deflexiones de las vigas pueden encontrarse usando los métodos vistos antes en este capítulo. Alternativamente, de la Tabla 10 del apéndice, en términos de la notación de este problema, se tiene

$$v_D = -\frac{Xa^3}{3EI} = -\frac{X \times 2^3 \times 10^9}{3 \times 24 \times 10^{12}} = -1.11 \times 10^{-4} X \text{ mm}$$

$$v_{C \text{ debida a } X} = +1.11 \times 10^{-4} X \text{ mm}$$

$$v_{C \text{ debida a } P} = -\frac{P}{6EI}[2(2a)^3 - 3(2a)^2 a + a^3] = -13.9 \text{ mm}$$

y usando la ecuación 3-4

$$\Delta_{\text{barra}} = \frac{XL_{CD}}{A_{CD}E} = \frac{X \times 5000}{300 \times 200 \times 10^3} = 0.833 \times 10^{-4} X \text{ mm}$$

Entonces, igualando las deflexiones y tratando las deflexiones hacia abajo como negativas,

$$-1.11 \times 10^{-4} X = -13.9 + 1.11 \times 10^{-4} X + 0.833 \times 10^{-4} X$$

Por consiguiente,

$$X = 45.5 \times 10^3 \text{ N}$$

y

$$v_D = -1.11 \times 10^{-4} \times 45.5 \times 10^3 = -5.05 \text{ mm}$$

Note particularmente que en esos cálculos, la deflexión del punto C es determinada por superposición de los efectos de la fuerza aplicada P en el extremo del voladizo y la fuerza desconocida X en C.

14-10. Deflexiones en flexión asimétrica

En el análisis anterior se supuso que las deflexiones eran causadas por flexión respecto a uno de los ejes principales de una viga. Sin embargo, si se tiene flexión asimétrica, las deflexiones se calculan en cada uno de los planos principales y las deflexiones halladas se *suman vectorialmente*. Un ejemplo se muestra en la figura 14-21 para una sección Z. Los ejes y y z son aquí los ejes principales que pasan por el centroide así como por el centro de cortante de la sección transversal. Una deflexión positiva v_1 se muestra para la deflexión de la viga que tiene lugar en el plano xy y, similarmente, w_1 corresponde a la deflexión en el plano xz. Su suma vectorial AA' es la deflexión total de la viga.

Para prevenir la torsión, las fuerzas aplicadas deben actuar por el centro de cortante de la sección transversal. Si no, los esfuerzos y deformaciones torsionantes tratados en el capítulo 6 deben ser también considerados.

Las vigas que tienen magnitudes considerablemente diferentes en sus momentos de inercia con respecto a los dos ejes principales son muy sensitivas a la alineación de la carga. Como se muestra en el siguiente ejemplo, incluso una pequeña inclinación de la fuerza aplicada con respecto a la vertical causa grandes desplazamientos laterales (y también altos esfuerzos).

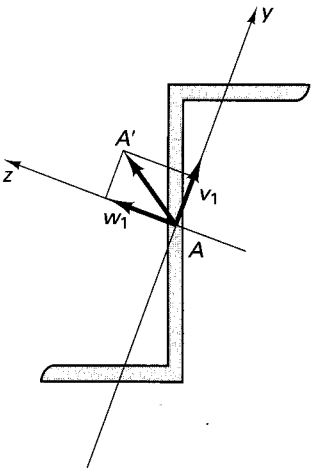


Fig. 14-21 Deflexión de una viga sometida a flexión asimétrica.

Ejemplo 14-11

Un canal C380 × 50 de acero en voladizo de 2540 mm de longitud está sometido a una fuerza inclinada P de 9 kN que pasa por el centro de cortante, como se muestra en las figuras 14-22(a) y (b). Determine la deflexión en el extremo libre bajo la carga aplicada. Considere $E = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

Las propiedades de este canal se dan en la Tabla 5 del apéndice; $I_z = 131 \times 10^6$ mm^4 e $I_y = 3.38 \times 10^6$ mm^4. La deflexión máxima de un voladizo flexionado respecto a cualquier eje principal está dada en la Tabla 10 del apéndice: $v_{\text{máx}} = PL^3/3EI$. Por consiguiente, identificando por los subíndices H y

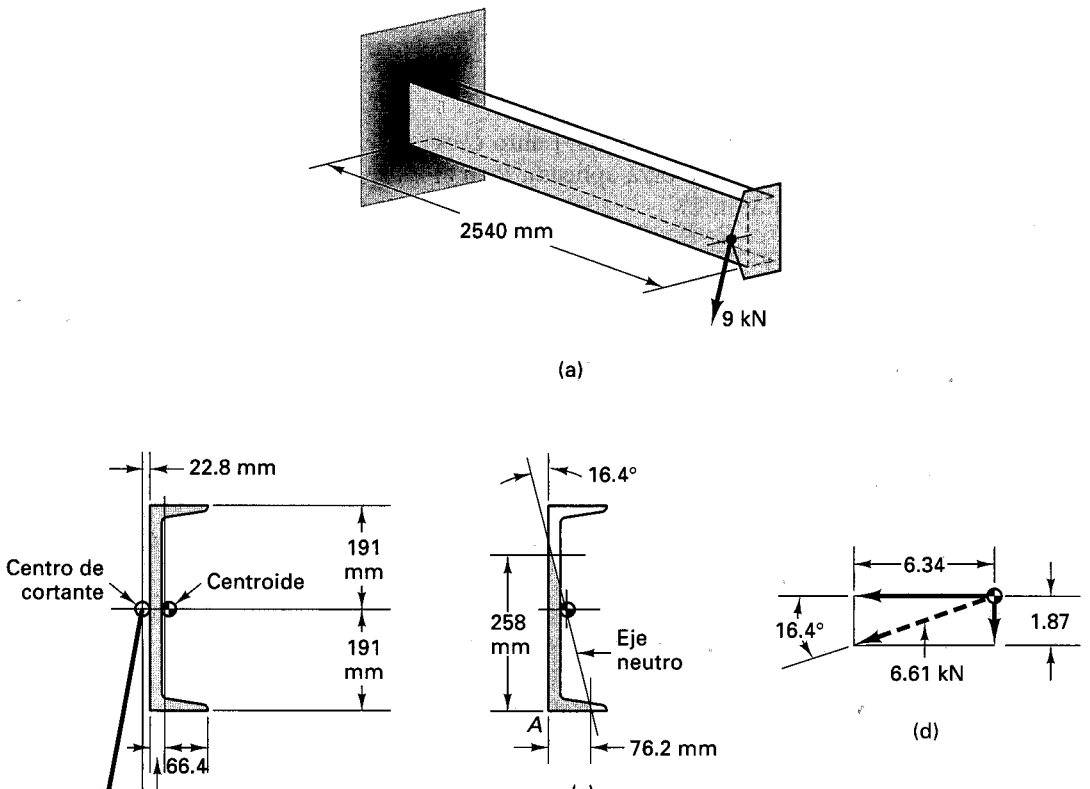


Fig. 14-22

V las componentes horizontal y vertical de la deflexión Δ del extremo y por P la fuerza aplicada, se tiene

$$\Delta_H = \frac{P_H L^3}{3EI_y} = \frac{(9 \times 10^3 \operatorname{sen} 5°) \times 2540^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 3.38 \times 10^6} = 6.34 \text{ mm}$$

$$\Delta_V = \frac{P_V L^3}{3EI_z} = \frac{(9 \times 10^3 \cos 5°) \times 2540^3}{3 \times 200 \times 10^3 \times 131 \times 10^6} = 1.87 \text{ mm}$$

Esas deflexiones y su suma vectorial de 6.61 mm, que forma un ángulo de 16.4° con la horizontal, se muestran en la figura 14-22(d).

Es instructivo notar que, como es de esperarse, la *deflexión máxima ocurre en la dirección normal al eje neutro*. Este eje puede localizarse efectuando un análisis de esfuerzos y encontrando los puntos de esfuerzo cero. Un punto está a 258 mm por arriba de A y el otro a 76.2 mm a la derecha

de A, como se muestra en la figura 14-22(c). Alternativamente, el eje neutro puede localizarse usando la ecuación 9-3. Usando este enfoque,

$$\tan\beta = \frac{I_z}{I_y}\tan\alpha = \frac{131 \times 10^6}{3.38 \times 10^6}\tan 5° = 3.39 \qquad \text{y} \qquad \beta = 73.6°$$

y $90° - \beta = 16.4°$ concuerda con el ángulo mostrado en la figura 14-22(d).

14-11. Método de la energía para deflexiones e impacto

Un tratamiento amplio del método de la energía para encontrar deflexiones en vigas se da en el capítulo 19. Sin establecer el teorema necesario, es posible resolver sólo una clase muy limitada de problemas. A menos que se tengan condiciones especiales como la simetría, las soluciones directas basadas en el principio de la conservación de la energía deben limitarse a la acción de una sola fuerza o momento. Este enfoque limitado se ha encontrado que es de utilidad en los problemas de fuerza axial, torsión y flexión pura en los capítulos 3, 6 y 8. En vigas, se puede ir un paso adelante e incluir, en caso necesario, las energías de deformación unitaria por flexión y cortante. El procedimiento basado en igualar la energía de deformación unitaria interna U con el trabajo externo W_e sigue siendo el mismo.

Este método permite una comparación de las deflexiones causadas por flexión respecto a las causadas por cortante. El siguiente ejemplo tiene que ver con tal problema, donde en la solución se supone que la fuerza es *aplicada gradualmente*. En contraste, en el segundo ejemplo, se considera el impacto sobre una viga causado por una masa que cae sobre ella; en este ejemplo, el efecto de la deformación por cortante se desprecia.

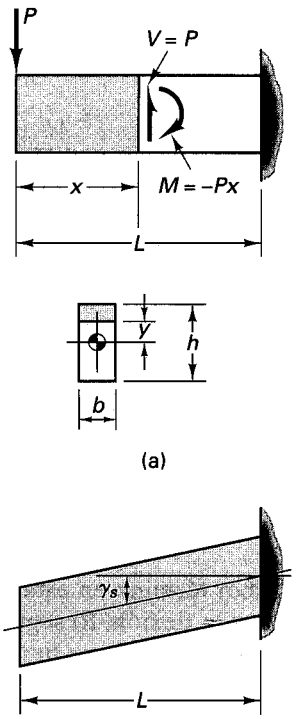


Fig. 14-23

Ejemplo 14-12

Encuentre la deflexión máxima debida a la fuerza P aplicada en el extremo de un voladizo que tiene una sección transversal rectangular, figura 14-23. Considere el efecto de las deformaciones por flexión y cortante.

SOLUCIÓN

Si la fuerza P es gradualmente aplicada a la viga, el trabajo externo $W_e = \frac{1}{2}P\Delta$, donde Δ es la deflexión total del extremo de la viga. La energía de deformación unitaria interna consiste en dos partes. Una parte es debida a los esfuerzos de flexión; la otra es causada por los esfuerzos cortantes. Esas energías de deformación unitaria pueden superponerse directamente.

La energía de deformación unitaria en flexión pura se obtiene de la ecuación 8-24, $U_{\text{flexión}} = \int M^2\,dx/2EI$, notando que $M = -Px$. La energía de deformación unitaria en cortante se encuentra de la ecuación 5-5, $U_{\text{cort}} = \int (\tau^2/2G)\,dV$. En este caso particular, la fuerza cortante en cada sección es igual a la fuerza aplicada P y el esfuerzo cortante τ, de acuerdo con la ecuación 10-7, se distribuye parabólicamente según

$$\tau = \frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

En cualquier nivel y, este esfuerzo cortante no varía según el ancho b y la longitud L de la viga. Por tanto, el volumen infinitesimal dV en la expresión de la energía cortante se toma como $Lb\,dy$. Igualando la suma de esas dos energías de deformación internas con el trabajo externo, se obtiene la deflexión total:

$$U_{\text{flexión}} = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px)^2\,dx}{2EI} = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

$$U_{\text{cortante}} = \int_{vol} \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \frac{1}{2G}\int_{-h/2}^{+h/2}\left\{\frac{P}{2I}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]\right\}^2 Lb\,dy \qquad (14\text{-}34)$$

$$= \frac{P^2Lb}{8GI^2}\,\frac{h^5}{30} = \frac{P^2Lbh^5}{240G}\left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2L}{5AG}$$

donde $A = bh$ es el área de la sección transversal de la viga. Entonces

$$W_e = U = U_{\text{flexión}} + U_{\text{cortante}}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5AG} \quad \text{o} \quad \Delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5AG}$$

El primer término en esta respuesta, $PL^3/3EI$, es la deflexión de la viga debido a la flexión. El segundo término es la deflexión debido al cortante, suponiendo que no hay restricción al alabeo en el extremo empotrado. El factor $\alpha = 6/5$ varía para diferentes formas de la sección transversal, ya que depende de la naturaleza de la distribución del esfuerzo cortante.

Es instructivo reescribir la expresión para la deflexión total Δ como

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3E}{10G}\,\frac{h^2}{L^2}\right) \qquad (14\text{-}35)$$

donde, como antes, el último término da la deflexión debida al cortante.

Para tener una mejor idea de este problema, reemplacemos en la última expresión la razón E/G por 2.5, que es un valor típico para los aceros. Entonces,

$$\Delta = (1 + 0.75h^2/L^2)\Delta_{\text{flexión}} \qquad (14\text{-}35a)$$

En esta ecuación puede verse que para una viga corta (por ejemplo, una con $L = h$), la deflexión total es 1.75 veces la debida sólo a flexión. Por consiguiente, la deflexión por cortante es muy importante en casos compa-

rables. Por otra parte, si $L = 10h$, la deflexión por cortante es menor que el 1%. Las pequeñas deflexiones debido al cortante son típicas de vigas esbeltas ordinarias. Este hecho puede notarse también en la ecuación original para Δ. Ahí, la deflexión por flexión se incrementa con el cubo del claro, mientras que la deflexión por cortante crece linealmente. Por consiguiente, conforme la longitud de la viga aumenta, la deflexión por flexión se vuelve rápidamente dominante. Por esta razón, usualmente es posible despreciar la deflexión debida al cortante.

Ejemplo 14-13

Encuentre las deflexiones instantáneas máximas y los esfuerzos por flexión en la viga de acero de 50 × 50 mm mostrada en la figura 14-24 al ser golpeada por una masa de 15.3 kg que cae desde una altura de 75 mm sobre la viga, si (a) la viga está sobre soportes rígidos y (b) la viga está soportada en cada extremo sobre resortes. La constante k de cada resorte es de 300 N/mm. Sea $E = 200$ GPa.

SOLUCIÓN

La deflexión del sistema debido a una fuerza estáticamente aplicada de 15.3 kg = 15.3 × 9.81 = 150 N es calculada primero. En el primer caso, esta deflexión es la de la viga sola; véase la Tabla 10 del apéndice. En el segundo caso, la deflexión estática de la viga es incrementada por la deflexión de los resortes sometidos cada uno a una fuerza de 75 N. Los factores de impacto son entonces calculados con la ecuación 3-19 o la ecuación 3-20. Las deflexiones estáticas y los esfuerzos son multiplicados por los factores de impacto para obtener las respuestas.

(a)

$$\Delta_{est} = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{150 \times 1000^3}{48 \times 200 \times 10^3 \times 50^4/12} = 0.030 \text{ mm}$$

$$\text{factor de impacto} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{est}}}$$

$$= 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 75}{0.030}} = 71.7$$

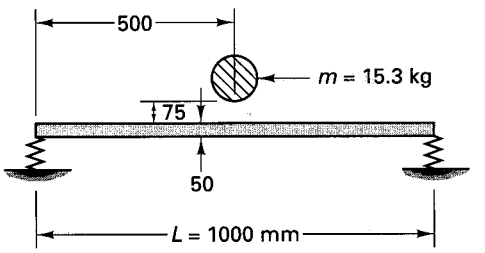


Fig. 14-24

(b)

$$\Delta_{est} = \Delta_{viga} + \Delta_{res} = 0.030 + \frac{75}{300} = 0.280 \text{ mm}$$

$$\text{factor de impacto} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 75}{0.280}} = 24.2$$

Para cualquier caso, el esfuerzo por flexión máximo en la viga debido a una aplicación estática de P es

$$(\sigma_{máx})_{est} = \frac{M}{S} = \frac{PL}{4S} = \frac{150 \times 1000}{4 \times 50^3/6} = 1.800 \text{ MPa}$$

Multiplicando las deflexiones y los esfuerzos estáticos por los respectivos factores de impacto se obtienen los resultados requeridos

	Estática		*Dinámica*	
	Con resortes	*Sin resortes*	*Con resorte*	*Sin resorte*
$\Delta_{máx}$, mm	0.280	0.030	6.78	2.15
$\sigma_{máx}$, MPa	1.80	1.80	43.6	129

Se ve en esta tabla que grandes deflexiones y esfuerzos son causados por una carga dinámicamente aplicada. El esfuerzo para la condición sin resortes es particularmente grande; sin embargo, debido a la flexibilidad de la viga, no es excesivo.

14-12. Deflexión inelástica de vigas

Todas las soluciones precedentes para deflexiones en vigas son aplicables sólo si el material se comporta elásticamente. Esta limitación es el resultado de aplicar la ley de Hooke en la relación deformación unitaria-curvatura, ecuación 14-5, para obtener la ecuación momento-curvatura, ecuación 14-6. Los procedimientos subsecuentes para aproximar las curvaturas por d^2v/dx^2 y los esquemas de integración, no dependen de las propiedades del material.

La superposición no se aplica a problemas inelásticos ya que las deflexiones no están relacionadas linealmente con las fuerzas aplicadas. Como consecuencia, en algunos casos se llevan a cabo soluciones lineales en partes para incrementos de carga pequeña o desplazamientos hasta que se alcanza el nivel deseado de carga o desplazamiento. Tales cálculos lineales en partes se efectúan con la ayuda de una computadora. Alternativamente, las soluciones por tanteos, que son tardadas, se usan para calcular deflexiones en vigas indeterminadas. Sin embargo, es posible desarrollar soluciones simples para las *resistencias últimas* de vigas y marcos estáticamente determinados e indeterminados *suponiendo un comportamiento ideal plástico*

del material. Para tal método debe desarrollarse una relación entre el momento flexionante y la curvatura en una sección de la viga. En el siguiente ejemplo se ofrece una ilustración que define tal relación. Esencialmente es este el enfoque en que se basa el capítulo 20 para los análisis de estado límite plástico de vigas y marcos simples estáticamente determinados e indeterminados.

El segundo ejemplo que sigue trata del análisis de las deflexiones en una viga elastoplástica estáticamente determinada. La solución demuestra que en tanto una parte de la sección transversal de la viga permanezca elástica, la deflexión permanece acotada (es decir, finita) y puede ser calculada.

Ejemplo 14-14

Determine y grafique la relación momento-curvatura para una viga rectangular elástica idealmente plástica.

SOLUCIÓN

En una viga rectangular elastoplástica en y_o, donde ocurre la unión de las zonas elástica y plástica, la deformación unitaria $\varepsilon_x = \pm\varepsilon_{yp}$; véase la figura 8-26. Por tanto, de acuerdo con la ecuación 14-5, con la curvatura $1/\rho = \kappa$,

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = -\frac{\varepsilon_{yp}}{y_o} \qquad \text{y} \qquad \kappa_{yp} = -\frac{\varepsilon_{yp}}{h/2}$$

donde la última expresión da la curvatura del miembro bajo fluencia inminente cuando $y_o = h/2$. De esas relaciones,

$$\frac{y_o}{h/2} = \frac{\kappa_{yp}}{\kappa}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 8-29, se obtiene la relación momento-curvatura requerida:

$$M = M_p\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{y_o}{h/2}\right)^2\right] = \frac{3}{2}M_{yp}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\kappa_{yp}}{\kappa}\right)^2\right] \qquad (14\text{-}36)$$

Esta función es graficada en la figura 14-25. Note que rápidamente tiende a la asíntota. A una curvatura doble de la asociada con la fluencia inminente, once doceavos, o 91.6%, del momento plástico último M_p ya se ha alcanzado. En este punto, la mitad media de la viga permanece elástica.

Al liberar el momento aplicado, la viga rebota elásticamente, como se muestra en la figura. Con base en esto puede determinarse la curvatura residual.

El lector debe recordar que la razón de M_p a M_{yp} varía para diferentes secciones transversales. Por ejemplo, para una viga típica de acero de patín ancho, M_p/M_{yp} es aproximadamente igual a 1.14. Establecer las asíntotas para momentos plásticos da una base práctica para encontrar

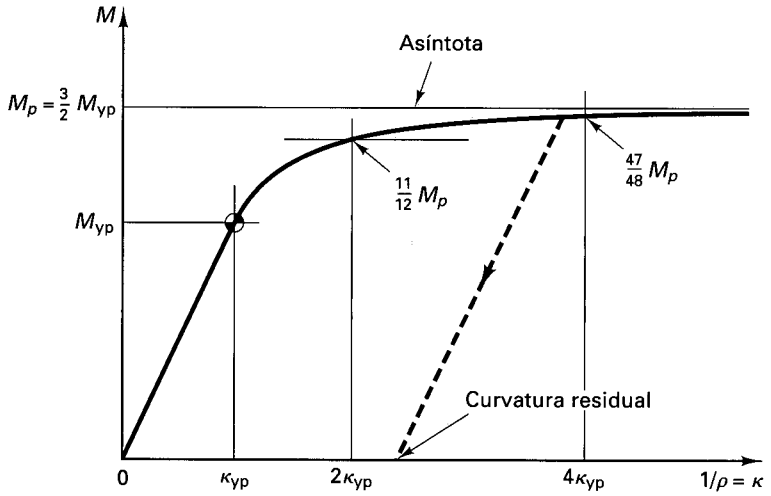


Fig. 14-25 Relación momento-curvatura para una viga rectangular elastoplástica.

el estado límite plástico último para vigas y marcos que se verán en el capítulo 20.

Ejemplo 14-15

Una viga en voladizo de acero dulce de 3 in de ancho tiene las dimensiones mostradas en la figura 14-26(a). Determine la deflexión en el extremo libre causada al aplicar dos cargas de 5 kips cada una. Suponga $E = 30 \times 10^3$ ksi y $\sigma_{yp} = \pm 40$ ksi.

SOLUCIÓN

El diagrama de momentos se muestra en la figura 14-26(b). De $\sigma_{máx} = Mc/I$, se encuentra que el esfuerzo máximo en el segmento *ab* de la viga es de 24.4 ksi, lo que indica comportamiento elástico. Un cálculo análogo para la porción menor de la viga da un esfuerzo de 55 ksi, lo que no es posible ya que el material cede a 40 ksi.

Una comprobación de la capacidad última de la sección de 2 in de peralte, con base en la ecuación 8-27, da

$$M_p = M_{últ} = \sigma_{yp} \frac{bh^2}{4} = \frac{40 \times 3 \times 2^2}{4} = 120 \text{ k-in}$$

Este cálculo muestra que aunque la viga cede parcialmente, puede soportar el momento aplicado. El momento aplicado es $\frac{11}{12} M_p$. De acuerdo con los resultados encontrados en el ejemplo anterior, esto significa que la curvatura en la sección de 2 in de peralte es el doble que la presente al principio

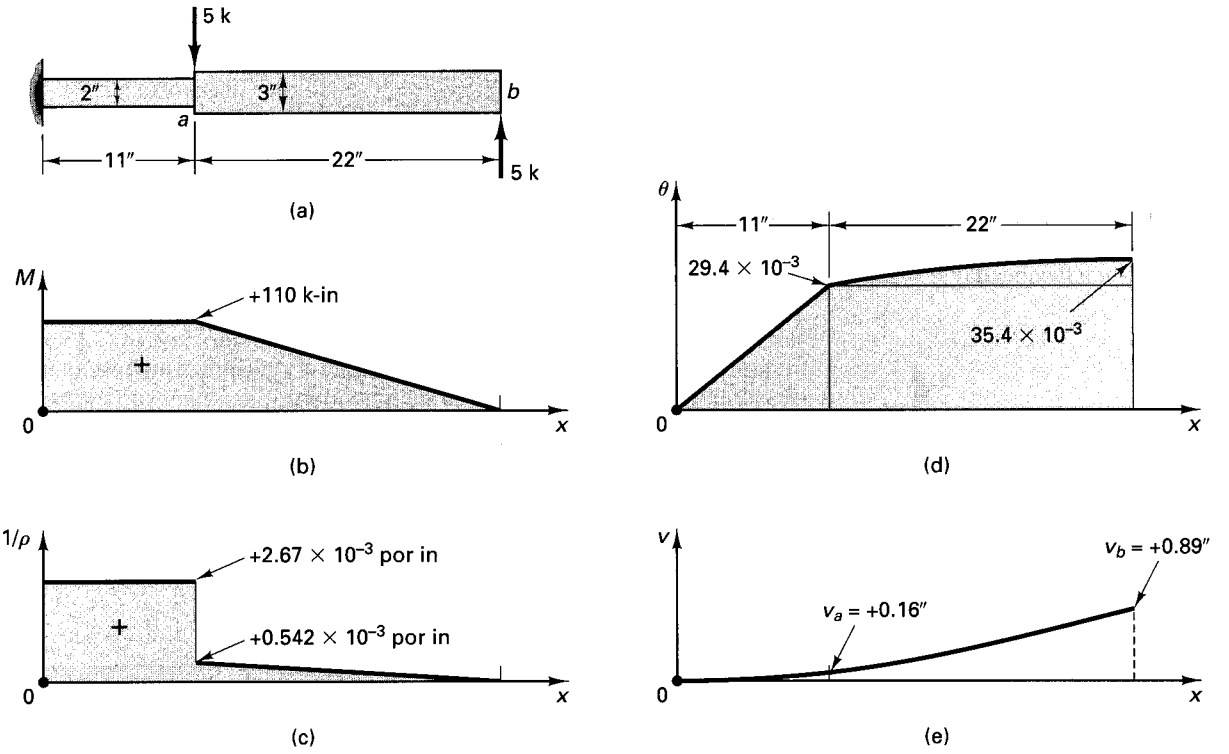


Fig. 14-26

de la fluencia. Por tanto, la curvatura en el segmento de 11 in de la viga adyacente al soporte es

$$\frac{1}{\rho} = 2\kappa_{yp} = 2\frac{\varepsilon_{yp}}{h/2} = 2\frac{\sigma_{yp}}{Eh/2} = \frac{2 \times 40}{30 \times 10^3 \times 1} = 2.67 \times 10^{-3} \text{ por in}$$

La curvatura máxima para el segmento *ab* es

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{máx}}{EI} = \frac{\sigma_{máx}}{Ec} = \frac{24.4}{3 \times 10^3 \times 1.5} = 0.542 \times 10^{-3} \text{ por in}$$

Esos datos sobre curvaturas están graficados en la figura 14-26(c). Al integrar dos veces con $\theta(0) = 0$ y $v(0) = 0$, se obtiene la curva de deflexión dibujada en la figura 14-26(e). La deflexión del extremo libre es de 0.89 in hacia arriba.

Si las cargas aplicadas se retiran, la viga rebotará elásticamente. Como puede verificarse por medio de un análisis elástico, esto ocasionaría una deflexión en el extremo libre de 0.64 in. Por tanto, quedaría una deflexión residual de 0.25 in en este punto. La curvatura residual quedaría confinada al segmento de 2 in de peralte de la viga.

Si sólo se aplicara la carga en el extremo, el momento de 165 k-in en el extremo izquierdo excedería la capacidad por momento plástico de 120 k-in y la viga se colapsaría. La superposición no puede usarse para resolver este problema.

PROBLEMAS

Sección 14-2

14-1. Una tira de acero de 2 × 6 mm y 3142 mm de longitud está empotrada en un extremo, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el momento de extremo requerido para que la tira toque la pared? ¿Cuál será el esfuerzo máximo cuando la tira esté en la condición flexionada? $E = 200$ GPa.

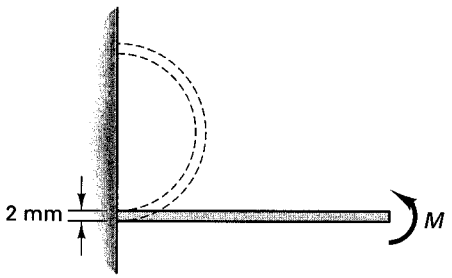


Fig. P14-1

14-2. A una barra redonda de aluminio de 6 mm de diámetro se le da forma de anillo circular con diámetro medio de 3 m. ¿Cuál es el esfuerzo máximo en la barra? $E = 70$ GPa.

14-3. ¿Cuál será el radio de curvatura de una viga W8 × 18 flexionada respecto al eje $X-X$ si el esfuerzo en las fibras extremas es de 36 ksi? $E = 29 \times 10^6$ psi.

14-4. Suponga que una barra rectangular recta, después de un severo trabajado en frío, tiene una distribución de esfuerzos residuales como la encontrada en el ejemplo 8-9; véase la figura 8-25. (a) Si una sexta parte del espesor de esta barra es eliminada por maquinado en sus partes superior e inferior, reduciendo la barra a dos tercios de su espesor original, ¿cuál será la curvatura ρ de la barra maquinada? Asigne los parámetros necesarios para resolver este problema en términos generales. (b) Para las condiciones previas, si la barra es cuadrada con 24 mm de lado y 1000 mm de longitud, ¿cuál será la deflexión de la barra en el centro desde la cuerda a través del extremo? Sean $\sigma_{yp} = 400$ MPa y $E = 200$ GPa. Note que para deflexiones pequeñas, la deflexión máxima desde una cuerda de longitud L de una curva doblada en forma de círculo de radio R es aproximadamente[1] $L^2/(8R)$. (*Sugerencia*: La operación de maquinado elimina los esfuerzos microrresiduales internos.)

Sección 14-7

14-5. Si la ecuación de la curva elástica para una viga simplemente apoyada de longitud L y EI constante es $v = (k/360EI)(-3x^5 + 10x^3L^2 - 7xL^4)$, ¿cómo está cargada la viga?

[1]Esto se obtiene conservando el primer término del desarrollo en serie de $R(1-\cos\theta)$, donde θ es la mitad del ángulo incluido.

14-6. Una viga elástica con EI constante y longitud L tiene la forma deflexionada $EIv(x) = -M_o(x^3 - x^2L)/4L$. (a) Determine la carga y condiciones de soporte. (b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para la viga y esboce la forma deflexionada.

14-7. Resuelva el ejemplo 14-2 situando el origen del sistema coordenado en el extremo libre.

14-8. Usando la ecuación diferencial exacta, ecuación 14-8, demuestre que la ecuación de la curva elástica en el ejemplo 14-2 es $x^2 + (v - \rho)^2 = \rho^2$, donde ρ es una constante. (*Sugerencia:* Haga $dv/dx = \tan\theta$ e integre.)

14-9 al 14-29. (a) Determine las ecuaciones de las curvas elásticas para las vigas mostradas en las figuras debido a la carga aplicada para las condiciones de frontera dadas. A menos que se indique otra cosa, use la ecuación 14-14a o la 14-14c, dependiendo de cuál sea más fácil de aplicar. En todos los casos, EI es constante, excepto en el problema 14-20, donde EI es variable. Siempre que se pueda aproveche la simetría o la antisimetría. (b) Sólo para los casos estáticamente indeterminados,

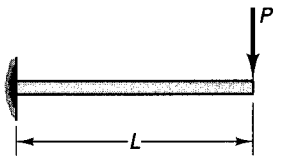


Fig. P14-9

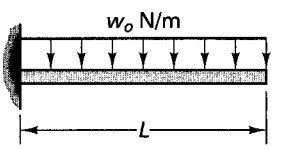


Fig. P14-10

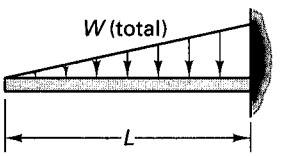


Fig. P14-11

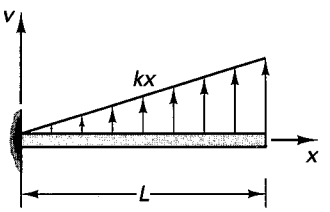


Fig. P14-12

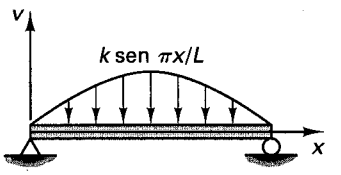


Fig. P14-13

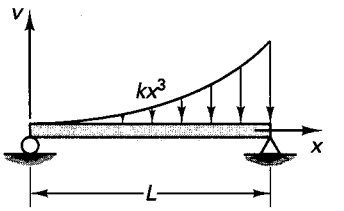


Fig. P14-14

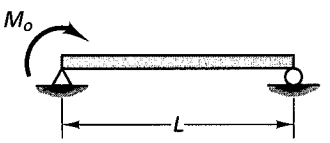


Fig. P14-15

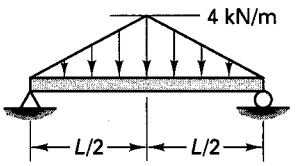


Fig. P14-16

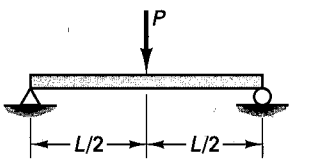


Fig. P14-17

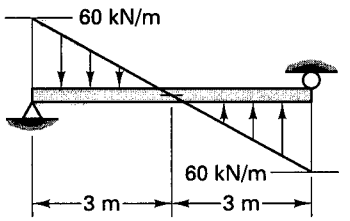


Fig. P14-18

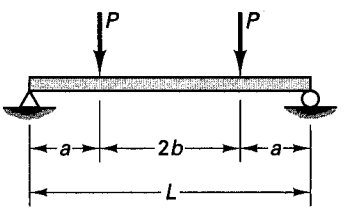


Fig. P14-19

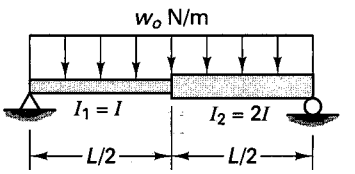


Fig. P14-20

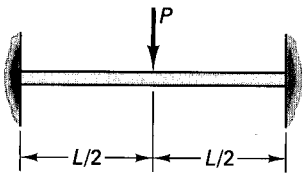


Fig. P14-21

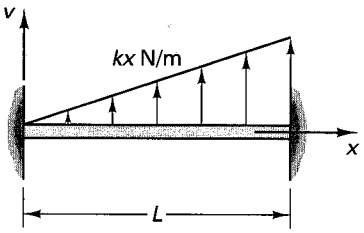


Fig. P14-22

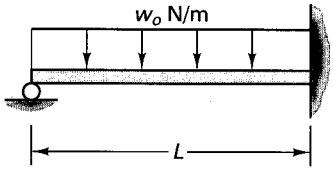


Fig. P14-23

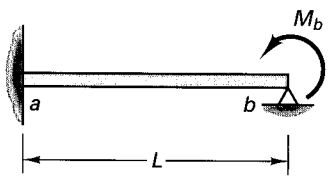


Fig. P14-24

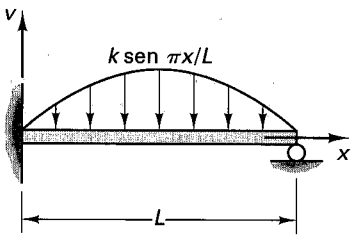


Fig. P14-25

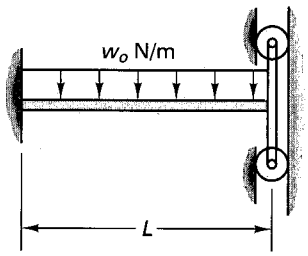


Fig. P14-26

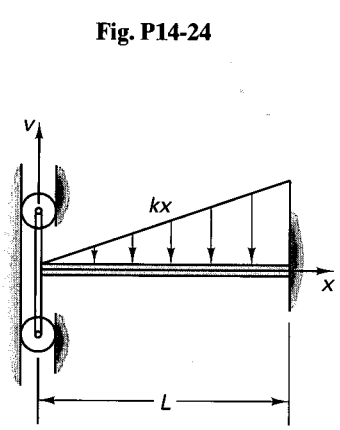


Fig. P14-27

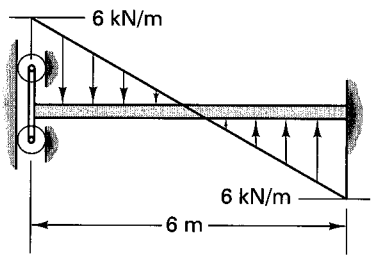


Fig. P14-28

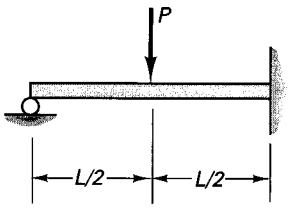


Fig. P14-29

dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, indicando todas las ordenadas críticas.

Nota: En los problemas 14-9, 14-10 y 14-15, es más sencillo considerar el origen a la derecha y dirigir el eje x hacia la izquierda.

14-30 al 14-32. (a) Determine ecuaciones para las curvas elásticas debido a un pequeño desplazamiento vertical impuesto Δ del extremo de las vigas de longitud L y EI constante mostradas en las figuras. (b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante.

Fig. P14-30

Fig. P14-31

Fig. P14-32

14-33. Si en el problema 14-17 el área de la sección transversal de la viga es constante, la mitad izquierda del claro está hecha de acero ($E = 200$ GPa) y la mitad derecha está hecha de una aleación de aluminio ($E = 70$ GPa), determine la ecuación de la curva elástica.

14-34. ¿Cuál es la ecuación de la curva elástica para la viga en voladizo de ancho y resistencia flexionante constantes, cargada en el extremo por una fuerza concentrada P? Véanse las figuras 13-18(a) y (d). Desprecie el efecto del incremento requerido en el peralte de la viga en el extremo por cortante.

14-35. Una viga simple con un voladizo tiene rigidez flexionante EI constante y está cargada como se muestra en la figura. Para la porción AB de la viga, (a) encuentre la ecuación de la curva elástica debido a la carga aplicada de $2w_o$ N/m, y (b) determine la deflexión máxima entre los soportes y la deflexión a la mitad de la distancia entre los soportes.

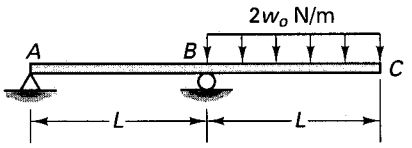


Fig. P14-35

14-36. Una viga simple con un voladizo de rigidez flexionante EI constante está cargada como se muestra en la figura. (a) Determine la longitud a del voladizo tal que la curva elástica sea horizontal sobre el soporte B. (b) Determine la deflexión máxima entre los soportes.

14-37. Usando un procedimiento semigráfico, como el mostrado en las figuras 14-9 y 14-13, encuentre la deflexión de la viga en el punto de la carga aplicada; véase la figura. Sea $I_1 = 400$ in^4, $I_2 = 300$ in^4 y $E = 30 \times 10^6$ psi.

14-38. Usando un procedimiento semigráfico como el mostrado en las figuras 14-9 y 14-13, encuentre la deflexión en el centro del claro para la viga cargada como se muestra en la figura. Ignore el efecto de la fuerza axial sobre la deflexión. EI es constante para la viga.

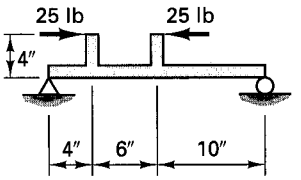


Fig. P14-38

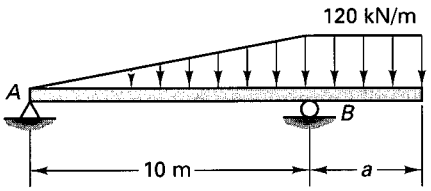


Fig. P14-36

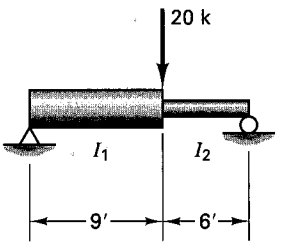


Fig. P14-37

14-39. Una viga de acero con claro de 30 ft debe soportar una carga uniformemente distribuida de 1.2 k/ft, incluido su propio peso. Seleccione la sección W requerida de peso mínimo usando la Tabla 4 abreviada en el apéndice para flexión respecto a ejes fuertes. El esfuerzo de flexión permisible es de 24 ksi y el de cortante es de 14.4 ksi. Se requiere también que la deflexión máxima no exceda de 1 in. Este requisito corresponde a 1/360 de la longitud del claro y a menudo se usa para limitar la deflexión debida a la carga aplicada en el diseño de edificios. $E = 29 \times 10^3$ ksi.

14-40. Una viga de madera con claro de 24 ft debe soportar una carga uniformemente distribuida de 1.2 k/ft, incluido su propio peso. Seleccione el tamaño requerido de la Tabla 9 en el apéndice. El esfuerzo de flexión permisible es de 2000 psi y el de cortante es de 100 psi. La deflexión está limitada a 1/360 de la longitud del claro.

14-41. La deflexión máxima para una viga simple con claro de 24 ft que soporta una carga uniformemente distribuida total de 40 k, incluido su propio peso, está limitada a 0.5 in. (a) Encuentre la viga I de acero requerida. Sea $E = 30 \times 10^6$ psi. (b) ¿Qué tamaño de una viga de aleación de aluminio se necesitaría para los mismos requisitos? Sea $E = 10 \times 10^6$ psi y use la Tabla 3 en el apéndice para las propiedades de la sección. (c) Determine los esfuerzos máximos en ambos casos.

14-42. Una viga de madera de 6 × 12 in (tamaño nominal) uniformemente cargada tiene un claro de 10 ft y se considera que tiene características satisfactorias de deflexión. Seleccione una viga I de aleación de aluminio, una viga I de acero y una viga I de poliestireno que tengan las mismas características de deflexión. Al escoger las vigas, ignore las diferencias en sus propios pesos. Sea $E = 1.5 \times 10^6$ psi para la madera y el poliestireno, $E = 10 \times 10^6$ psi para el aluminio y $E = 30 \times 10^6$ psi para el acero. Para las propiedades de sección de todas las vigas I, use la Tabla 4 del apéndice.

Sección 14-8

14-43. Resuelva el problema 14-19 usando funciones de singularidad.

14-44. Resuelva el problema 14-29 usando funciones de singularidad.

14-45 al 14-50. Usando funciones de singularidad, obtenga ecuaciones para las curvas elásticas de las vigas cargadas como se muestra en las figuras. *EI* es constante para todas las vigas.

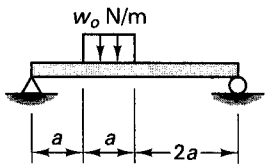


Fig. P14-45

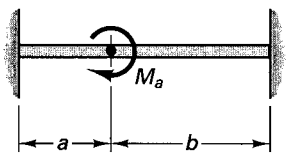


Fig. P14-46

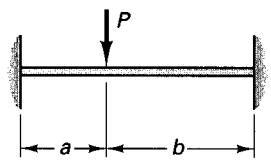


Fig. P14-47

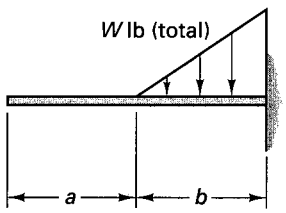


Fig. P14-48

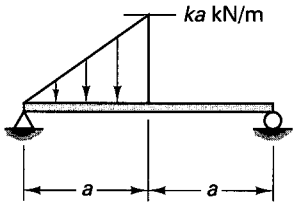


Fig. P14-49

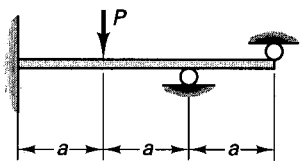


Fig. P14-50

Sección 14-9 Use las ecuaciones de deflexión dadas en los ejemplos 14-2 al 14-6 y la Tabla 10 del apéndice

14-51. (a) De la solución dada en la Tabla 10 en el apéndice para un voladizo cargado con una fuerza concentrada P en su extremo libre, demuestre que la deflexión en A para el voladizo mostrado en la figura es

$$v_A = \frac{Pb^2}{6EI}(3L - b)$$

(b) Demuestre que la deflexión en A debida a la fuerza P en B es igual a la deflexión en B debida a la fuerza P en A. (Véase la sección 19-4 sobre el teorema de Maxwell relativo a deflexiones recíprocas.)

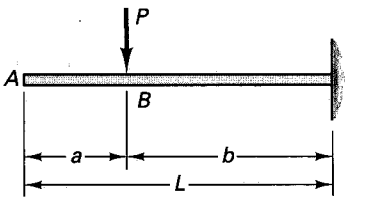


Fig. P14-51

14-52. Los datos para la viga cargada como se muestra en la figura 14-17 son w_o = 30 kN/m, P = 25 kN, L = 3 m y a = 1.2 m. Si la viga está hecha con una sección W200 × 36 ($I = 34.4 \times 10^6$ mm^4), ¿cuál es la deflexión del extremo libre C causada por las cargas aplicadas? E = 200 GPa.

14-53. Una viga de acero W8 × 40 está cargada como se muestra en la figura. Calcule la deflexión en el centro del claro. $E = 29 \times 10^3$ ksi.

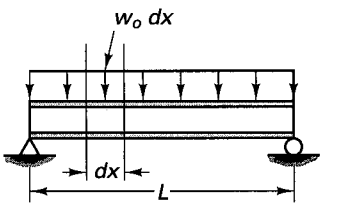


Fig. P14-53

14-54. Usando los resultados encontrados en el ejemplo 14-6 para la deflexión de una viga debida a una fuerza concentrada P, determine la deflexión en el centro de la viga causada por una carga hacia abajo uniformemente distribuida w_o. (Trate $w_o\,dx$ como una fuerza infinitesimal concentrada e integre.) Este método de los *coeficientes de influencia* (llamados así por Maxwell) puede usarse convenientemente en muchos problemas de carga distribuida.

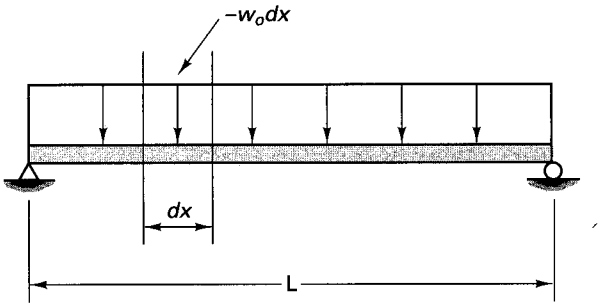


Fig. P14-54

14-55. Usando el método delineado en el problema anterior, determine la deflexión en el centro de la viga para la carga dada en el problema 14-49.

14-56. Una viga elástica prismática con un voladizo está cargada con un momento concentrado M_o. Determine la deflexión en el extremo libre. La constante de resorte es $k = 48EI/L^3$.

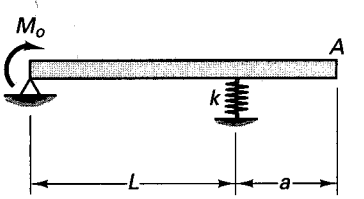


Fig. P14-56

14-57. Un miembro en forma de L, como el mostrado en la figura 14-16(a), está hecho con una barra de sección transversal constante. Determine las deflexiones horizontal y vertical del punto C causadas por la fuerza aplicada P. Sea $a = L/4$. Desprecie el efecto sobre la deflexión de la fuerza axial en el miembro horizontal y de la fuerza cortante en el miembro vertical. Exprese los resultados en términos de P, L, E e I.

14-58. Una barra vertical con una masa concentrada en su extremo libre está unida a un plano giratorio, como se muestra en la figura. (a) ¿A qué velocidad angular w alcanzará justamente la fluencia el esfuerzo de flexión máximo en la barra? (b) Para la condición en (a), determine la deflexión de la masa. La barra tiene 5 mm de diámetro y su masa es de 150×10^{-6} kg/mm. La masa en la parte superior de la barra es de 60×10^{-3} kg y puede considerarse concentrada en un punto. $\sigma_{yp} = 1$ GPa y $E = 200$ GPa.

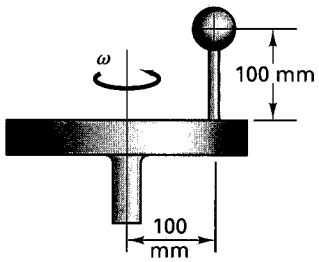


Fig. P14-58

14-59. Dos vigas idénticas, horizontales, simplemente apoyadas tienen un claro cada una de 3.6 m. Las vigas se cruzan entre sí según ángulos rectos en sus respectivos centros de claros. Al montarlas, se tiene una separación de 6 mm entre las dos vigas. Si se aplica una fuerza concentrada hacia abajo de 50 kN en el centro del claro de la viga superior, ¿qué fuerza tomará la viga de abajo? La EI para cada viga es de 6000 kN · m^2.

14-60. El punto medio de una viga en voladizo de 6 m de longitud descansa sobre el centro del claro de una viga simplemente apoyada de 8 m de longitud. Determine la deflexión del punto A, donde las vigas se encuentran, que resulta de la aplicación de una fuerza de 40 kN en el extremo de la viga en voladizo. Dé la respuesta en términos de EI que es el mismo y constante para ambas vigas.

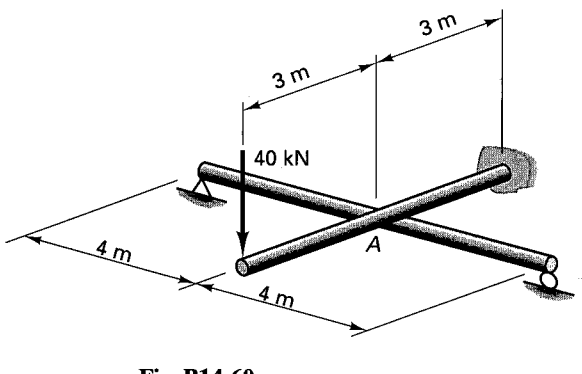


Fig. P14-60

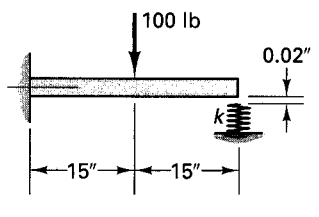


Fig. P14-61

14-61. Una viga en voladizo de 30 in de longitud y rigidez flexionante constante $EI = 10^7$ lb-in^2, tiene inicialmente una abertura de 0.02 in entre su extremo y el resorte. La constante de resorte $k = 10$ k/in. Si se aplica una fuerza de 100 lb al voladizo, como se muestra en la figura, ¿qué tanto de esta fuerza será tomado por el resorte? (*Sugerencia*: Véase el problema 14-51.)

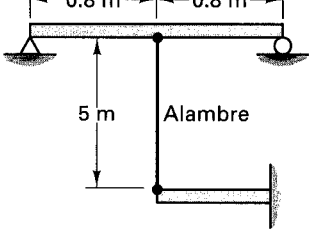


Fig. P14-62

14-62. Un alambre de acero de 5 m de longitud con área transversal de 160 mm^2 está tensado entre el punto medio de la viga simple y el extremo libre del voladizo, como se muestra en la figura. Determine la deflexión del extremo del voladizo como resultado de una caída de temperatura de 50°C. Para el alambre de acero: $E = 200$ GPa, $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C. Para ambas vigas: $I = 10 \times 10^6$ mm^4 y $E = 10$ GPa.

14-63. Un extremo de una viga W18 × 50 está empotrado en concreto. Se pretendía soportar el otro extremo con una barra de acero de 1 in^2 de 12 ft de longitud como se muestra en la figura. Sin embargo, durante el montaje, la tuerca de la barra fue mal apretada y en la condición sin carga se tuvo una separación de $\frac{1}{2}$-in entre la

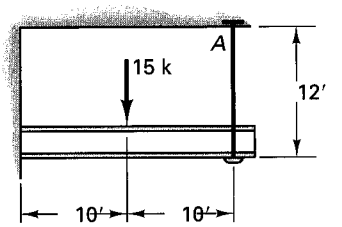


Fig. P14-63

parte superior de la tuerca y el fondo de la viga. ¿Qué fuerza de tensión se desarrollará en la barra cuando se aplique una fuerza de 15 kips en el centro de la viga? $E = 30 \times 10^6$ psi. (*Sugerencia*: Véase el problema 14-51.)

14-64. Un alambre de acero de 30 in de longitud está estirado desde el centro de una viga AB de aluminio hasta un soporte rígido en C, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el aumento del esfuerzo en el alambre si la temperatura desciende 100°F? El área transversal del alambre es de 0.0001 in^2 y $E = 30 \times 10^6$ psi. Para la viga de aluminio, $EI = 1040$ lb-in^2. Considere $\alpha_{Ac} = 6.5 \times 10^{-6}$/°F, y $\alpha_{Al} = 12.9 \times 10^{-6}$/°F.

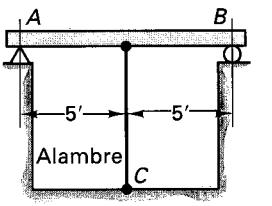


Fig. P14-64

14-65. Una barra de acero flexible está suspendida de 3 barras de acero, como se muestra en la figura, con las dimensiones dadas en mm. Si, inicialmente, las barras están tensas, ¿qué fuerzas adicionales se desarrollarán en éstas debido a la aplicación de la fuerza $F = 1500$ N y un descenso en la temperatura de 50°C en la barra derecha? El área transversal de cada barra es de 10 mm^2 y $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C. Para la barra, $I = 2 \times 10^4$ mm^4 y para el acero, $E = 200 \times 10^3$ N/mm^2.

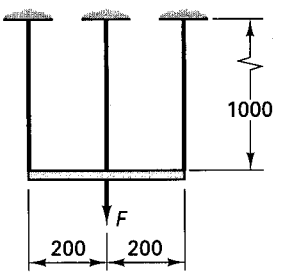


Fig. P14-65

14-66. Una barra de acero en forma de L de 2.125 in de diámetro está empotrada a un muro rígido y simplemente apoyada en el otro extremo, como se muestra en la figura. En planta, el doblez es de 90°. ¿Qué momento flexionante se desarrollará en el extremo empotrado debido a la aplicación de una fuerza de 2000 lb en la esquina

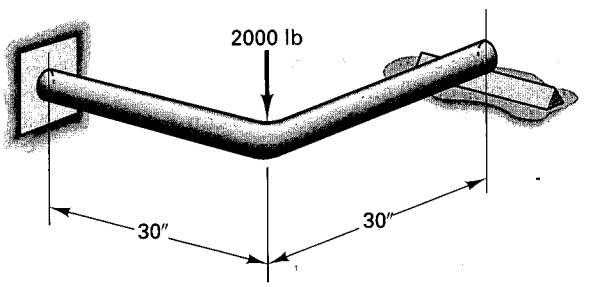


Fig. P14-66

de la barra? Suponga $E = 30 \times 10^6$ psi, $G = 12 \times 10^6$ psi y, por simplicidad, considere $I = 1.00\ \text{in}^4$ e $I_p = 2.00\ \text{in}^4$.

14-67. Dos flechas circulares paralelas de acero de la misma longitud están empotradas en un extremo e interconectadas en el otro por medio de un alambre vertical tenso, como se muestra en la figura. Las flechas tienen 40 mm de diámetro; el radio de la polea rígida enchavetada a la flecha superior es de 100 mm. El área transversal del alambre es de 5 mm^2. Si se aplica una fuerza $P = 100$ N vertical a la flecha inferior, ¿qué tanto de la fuerza aplicada será tomada por la flecha superior? $E = 200$ GPa y $G = 80$ GPa.

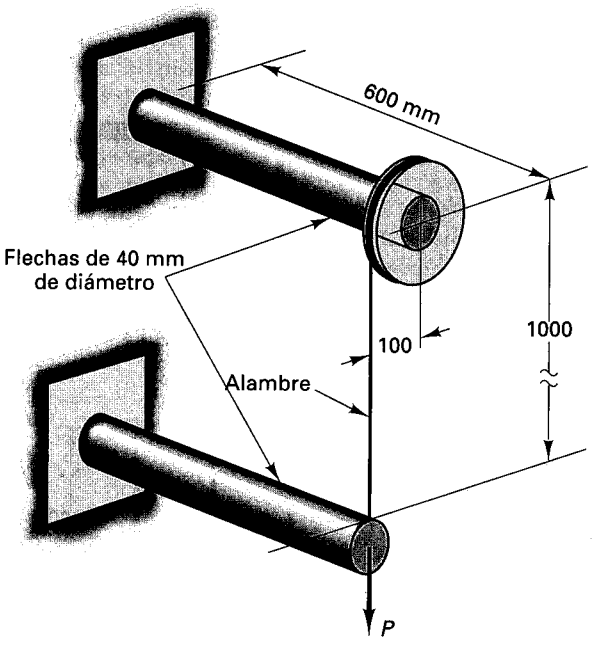


Fig. P14-67

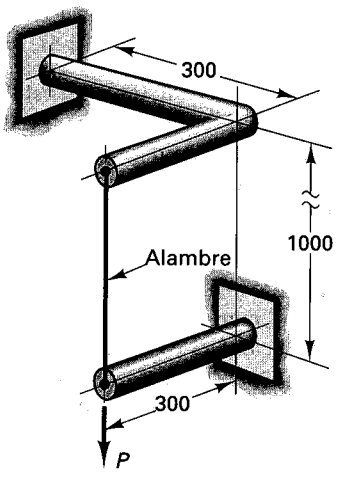


Fig. P14-68

14-68. Una barra horizontal en forma de L está conectada por un alambre tenso a una viga en voladizo como se muestra en la figura. Si tiene lugar un descenso de temperatura de 100°C y se aplica una fuerza $P = 250$ N hacia abajo en el extremo del voladizo, ¿qué esfuerzo de flexión máximo aparecerá en el empotramiento del voladizo? Considere comportamiento elástico y desprecie las concentraciones de esfuerzos. Todas las dimensiones mostradas en la figura están en milímetros. El diámetro de la barra doblada así como el del voladizo es de 20 mm. El área de la sección transversal del alambre es de 0.40 mm^2. El sistema está hecho de acero con $E = 200$ GPa, $\nu = 0.25$, $G = 80$ GPa y $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}/°\text{C}$.

14-69. La temperatura en un horno se mide por medio de un alambre de acero inoxidable colocado dentro de él. El alambre está sujeto al extremo de una viga en voladizo fuera del horno. La deformación unitaria medida por el extensómetro pegado al exterior de la viga es una medida de la temperatura. Suponiendo que la longitud total del alambre se calienta a la temperatura del horno, ¿cuál es el cam-

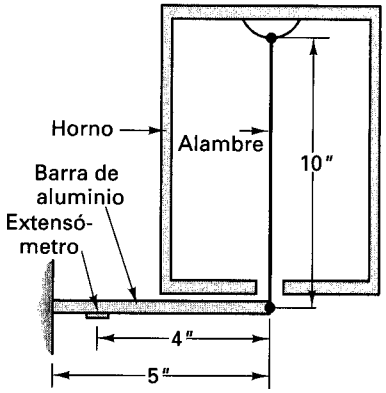


Fig. P14-69

bio en la temperatura del horno si el extensómetro registra un cambio en deformación unitaria de -100×10^{-6} in/in? Suponga que el alambre tiene una tensión inicial suficiente para funcionar adecuadamente. Las propiedades mecánicas de los materiales son las siguientes: $\alpha_{AC} = 9.5 \times 10^{-6}/°F$, $\alpha_{Al} = 12 \times 10^{-6}/°F$, $E_{AC} = 30 \times 10^6$ psi, $E_{Al} = 10 \times 10^6$ psi, $A_{alambre} = 5 \times 10^{-4}$ in^2, $I_{viga} = 6.5 \times 10^{-4}$ in^4. El peralte de la pequeña viga es de 0.25 in.

14-70. Con ayuda de las primeras dos soluciones dadas en la Tabla 10 del apéndice, (a) encuentre la reacción en A y (b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante y muestre la forma deflexionada de la viga.

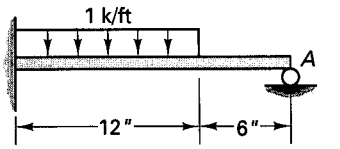


Fig. P14-70

Sección 14-10

14-71. Una viga en voladizo está cargada en el extremo con una fuerza $P = 1000$ lb que forma un ángulo α con la vertical. El miembro es una viga S8 × 18.4 de acero. (a) Determine la deflexión total del extremo para $\alpha = 0°, 10°, 45°$ y $90°$ causada por la fuerza aplicada. $E = 29 \times 10^6$ psi. (b) Verifique que las deflexiones son normales a los ejes neutros.

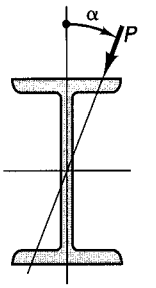


Fig. P14-71

14-72. Determine la deflexión máxima para la viga de madera en el ejemplo 9-1, figura 9-4. $E = 12$ GPa para la madera. Verifique que la deflexión máxima es normal al eje neutro.

14-73. Considere una sección Z de aluminio con las dimensiones dadas en el problema 10-45. Si una viga horizontal en voladizo de 100 in de longitud que emplea esta sección está empotrada en un extremo y es sometida a una fuerza de 20 lb vertical hacia abajo aplicada en el centroide del otro extremo, ¿cuál es la deflexión máxima? ¿Cómo se relaciona la dirección de esta fuerza con el eje neutro? $E = 10 \times 10^3$ ksi.

Sección 14-11

14-74. Considere una viga corta en voladizo W18 × 35 de acero empotrada en un extremo y cargada en su extremo libre como se muestra en la figura 14-23. Determine la longitud de este voladizo de manera que la deflexión debida a la flexión sea la misma que la debida al cortante. El acero cede a 36 ksi en tensión o compresión y a 21 ksi en cortante. Note que a diferencia de una viga rectangular, puede suponerse que sólo el alma cede uniformemente en cortante. (Aunque esta solución no es exacta, los resultados son representativos de condiciones reales.)

14-75. Un objeto con peso de 4000 lb se deja caer en el centro de un claro simple de 20 ft desde una altura de 1 in. Si la viga es una W10 × 33 de acero, ¿cuál es el factor de impacto? Suponga comportamiento elástico. $E = 29 \times 10^6$ psi.

Sección 14-12

14-76. Una barra cuadrada de 24 mm de lado de material lineal elastoplástico va a ser enrollada alrededor de un poste redondo, como se muestra en la figura. (a) ¿Qué diámetro D se requiere para el poste para que los tercios exteriores de las secciones transversales se plastifiquen (es decir, que el núcleo elástico sea de 8 × 24 mm)? Suponga que el material está inicialmente libre de esfuerzos con

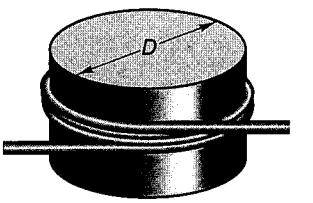


Fig. P14-76

$\sigma_{yp} = 250$ MPa. Sea $E = 200$ GPa. El paso del ángulo helicoidal es tan pequeño que sólo tiene que considerarse la flexión de la barra en un plano. (b) ¿Cuál será el diámetro de la espira cuando se liberen las fuerzas usadas al formarla? Dicho de otra manera, determine el diámetro de la espira después del rebote elástico.

14-77. Una viga simple, rectangular, sin peso, de material lineal elastoplástico está cargada en el centro del claro por una fuerza P, como se muestra en la figura. (a) Determine la magnitud de la fuerza P que ocasione que la zona plástica penetre a un cuarto del peralte de la viga desde cada lado. (b) Para la condición de carga previa, esboce el diagrama momento-curvatura, mostrando claramente en él la zona plastificada.

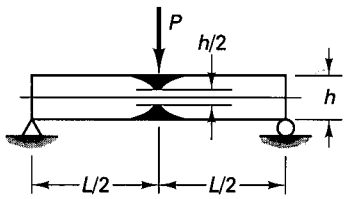


Fig. P14-77

15

Deflexiones en vigas por el método de área-momento

15-1. Observaciones generales

Este capítulo se dedica al análisis de deflexiones de vigas estáticamente determinadas e indeterminadas usando el *método de área-momento*. Este procedimiento especializado es particularmente conveniente si se requiere sólo la deflexión de unos pocos puntos sobre una viga o un marco. Por esta razón puede usarse convenientemente en la solución de problemas estáticamente indeterminados y para revisión de deflexiones. Usando este método se obtiene una excelente idea sobre la cinemática de las deformaciones.

Este enfoque se empleó mucho antes del advenimiento de las computadoras. Sin embargo, su empleo actual proporciona un rápido enfoque semigráfico para estimar las deflexiones o rotaciones de vigas en puntos seleccionados.

Un análisis de deflexiones de vigas esbeltas en presencia de fuerzas axiales de compresión puede evidenciar en algunos casos un fuerte incremento en las deflexiones, lo que a su vez ocasiona inestabilidad en los miembros. Este tema se verá en el siguiente capítulo.

15-2. Introducción al método de área-momento

En numerosas aplicaciones, donde deben determinarse las deflexiones de vigas, la carga es compleja y las áreas de las secciones transversales de las vigas son variables. Ésta es la situación usual en flechas de máquinas, donde las variaciones graduales o escalonadas del diámetro de la flecha sirven para adaptar rotores, chumaceras, collarines, retenes, etc. De la misma manera, las vigas ahusadas a menudo se emplean en las estructuras de aviones, así como en la construcción de puentes. Interpretando semigráficamente las operaciones matemáticas de resolver la ecuación diferencial gobernante, ha sido desarrollado un procedimiento eficaz para obtener deflexiones en situaciones complicadas. Al usar este procedimiento alternativo, se encuentra que los problemas con discontinuidades de carga y variaciones arbitrarias de la inercia del área transversal de una viga, no causan complicaciones y se requiere sólo un poco más de trabajo aritmético para obtener la solución. La solución de tales problemas con el método[1] de área-momento es el objetivo de las siguientes secciones.

Por lo general se usa el método por desarrollarse para obtener sólo el desplazamiento y la rotación en un solo punto sobre una viga. Puede usarse para determinar la ecuación de la curva elástica, pero no se gana nada en comparación con la solución directa de la ecuación diferencial. Sin embargo, a menudo es la deflexión y/o la rotación de la curva elástica o ambas, en un punto particular de una viga, las que son de mayor interés en la resolución de problemas prácticos.

El método de área-momento es sólo alternativo para resolver el problema de las deflexiones. Posee las mismas aproximaciones y limitaciones vistas antes en relación con la solución de la ecuación diferencial de la curva elástica. Al aplicarla, se determina sólo la deflexión debida a la flexión de la viga; la deflexión debida a cortante se ignora. La aplicación del método se desarrollará para vigas estáticamente determinadas e indeterminadas.

15-3. Teoremas área-momento

Los teoremas necesarios se basan en la geometría de la curva elástica y en el diagrama *M/EI* asociado. Las condiciones de frontera no entran en la deducción de los teoremas ya que éstos se basan sólo en la interpretación de integrales definidas. Como se verá después, son necesarias las consideraciones geométricas adicionales para resolver un problema en forma completa.

[1]El desarrollo del método de área-momento para encontrar deflexiones en vigas se debe a Charles E. Greene, de la Universidad de Michigan, donde lo enseñó a sus alumnos en 1873. Poco antes, en 1868, Otto Mohr, de Dresden, Alemania, desarrolló un método similar que parece no haber sido conocido por el profesor Greene.

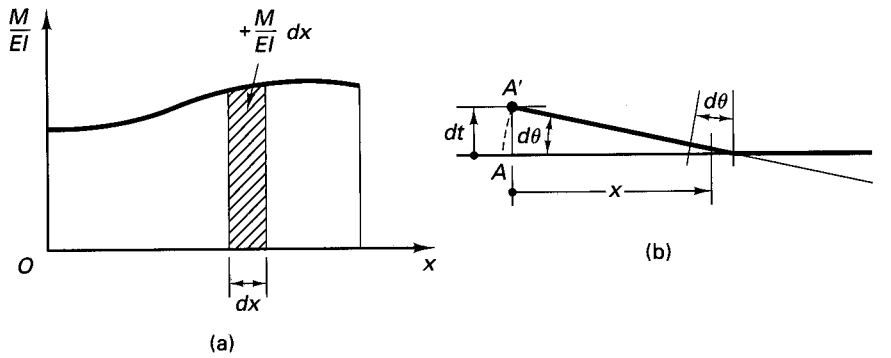


Fig. 15-1 Interpretación de un pequeño cambio angular en un elemento.

Para deducir los teoremas, la ecuación 14-10a, $d^2v/dx^2 = M/EI$, puede reescribirse en las siguientes formas alternativas:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad \text{o} \quad d\theta = \frac{M}{EI}dx \qquad (15\text{-}1)$$

En la figura 15-1(a), una cantidad $(M/EI)dx$ corresponde a un área infinitesimal del diagrama M/EI. De acuerdo con la ecuación 15-1, el área es igual al cambio en el ángulo entre dos tangentes adyacentes. La contribución de un cambio angular en un elemento a la deformación de la curva elástica se muestra en la figura 15-1(b).

Si el pequeño cambio angular $d\theta$ para un elemento se multiplica por una distancia x desde un origen arbitrario al mismo elemento se obtiene una distancia vertical dt; véase la figura 15-1(b). Como sólo se consideran deflexiones pequeñas, no tiene que hacerse ninguna distinción entre el arco AA' y la distancia vertical dt. Con base en este razonamiento geométrico, se tiene

$$dt = x\,d\theta = \frac{M}{EI}x\,dx \qquad (15\text{-}2)$$

Integrando formalmente las ecuaciones 15-1 y 15-2 entre dos puntos cualquiera como el A y el B sobre una viga (véase la figura 15-2), se obtienen los dos teoremas de área-momento. El **primer teorema de área-momento** es

$$\boxed{\int_A^B d\theta = \theta_B - \theta_A = \Delta\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}dx} \qquad (15\text{-}3)$$

donde $\Delta\theta_{B/A}$ es el *cambio angular entre B y A*. Este cambio angular medido en radianes entre dos tangentes en los puntos A y B sobre la curva elástica es igual al área M/EI limitada por las ordenadas por A y B. Además, si se conoce la pendiente θ_A de la curva elástica en A , la pendiente θ_B en B está dada por

$$\boxed{\theta_B = \theta_A + \Delta\theta_{B/A}} \qquad (15\text{-}4)$$

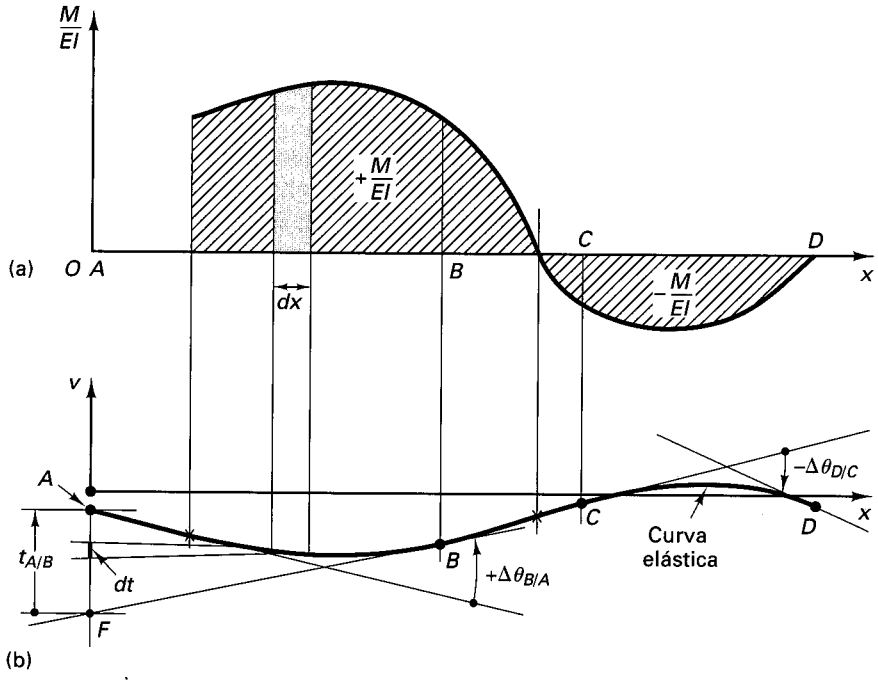


Fig. 15-2 Relación entre el diagrama M/EI y la curva elástica.

El primer teorema muestra que una evaluación numérica del área M/EI limitada entre las ordenadas por dos puntos cualesquiera sobre la curva elástica, da el giro entre las tangentes correspondientes. Al efectuar esta suma, las áreas correspondientes a los momentos flexionantes positivos se toman positivas y aquéllas correspondientes a los momentos negativos se toman negativas. Si la suma de las áreas entre dos puntos cualesquiera como el A y el B es positiva, la tangente a la derecha gira en sentido antihorario; si es negativa, la tangente a la derecha gira en sentido horario; véase la figura 15-2(b). Si el área neta es cero, las dos tangentes son paralelas.

La cantidad dt en la figura 15-2(b) es debida al efecto de la curvatura de un elemento. Sumando este efecto para todos los elementos de A a B, se obtiene la distancia vertical AF. Geométricamente, esta distancia representa el desplazamiento o desviación de un punto A desde una tangente a la curva elástica en B. Por consiguiente, se llamará *desviación tangencial* de un punto A desde una tangente en B y se designará por $t_{A/B}$. Lo anterior, en forma matemática, da el **segundo teorema de área-momento**:

$$t_{A/B} = \int_A^B d\theta\, x = \int_A^B \frac{M}{EI} x\, dx \qquad (15\text{-}5)$$

Éste establece que la desviación tangencial de un punto A sobre la curva elástica desde una tangente por otro punto B también sobre la curva elástica es igual al momento estático (o primer momento) de la sección limitada del diagrama M/EI respecto a una línea vertical por A. En la mayor parte de los casos, la desviación tangencial no es en sí misma la deflexión deseada de una viga.

Usando la definición del centroide de un área se puede, por conveniencia, reescribir la ecuación 15-5 para aplicaciones numéricas en la forma más simple

$$t_{A/B} = \Phi \bar{x} \tag{15-6}$$

donde Φ es el área total del diagrama M/EI entre los dos puntos considerados y $\bar{x}$ es la distancia horizontal al centroide de esta área *desde A*.

Por un razonamiento análogo, la *desviación de un punto B desde una tangente en A* es

$$t_{B/A} = \Phi \bar{x}_1 \tag{15-7}$$

donde se usa la misma área M/EI pero $\bar{x}_1$ se mide desde la línea vertical que pasa por el punto B; véase la figura 15-3. Note con cuidado el orden de los subíndices para t en esas dos ecuaciones. Se escribe primero el punto cuya desviación se está determinando.

En las ecuaciones previas, las distancias $\bar{x}$ y $\bar{x}_1$ se toman siempre positivas; E e I son también intrínsecamente cantidades positivas, por lo que el signo de la desviación tangencial depende del signo de los momentos flexionantes. Un valor positivo de la desviación tangencial indica que un punto dado se encuentra arriba de una tangente a la curva elástica trazada por el otro punto y viceversa; véase la figura 15-3.

Los dos teoremas anteriores son aplicables entre dos puntos cualesquiera sobre una curva elástica *continua* de cualquier viga con cualquier carga. Ellos se aplican entre, y más allá de, las reacciones para vigas en voladizo y vigas continuas. Sin embargo, debe recalcarse que se obtienen directamente sólo las rotaciones relativas de las tangentes y sólo las desviaciones tangenciales. Una consideración adicional de la geometría de la curva elástica en los soportes para incluir las condiciones de frontera es

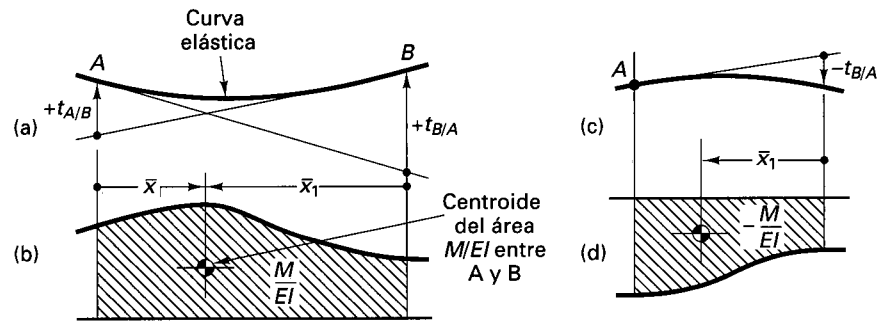


Fig. 15-3 Interpretación de los signos para la desviación tangencial.

necesaria en todo caso para determinar las deflexiones. Esto se ilustrará en los siguientes ejemplos.

Al aplicar el método de área-momento es esencial realizar cuidadosamente un croquis de la curva elástica. Como no es posible una deflexión en un soporte articulado o de rodillo, la curva elástica se dibuja pasando por esos soportes. En un empotramiento no se tiene ni desplazamiento ni rotación de la tangente a la curva elástica, por lo que ésta debe dibujarse tangencialmente a la dirección del eje descargado de la viga. Al preparar un croquis de la curva elástica con las consideraciones anteriores, es costumbre exagerar las deflexiones anticipadas. En tal croquis, a la deflexión de un punto sobre una viga se le considera como estando arriba o abajo de su posición inicial, sin énfasis en los signos. Como ayuda en la aplicación del método, se dan en la Tabla 2 del apéndice propiedades de algunas áreas encerradas por curvas y sus centroides.

Ejemplo 15-1

Considere una viga en voladizo de aluminio de 1600 mm de longitud con una fuerza de 10 kN aplicada a 400 mm del extremo libre, como se muestra en la figura 15-4(a). En una distancia de 600 mm desde el extremo empotrado, la viga tiene un mayor peralte que en el resto; en tal distancia $I_1 = 50 \times 10^6$ mm^4. En los restantes 1000 mm de la viga, $I_2 = 10 \times 10^6$ mm^4.

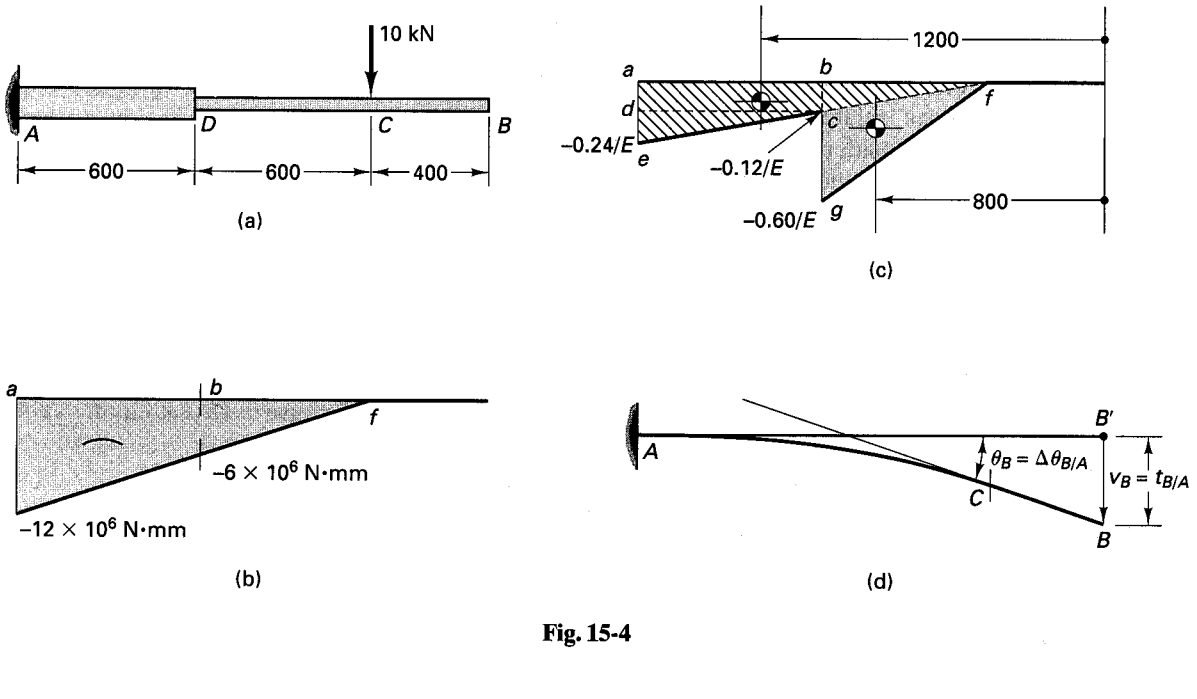


Fig. 15-4

Encuentre la deflexión y el giro del extremo libre. Ignore el peso de la viga y suponga que E para el aluminio es de 70 GPa.

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante se muestra en la figura 15-4(b). Dividiendo todas las ordenadas del diagrama M entre EI, se obtiene el diagrama M/EI mostrado en la figura 15-4(c). Dos ordenadas aparecen en el punto D. Una, $-0.12/E$ es aplicable justo a la izquierda de D; la otra, $-0.60/E$, se aplica justo a la derecha de D. Como el momento flexionante es negativo de A a C, la curva elástica en toda esta distancia es cóncava hacia abajo; véase la figura 15-4(d). En el empotramiento A, la curva elástica debe salir tangente a la dirección inicial AB' de la viga sin carga. El segmento recto CB sin carga de la viga es tangente a la curva elástica en C.

Después de los pasos preparatorios anteriores, de la geometría del croquis de la curva elástica, puede verse que la distancia BB' representa la deflexión buscada en el extremo libre. Sin embargo, BB' es *también* la desviación tangencial del punto B desde la tangente en A. Por tanto, el segundo teorema de área-momento puede usarse para obtener $t_{B/A}$, que en este caso especial representa la deflexión del extremo libre. De la geometría de la curva elástica se ve también que el ángulo incluido entre las líneas BC y AB' es la rotación del segmento CB. Este ángulo es el mismo que el incluido entre las tangentes a la curva elástica en los puntos A y B y el primer teorema de área-momento puede usarse para calcular esta cantidad.

Es conveniente extender la línea ec en la figura 15-4(c) hasta el punto f para calcular el área del diagrama M/EI. Esto da dos triángulos cuyas áreas son fácilmente calculadas.

Área del triángulo afe:

$$\Phi_1 = -\frac{1200 \times 0.24}{2E} = -\frac{144}{E}$$

Área del triángulo feg:

$$\Phi_2 = -\frac{600 \times 0.48}{2E} = -\frac{144}{E}$$

$$\theta_B = \Delta\theta_{B/A} = \int_A^B \frac{M}{EI}dx = \Phi_1 + \Phi_2 = -\frac{288}{70 \times 10^3} = -4.11 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

$$v_B = t_{B/A} = \Phi_1\bar{x}_1 + \Phi_2\bar{x}_2$$

$$= \left(-\frac{144}{E}\right) \times 1200 + \left(-\frac{144}{E}\right) \times 800 = -4.11\ \text{mm}$$

El signo negativo de $\Delta\theta$ indica una rotación horaria de la tangente en B respecto a la tangente en A. El signo negativo de $t_{B/A}$ significa que el punto B está por debajo de una tangente por A.

Ejemplo 15-2

Encuentre la deflexión debida a la fuerza concentrada P aplicada como se muestra en la figura 15-5(a) en el centro de una viga simplemente apoyada. La rigidez EI es constante.

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante se muestra en la figura 15-5(b). Como EI es constante, el diagrama M/EI no tiene que elaborarse ya que las áreas del diagrama de momento flexionante divididas entre EI dan las cantidades necesarias por usarse en los teoremas de área-momento. La curva elástica se muestra en la figura 15-5(c), es cóncava hacia arriba en toda su longitud ya que los momentos flexionantes son positivos. Esta curva debe pasar por los puntos de soporte en A y B.

Es claro en el diagrama de la curva elástica que la cantidad deseada está representada por la distancia CC'. Además, de puras consideraciones geométricas o cinemáticas, $CC' = C'C'' - C''C$, donde la distancia $C''C$ se mide desde una tangente a la curva elástica que pasa por el punto de so-

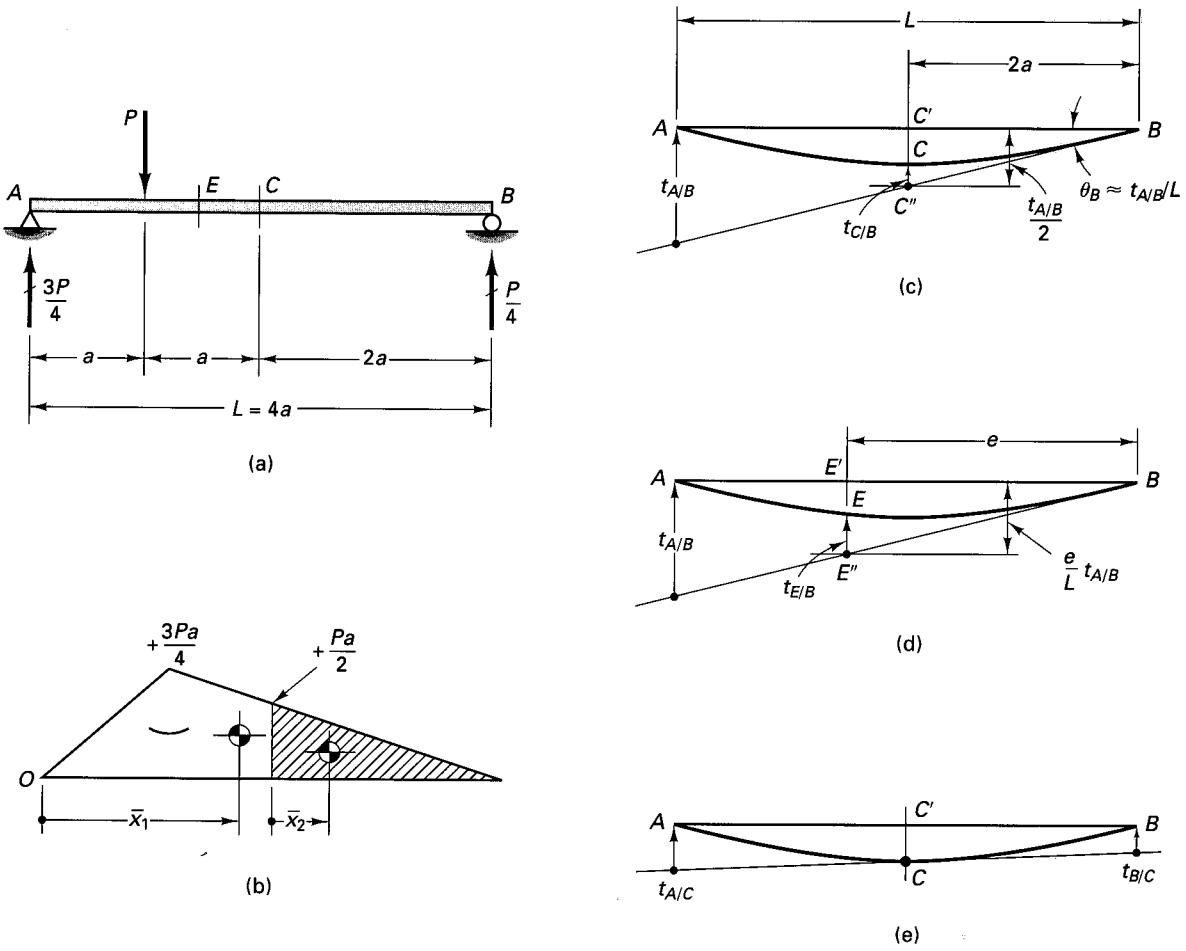


Fig. 15-5

porte B. Sin embargo, como la desviación de un punto de soporte desde una tangente a la curva elástica en el otro soporte siempre puede calcularse por el segundo teorema de área-momento, una distancia como $C'C''$ puede encontrarse por proporciones geométricas en la figura. En este caso, $t_{A/B}$ se obtiene tomando toda el área M/EI entre A y B y multiplicándola[2] por su $\bar{x}$ medida desde una vertical por A; por consiguiente, $C'C'' = \frac{1}{2}t_{A/B}$. Por otra aplicación del segundo teorema se determina $t_{C/B}$ que es igual a $C''C$. Para este caso, el área M/EI está rayada en la figura 15-5(b) y para ella, $\bar{x}$ se mide desde C. Como la reacción derecha es $P/4$ y la distancia $CB = 2a$, la ordenada máxima para el triángulo sombreado es $+ Pa/2$.

$$v_c = C'C'' - C''C = t_{A/B}/2 - t_{C/B}$$

$$t_{A/B} = \Phi_1\bar{x}_1 = \frac{1}{EI}\left(\frac{4a}{2}\,\frac{3Pa}{4}\right)\frac{a + 4a}{3} = +\frac{5Pa^3}{2EI}$$

$$t_{C/B} = \Phi_2\bar{x}_2 = \frac{1}{EI}\left(\frac{2a}{2}\,\frac{Pa}{2}\right)\frac{2a}{3} = +\frac{Pa^3}{3EI}$$

$$v_C = \frac{t_{A/B}}{2} - t_{C/B} = \frac{5Pa^3}{4EI} - \frac{Pa^3}{3EI} = \frac{11Pa^3}{12EI}$$

Los signos positivos de $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$ indican que los puntos A y C se encuentran arriba de la tangente por B. Como puede verse en la figura 15-5(c), la deflexión en el centro de la viga es en una dirección hacia abajo.

La pendiente de la curva elástica en C puede encontrarse de la pendiente de uno de los extremos y con la ecuación 15-4. Para el punto B a la derecha,

$$\theta_B = \theta_C + \Delta\theta_{B/C} \quad \text{o} \quad \theta_C = \theta_B - \Delta\theta_{B/C}$$

$$\theta_C = \frac{t_{A/B}}{L} - \Phi_2 = \frac{5Pa^2}{8EI} - \frac{Pa^2}{2EI} = \frac{Pa^2}{8EI} \text{ (antihoraria)}$$

El procedimiento previo para encontrar la deflexión de un punto sobre la curva elástica es generalmente aplicable. Por ejemplo, si se quiere la deflexión del punto E, figura 15-5(d), a una distancia e desde B, la solución puede formularse como

$$v_E = E'E'' - E'E = (e/L)t_{A/B} - t_{E/B}$$

Localizando el punto E a una distancia variable x desde uno de los soportes puede obtenerse la ecuación de la curva elástica.

Para simplificar el trabajo aritmético, debe tenerse cuidado al seleccionar la tangente en un soporte. Por ejemplo, aunque $v_c = t_{B/A}/2 - t_{C/A}$ (no mostrada en la figura), esta solución implicaría el uso de la porción no sombreada del diagrama de momentos flexionantes para obtener $t_{C/A}$, lo que sería más tedioso.

[2]Véase en la Tabla 2 del apéndice la posición del centroide de toda el área triangular. Alternativamente, considerando toda el área M/EI como formada por dos triángulos,

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{a}{2}\,\frac{3Pa}{4}\right)\frac{2a}{3} + \frac{1}{EI}\left(\frac{3a}{2}\,\frac{3Pa}{4}\right)\left(a + \frac{3a}{3}\right) = +\frac{5Pa^3}{2EI}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

La solución del problema anterior puede basarse en un concepto geométrico diferente. Esto está ilustrado en la figura 15-5(e), donde una tangente a la curva elástica está dibujada en C. Entonces, como las distancias AC y CB son iguales,

$$v_C = CC' = (t_{A/C} + t_{B/C})/2$$

Es decir, la distancia CC' es el promedio de $t_{A/C}$ y $t_{B/C}$. La desviación tangencial $t_{A/C}$ se obtiene tomando el primer momento del área no sombreada M/EI en la figura 15-5(b) respecto a A, y $t_{B/C}$ está dada por el primer momento del área sombreada M/EI respecto a B. Los detalles numéricos de esta solución se dejan como ejercicio al lector. Este procedimiento es usualmente más largo que el primero.

Note particularmente que si la curva elástica no es simétrica, la tangente en el centro de la viga *no es horizontal.*

Ejemplo 15-3

Para una viga prismática cargada como en el ejemplo anterior, encuentre la deflexión máxima causada por la fuerza aplicada P; véase la figura 15-6(a).

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante y la curva elástica se muestran en las figuras 15-6(b) y (c), respectivamente. La curva elástica es cóncava hacia arriba en toda su longitud y la deflexión máxima ocurre donde la tangente a la curva elástica es horizontal. Este punto de tangencia es designado en la figura por D y está localizado por la distancia horizontal desconocida d medida desde el soporte derecho B. Luego, dibujando una tangente a la curva elástica por el punto B en el soporte, se ve que $\Delta\theta_{B/D} = \theta_B$ ya que la línea que pasa por el soporte es horizontal. Sin embargo, la pendiente θ_B de la curva elástica en B puede determinarse al obtener $t_{A/B}$ y dividirla por la longitud del claro. Por otra parte, usando el primer teorema de área-momento, $\Delta\theta_{B/D}$ puede expresarse en términos del área sombreada en la figura 15-6(b). Igualando $\Delta\theta_{B/D}$ con θ_B y despejando d, se localiza la tangente horizontal en D. Entonces, de consideraciones geométricas se ve que la deflexión máxima representada por DD' es igual a la desviación tangencial de B desde una tangente horizontal por D (es decir, $t_{B/D}$).

$$t_{A/B} = \Phi_1 \bar{x}_1 = +\frac{5Pa^3}{2EI} \qquad \text{(véase el ejemplo 15-2)}$$

$$\theta_B = \frac{t_{A/B}}{L} = \frac{t_{A/B}}{4a} = \frac{5Pa^2}{8EI}$$

$$\Delta\theta_{B/D} = \frac{1}{EI}\left(\frac{d}{2}\,\frac{Pd}{4}\right) = \frac{Pd^2}{8EI} \quad \text{(área entre } D \text{ y } B\text{)}$$

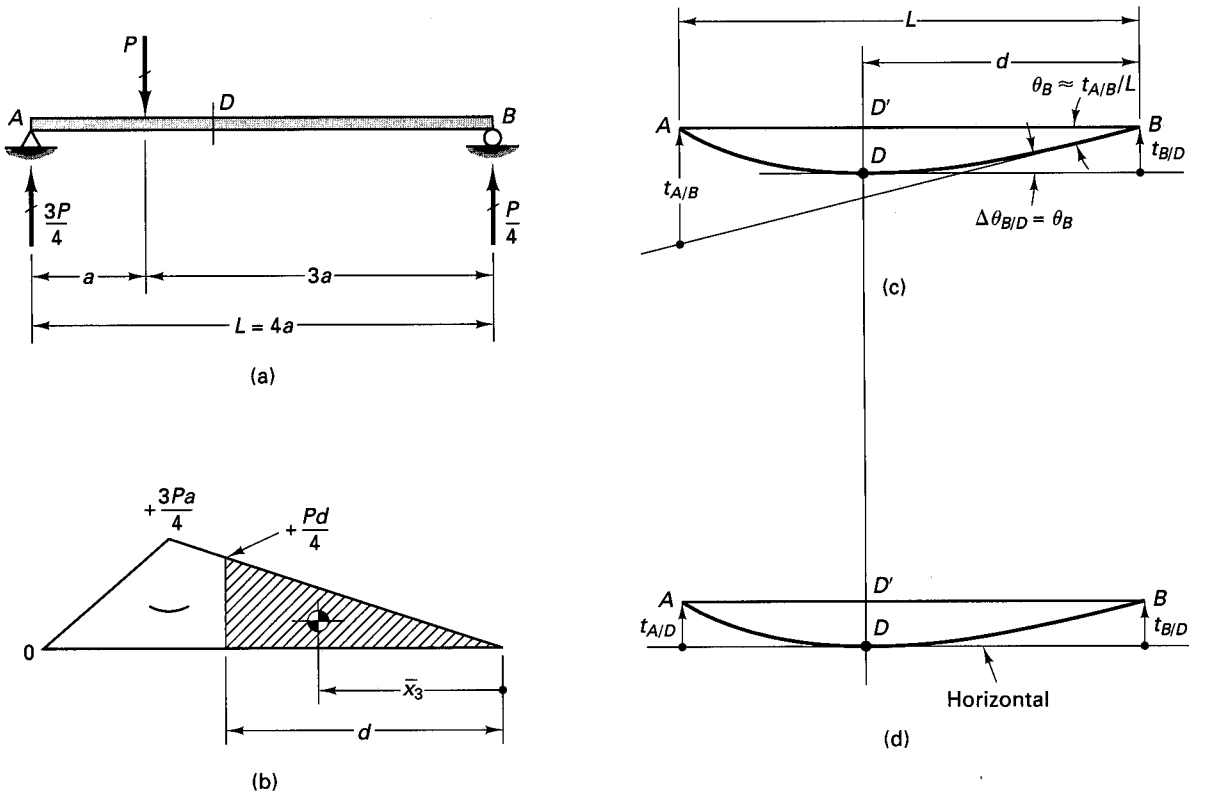


Fig. 15-6

Como $\theta_B = \theta_D + \Delta\theta_{B/D}$ y se requiere que $\theta_D = 0$,

$$\Delta\theta_{B/D} = \theta_B \quad \frac{Pd^2}{8EI} = \frac{5Pa^2}{8EI} \quad \text{por consiguiente, } d = \sqrt{5}a$$

$$v_{\text{máx}} = v_D = DD' = t_{B/D} = \Phi_3 \bar{x}_3$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{d}{2}\frac{Pd}{4}\right)\frac{2d}{3} = \frac{5\sqrt{5}Pa^3}{12EI} = \frac{11.2Pa^3}{12EI}$$

Después de encontrar d, la deflexión máxima puede también obtenerse como $v_{\text{máx}} = t_{A/D}$, o $v_{\text{máx}} = (d/L)t_{A/B} - t_{D/B}$ (no mostrada). Note también que usando la condición $t_{A/D} = t_{B/D}$, figura 15-6(d), puede establecerse una ecuación para d.

Debe ser evidente con esta solución que es más fácil calcular la deflexión en el centro de la viga, lo que se hizo en el ejemplo 15-2, que determinar las deflexiones máximas aunque, examinando los resultados finales se ve que, numéricamente, las dos deflexiones difieren poco entre sí: $v_{\text{centro}} = 11Pa^3/12EI$ contra $v_{\text{máx}} = 11.2Pa^3/12EI$. Por esta razón, en muchos problemas prácticos de vigas simplemente apoyadas, donde todas las fuerzas aplicadas actúan en la misma dirección, es a menudo suficientemente exacto calcular la deflexión en el centro en vez de intentar obtener la máxima verdadera.

Ejemplo 15-4

En una viga simplemente apoyada, encuentre la deflexión y rotación máximas de la curva elástica en los extremos causadas por la aplicación de una carga uniformemente distribuida de w_o lb/ft; véase la figura 15-7(a). La rigidez EI es constante.

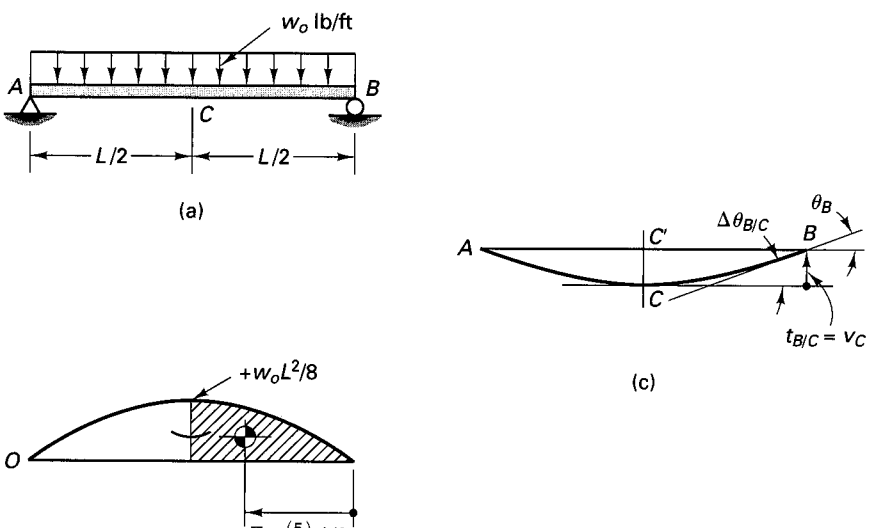


Fig. 15-7

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante se muestra en la figura 15-7(b). Como se estableció en el ejemplo 7-8, se trata de una parábola de segundo grado con un valor máximo en su vértice de $w_oL^2/8$. La curva elástica, que pasa por los soportes A y B, se muestra en la figura 15-7(c).

En este caso el diagrama M/EI es simétrico respecto a una línea vertical que pasa por el centro del claro. Por tanto, la curva elástica debe ser simétrica y la tangente a esta curva en el centro de la viga es horizontal. De la figura se ve que $\Delta\theta_{B/C}$ es igual a θ_B y que la rotación de B es igual a la mitad del área[3] de todo el diagrama M/EI. La distancia CC' es la deflexión buscada y por la geometría de la figura se ve que es igual a $t_{B/C}$ (o a $t_{A/C}$, no mostrada).

$$\Phi = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}\,\frac{L}{2}\,\frac{w_oL^2}{8}\right) = \frac{w_oL^3}{24EI}$$

[3]Véase en la Tabla 2 del apéndice una fórmula para el área encerrada por una parábola y otra para $\bar{x}$.

$$\theta_B = \Delta\theta_{B/C} = \Phi = + \frac{w_o L^3}{24EI}$$

$$v_C = v_{\text{máx}} = t_{B/C} = \Phi\bar{x} = \frac{w_o L^3}{24EI}\frac{5L}{16} = \frac{5w_o L^4}{384EI}$$

El valor de la deflexión concuerda con la ecuación 14-22, que expresa la misma cantidad obtenida por el método de integración. Como el punto B está por arriba de la tangente por C, el signo de v_c es positivo.

Ejemplo 15-5

Encuentre la deflexión del extremo libre A de la viga mostrada en la figura 15-8(a) causada por las fuerzas aplicadas. EI es constante.

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante para las fuerzas aplicadas se muestra en la figura 15-8(b). El momento flexionante cambia de signo en $a/2$ desde el soporte izquierdo. Aquí ocurre un punto de inflexión en la curva elástica. Correspondiente al momento positivo, la curva es cóncava hacia arriba y viceversa. La curva elástica se dibuja así y pasando sobre los soportes en B y C, figura 15-8(c). Para comenzar, la inclinación de la tangente a la curva elástica en el soporte B se determina encontrando $t_{C/B}$ como el momento estático de las áreas con signos apropiados del diagrama M/EI entre las verticales por C y B, respecto a C.

$$\begin{aligned} t_{C/B} &= \Phi_1\bar{x}_1 + \Phi_2\bar{x}_2 + \Phi_3\bar{x}_3 \\ &= \frac{1}{\text{EI}}\left[\frac{\text{a}}{2}(+\text{Pa})\frac{2\text{a}}{3} + \frac{1}{2}\frac{\text{a}}{2}(+\text{Pa})\left(\text{a} + \frac{1}{3}\frac{\text{a}}{2}\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{a}{2}(-Pa)\left(\frac{3a}{2} + \frac{2}{3}\frac{a}{2}\right)\right] \\ &= + \frac{Pa^3}{6EI} \end{aligned}$$

El signo positivo de $t_{C/B}$ indica que el punto C está *arriba de la tangente por* B. Por tanto, se dibuja un diagrama corregido de la curva elástica en la figura 15-8(d), donde se ve que la deflexión buscada está dada por la distancia AA' y es igual a $AA'' - A'A''$. Además, como los triángulos $A'A''B$ y $CC'B$ son semejantes, la distancia $A'A'' = t_{C/B}/2$. Por otra parte, la distancia AA'' es la desviación del punto A desde la tangente a la curva elástica por el soporte B. Por tanto,

$$v_A = AA' = AA'' - A'A'' = t_{C/B}/2$$

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}(\Phi_4\bar{x}_4) = \frac{1}{EI}\left[\frac{a}{2}(-Pa)\frac{2a}{3}\right] = -\frac{Pa^3}{3EI}$$

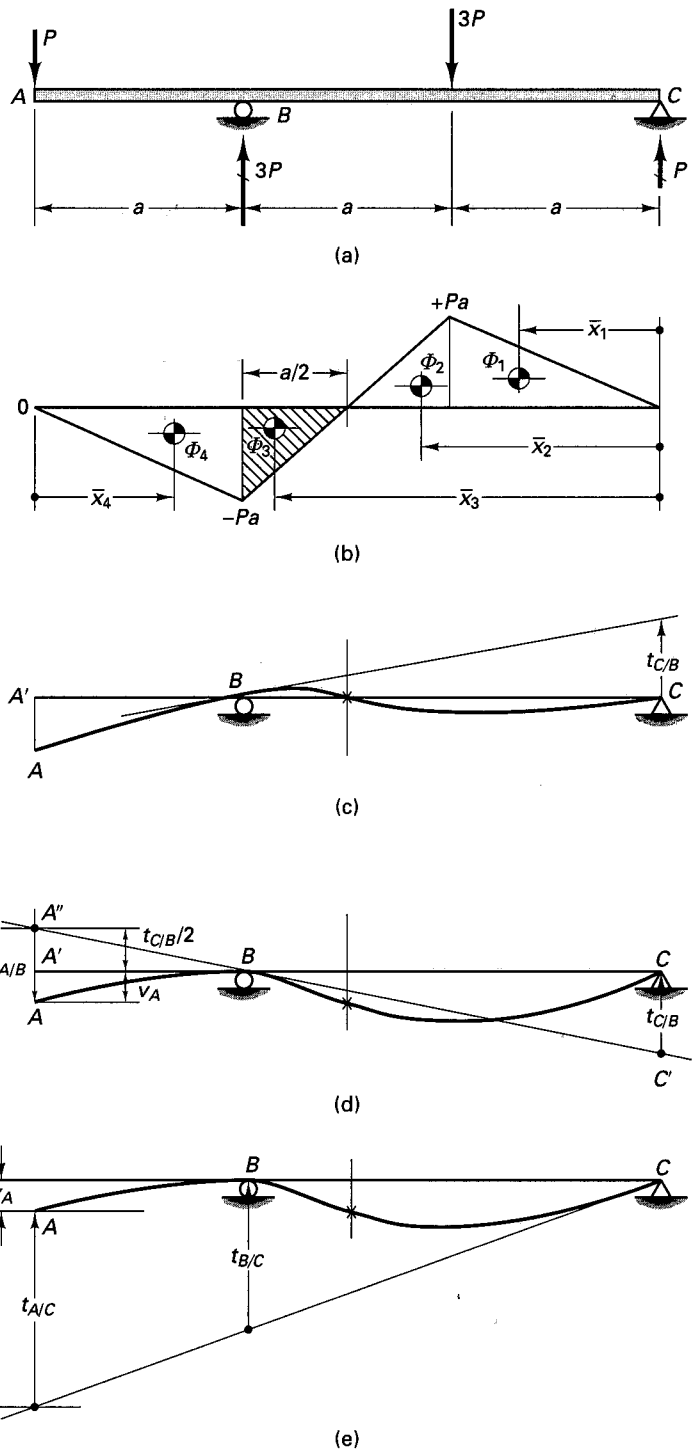

P
3P
A
B
C
3P
P
a
a
a
(a)
+Pa
$\bar{x}_1$
a/2
Φ_2
Φ_1
0
Φ_4
Φ_3
$\bar{x}_2$
$\bar{x}_4$
$\bar{x}_3$
–Pa
(b)
$t_{C/B}$
A′
B
C
A
(c)
A″
$t_{C/B}/2$
$t_{A/B}$
A′
B
C
v_A
A
$t_{C/B}$
C′
(d)
B
C
v_A
A
$t_{B/C}$
$\frac{3}{2}t_{B/C}$
$t_{A/C}$
(e)

Fig. 15-8

donde el signo negativo significa que el punto A está debajo de la tangente por B. Este signo no se usa ya que la geometría de la curva elástica indica la dirección de los desplazamientos reales. Así entonces, la deflexión del punto A *debajo de la línea que pasa por los soportes es*

$$v_A = \frac{Pa^3}{3EI} - \frac{1}{2}\frac{Pa^3}{6EI} = \frac{Pa^3}{4EI}$$

Este ejemplo ilustra la necesidad de observar los signos de las cantidades calculadas al aplicar el método de área-momento, aunque usualmente se encuentran menos dificultades que en este ejemplo. Por ejemplo, si la deflexión del extremo A se establece encontrando primero la rotación de la curva elástica en C, ninguna ambigüedad ocurrirá en la dirección de las tangentes. Este esquema de análisis se muestra en la figura 15-8(e), donde $v_A = \frac{3}{2}t_{B/C} - t_{A/C}$.

Ejemplo 15-6

Una viga simple soporta dos fuerzas iguales P y opuestas en los cuartos del claro; véase la figura 15-9(a). Encuentre la deflexión de la viga en el centro del claro. EI es constante.

SOLUCIÓN

El diagrama de momento flexionante y la curva elástica con una tangente en C se muestran en las figuras 15-9(b) y (c), respectivamente. Entonces, como los momento estáticos de las áreas positivas y negativas del diagrama de momento flexionante respecto a A y B, respectivamente, son numéricamente iguales (es decir, $|t_{A/C}| = |t_{B/C}|$), la deflexión de la viga en el centro del claro es *cero*. La curva elástica en este caso es *anti*simétrica. Ob-

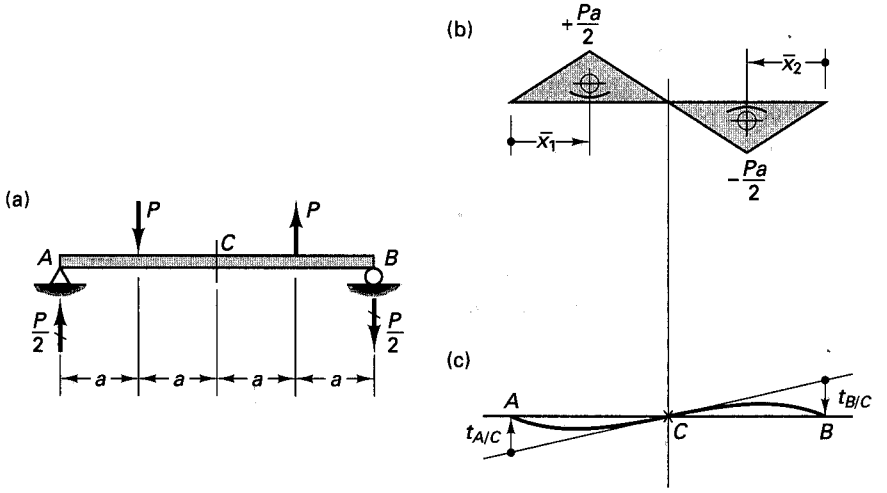


Fig. 15-9

servando esto, puede ahorrarse mucho trabajo al obtener las deflexiones en el *centro del claro*. La deflexión de *cualquier otro punto sobre la curva elástica puede encontrarse de la manera usual.*

Los ejemplos anteriores ilustran la manera en que el método de área-momento pueden usarse para obtener la deflexión en cualquier viga estáticamente determinada. Sin importar qué tan complejos puedan resultar los diagramas M/EI, los procedimientos anteriores son aplicables. En la práctica, cualquier diagrama M/EI puede ser aproximado por rectángulos y triángulos. También es posible introducir cambios angulares concentrados en articulaciones para tomar en cuenta discontinuidades en la dirección de las tangentes en tales puntos. Las magnitudes de las concentraciones pueden encontrarse de los requisitos cinemáticos.[4]

Para condiciones de carga complicadas, las deflexiones de vigas elásticas determinadas por el método de área-momento son a menudo convenientemente obtenidas por superposición. De esta manera, las áreas de los diagramas M/EI separados pueden asumir formas geométricas sencillas. En la próxima sección, la superposición se usa para resolver problemas estáticamente indeterminados.

El método descrito aquí puede usarse muy efectivamente para determinar la deflexión inelástica de vigas, siempre que los diagramas M/EI sean reemplazados por los diagramas de curvatura, como en la figura 14-26(c).

15-4. Vigas estáticamente indeterminadas

Las reacciones desconocidas de vigas estáticamente indeterminadas pueden hallarse fácilmente usando el método de área-momento empleando la superposición. Después de determinadas las reacciones redundantes, las deflexiones y giros de la viga pueden encontrarse de la manera usual, nuevamente usando la superposición. En esta sección se consideran dos procedimientos diferentes para encontrar las reacciones redundantes. En el procedimiento que más se usa, se reconoce que las vigas restringidas[5] y las vigas continuas difieren de las simplemente apoyadas principalmente por la presencia de momentos redundantes en los soportes. Por tanto, los diagramas de momento flexionante para esas vigas pueden considerarse formados de dos partes independientes, una parte para el momento causado por todas las cargas aplicadas sobre una viga supuesta como simplemente apoyada y la otra parte para los momentos redundantes en los extremos. Luego, el efecto de los momentos redundantes en el extremo se superpone sobre una viga supuesta como simplemente apoyada. Físicamente, esta noción puede aclararse imaginando una viga indeterminada cortada en los

[4]Para un tratamiento sistemático de problemas más complejos, véase por ejemplo, A. C. Scordelis y C. M. Smith, "An analytical procedure for calculating truss displacements" ("Un procedimiento analítico para calcular desplazamientos en armaduras"), *Proc. ASCE*, **732**, julio de 1955, 732-1–732-17.

[5]Las vigas indeterminadas con uno o más extremos fijos se llaman *vigas restringidas*.

soportes mientras se mantienen las reacciones verticales. La continuidad de la curva elástica de la viga se preserva por los momentos redundantes.

Aunque las ordenadas críticas de los diagramas de momento flexionante causados por los momentos redundantes no son conocidas, sus formas sí se conocen. La aplicación de un momento redundante en un extremo de una viga simple da un diagrama de momento triangular, con un máximo en la posición del momento aplicado y una ordenada cero en el otro extremo. Igualmente, cuando están presentes momentos en ambos extremos de una viga simple, dos diagramas de momentos triangulares se superponen en un diagrama de forma trapezoidal.

Las partes conocida y desconocida juntas del diagrama de momento flexionante dan un diagrama completo de momento flexionante. Este diagrama puede entonces usarse para aplicar los teoremas de área-momento a la curva elástica continua de una viga. Las condiciones geométricas de un problema, como la continuidad de la curva elástica en el soporte o las tangentes en extremos empotrados que no pueden girar, permiten una rápida formulación de ecuaciones para los valores desconocidos de los momentos redundantes en los soportes.

Un método alternativo para determinar las reacciones redundantes emplea un procedimiento basado en graficar los diagramas de momento por partes. Al aplicar este método, sólo uno de los soportes empotrados se deja en su lugar, formándose así una viga en voladizo. Se dibujan entonces diagramas por separado de momento flexionante para *cada una* de las fuerzas aplicadas, así como para las reacciones desconocidas en el extremo no soportado de la viga. La suma de *todos* esos diagramas de momento flexionante para el *voladizo* forman el diagrama *completo* de momento flexionante que se usa entonces en la manera regular.

En cualquier método, para vigas de rigidez variable, los diagramas de momento deben dividirse entre las correspondientes EI.

Ambos métodos para encontrar las reacciones redundantes están ilustrados en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 15-7

Encuentre la deflexión máxima hacia abajo de la pequeña viga de aluminio en la figura 15-10(a) debido a una fuerza aplicada $P = 100$ N. Considere para el aluminio $EI = 60\ \text{N} \cdot \text{m}^2$.

SOLUCIÓN

La solución de este problema consta de dos partes. Primero debe determinarse una reacción redundante para establecer los valores numéricos del diagrama de momento flexionante; luego se aplica el procedimiento usual de área-momento para encontrar las deflexiones.

Suponiendo que a la viga se le quita el momento de extremo redundante, se construye un simple diagrama de momento arriba de la línea base en la figura 15-10(b). El diagrama de momento de forma conocida debido al momento redundante desconocido M_A se muestra sobre el mismo diagra-

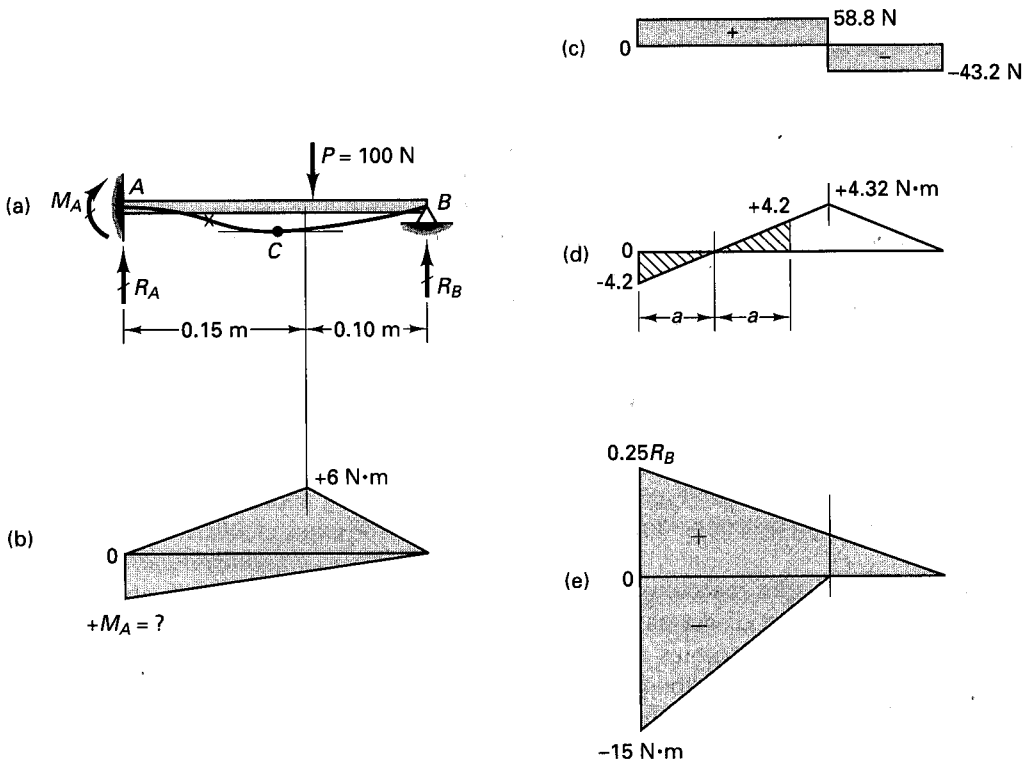


Fig. 15-10

ma debajo de la línea base. Se supone que M_A es positivo ya que de esta manera su signo correcto se obtiene automáticamente de acuerdo con la convención de signos para vigas. El diagrama compuesto representa un diagrama *completo* de momento flexionante.

La tangente en el extremo empotrado permanece horizontal después de la aplicación de la fuerza P. Por consiguiente, la condición geométrica es $t_{B/A} = 0$. Una ecuación formulada con base en esto da una solución para M_A.[6] Las ecuaciones del equilibrio estático se usan para calcular las reacciones. El diagrama final de momento flexionante, figura 15-10(d), se obtiene de la manera usual después de que se conocen las reacciones. Entonces, como $t_{B/A} = 0$,

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(0.25)(6)\frac{1}{3}(0.25 + 0.10) + \frac{1}{2}(0.25)M_A\frac{2}{3}(0.25)\right] = 0$$

Por consiguiente, $M_A = -4.2\ \text{N} \cdot \text{m}$. Como se supuso inicialmente que M_A es positivo y así se muestra en las figuras 15-10(a)y (b), este resultado indica que en realidad M_A tiene sentido *opuesto*. El sentido correcto para M_A debe usarse en las ecuaciones de estática que siguen y se refleja en los dia-

[6]Véase en la Tabla 2 del apéndice la distancia centroidal de un triángulo entero.

gramas de cortante y momento construidos en las figuras 15-10(c) y (d), respectivamente.

$$\sum M_A = 0 \curvearrowright + 100(0.15) - R_B(0.25) - 4.2 = 0 \quad R_B = 43.2\text{ N}$$

$$\sum M_B = 0 \curvearrowleft + 100(0.10 + 4.2 - R_A(0.25) = 0 \quad R_A = 56.8\text{ N}$$

Comprobación: $\sum F_y = 0 \uparrow + \qquad 43.2 + 56.8 - 100 \qquad = 0$

La deflexión máxima ocurre donde la tangente a la curva elástica es horizontal, es decir, en el punto C de la figura 15-10(a). Por tanto, notando que la tangente en A es también horizontal y usando el primer teorema de área-momento, el punto C queda localizado. Esto ocurre cuando las áreas rayadas en la figura 15-10(d) que tienen signos opuestos son iguales; esto es, a una distancia $2a = 2(4.2/56.8) = 0.148$ m desde A. La desviación tangencial $t_{A/C}$ (o $t_{C/A}$) da la deflexión del punto C.

$$\begin{aligned} v_{\text{máx}} &= v_C = t_{A/C} \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2} \times 0.074(+4.2)\left(0.074 + \frac{2}{3} \times 0.074\right)\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \times 0.074(-4.2)\frac{1}{3} \times 0.074\right] \\ &= (15.36)10^{-3}/EI = 0.256\text{ mm} \qquad \text{(hacia abajo)} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

Una solución rápida puede también obtenerse graficando el diagrama de momento por partes del voladizo. Esto se muestra en la figura 15-10(e). Note que una de las ordenadas está en términos de la reacción redundante R_B. De nuevo, usando la condición geométrica $t_{B/A} = 0$, se obtiene una ecuación para encontrar R_B. Las otras reacciones se obtienen por estática. De $t_{B/A} = 0$,

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}(0.25)(+0.25R_B)\frac{2}{3}(0.25) + \frac{1}{2}(0.15)(-15)\left(0.1 + \frac{2}{3} \times 0.15\right)\right] = 0$$

Por consiguiente, $R_B = 43.2$ N, actuando hacia arriba, como se supuso.

$$\sum M_A = 0 \curvearrowleft + M_A + 43.2(0.25) - 100(0.15) = 0 \quad M_A = 4.2\text{ N} \cdot \text{m}$$

Aquí M_A, en la ecuación de estática para la suma de momentos, se considera positivo ya que se supuso actuando en sentido *antihorario*. Sin embargo, en la *convención de signos de vigas*, tal momento de extremo en A es negativo.

Después de construido el diagrama de momento combinado, figura 15-10(d), el resto del trabajo es el mismo que en la solución precedente.

Ejemplo 15-8

Encuentre los momentos en los soportes de una viga doblemente empotrada y cargada con una carga uniformemente distribuida con valor de w_o N/m; véase la figura 15-11(a).

SOLUCIÓN

Los momentos en los soportes se llaman momentos de empotramiento y su determinación es de gran importancia en la teoría estructural. Debido a la simetría en este problema, los momentos de empotramiento son iguales, igual que lo son las reacciones verticales con valor cada una de $w_oL/2$. El diagrama de momento para esta viga, considerada como simplemente apoyada, es una parábola, como se muestra en la figura 15-11(b), mientras que los momentos de empotramiento supuestos positivos dan el diagrama rectangular mostrado en la misma figura.

Aunque esta viga es estáticamente indeterminada de segundo grado, debido a la simetría, una sola ecuación basada en una condición geométrica es suficiente para dar los momentos redundantes. De la geometría de la curva elástica, cualquiera de las siguientes condiciones puede usarse: $\Delta\theta_{A/B} = 0$,[7] $t_{B/A} = 0$, o $t_{A/B} = 0$. De la primera condición, $\Delta\theta_{A/B} = 0$,

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}L\left(+\frac{w_oL^2}{8}\right) + L(+M_A)\right] = 0$$

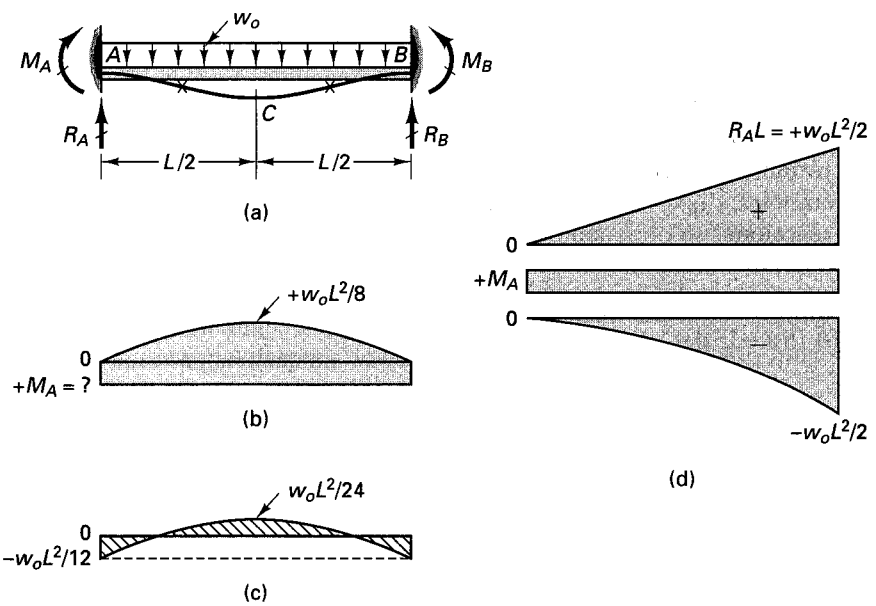


Fig. 15-11

[7]También, como la tangente en el centro del claro es horizontal, $\Delta\theta_{A/C} = 0$ y $\Delta\theta_{C/B} = 0$.

Entonces

$$M_A = M_B = -\frac{w_o L^2}{12} \tag{15-8}$$

El signo negativo de esos momentos indica que sus sentidos son opuestos a los supuestos en las figuras 15-11(a) y (b).

El diagrama de momento combinado se muestra en la figura 15-11(c). En comparación con el momento flexionante máximo de una viga simple, se tiene una considerable reducción en la magnitud de los momentos críticos.

SOLUCIÓN ALTERNATIVA

El diagrama de momento por partes de voladizos se muestra en la figura 15-11(d). Notando que $R_A = R_B = w_o L/2$ y usando la misma condición geométrica que antes, $\Delta\theta_{A/B} = 0$, puede verificarse la solución anterior como sigue:

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\left(+\frac{w_o L^2}{2}\right) + L(+M_A) + \frac{1}{3}L\left(-\frac{w_o L^2}{2}\right)\right] = 0$$

y

$$M_A = -\frac{w_o L^2}{12}$$

Ejemplo 15-9

Una viga doblemente empotrada soporta una carga concentrada P como se muestra en la figura 15-12. Encuentre los momentos de empotramiento. EI es constante.

SOLUCIÓN

Tratando la viga AB como una viga simple, el diagrama de momento debido a P se muestra arriba de la línea base en la figura 15-12(b). Los momentos de empotramiento supuestos positivos *no son iguales* y de ellos resulta un diagrama trapezoidal. Se dispone de tres condiciones geométricas para la curva elástica para resolver este problema, que es indeterminado de segundo grado:

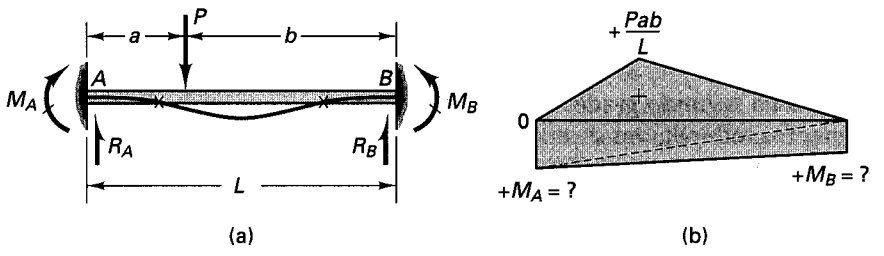


Fig. 15-12

(a) $\Delta\theta_{A/B} = 0$, ya que el cambio angular entre las tangentes en A y B es cero.
(b) $t_{B/A} = 0$, ya que el soporte B no se desvía desde una tangente fija en A.
(c) Similarmente, $t_{A/B} = 0$.

Cualquiera de esas *dos* condiciones puede usarse; la simplicidad aritmética de las ecuaciones resultantes gobierna las opciones. Entonces, usando la condición (a), que es siempre la más sencilla, y la condición (b), las dos ecuaciones son[8]

$$\Delta\theta_{A/B} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}L\frac{Pab}{L} + \frac{1}{2}LM_A + \frac{1}{2}LM_B\right) = 0$$

o

$$M_A + M_B = -\frac{Pab}{L}$$

$$t_{B/A} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}L\frac{Pab}{L}\frac{1}{3}(L+b) + \frac{1}{2}LM_A\frac{2}{3}L + \frac{1}{2}LM_B\frac{1}{3}L\right] = 0$$

o

$$2M_A + M_B = -\frac{Pab}{L^2}(L+b)$$

Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones reducidas se obtiene

$$M_A = -\frac{Pab^2}{L^2} \quad \text{y} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$$

Esos momentos negativos tienen un sentido opuesto al supuesto inicialmente en las figuras 15-12(a) y (b).

Ejemplo 15-10

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para una viga continua cargada como se muestra en la figura 15-13(a). *EI* es constante en toda la viga.

SOLUCIÓN

Esta viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Tratando cada claro como viga simple con los momentos redundantes supuestos positivos, se obtiene el diagrama de momento de la figura 15-13(c). Para cada

[8]Véase la Tabla 2 del apéndice para la distancia centroidal de un triángulo entero.

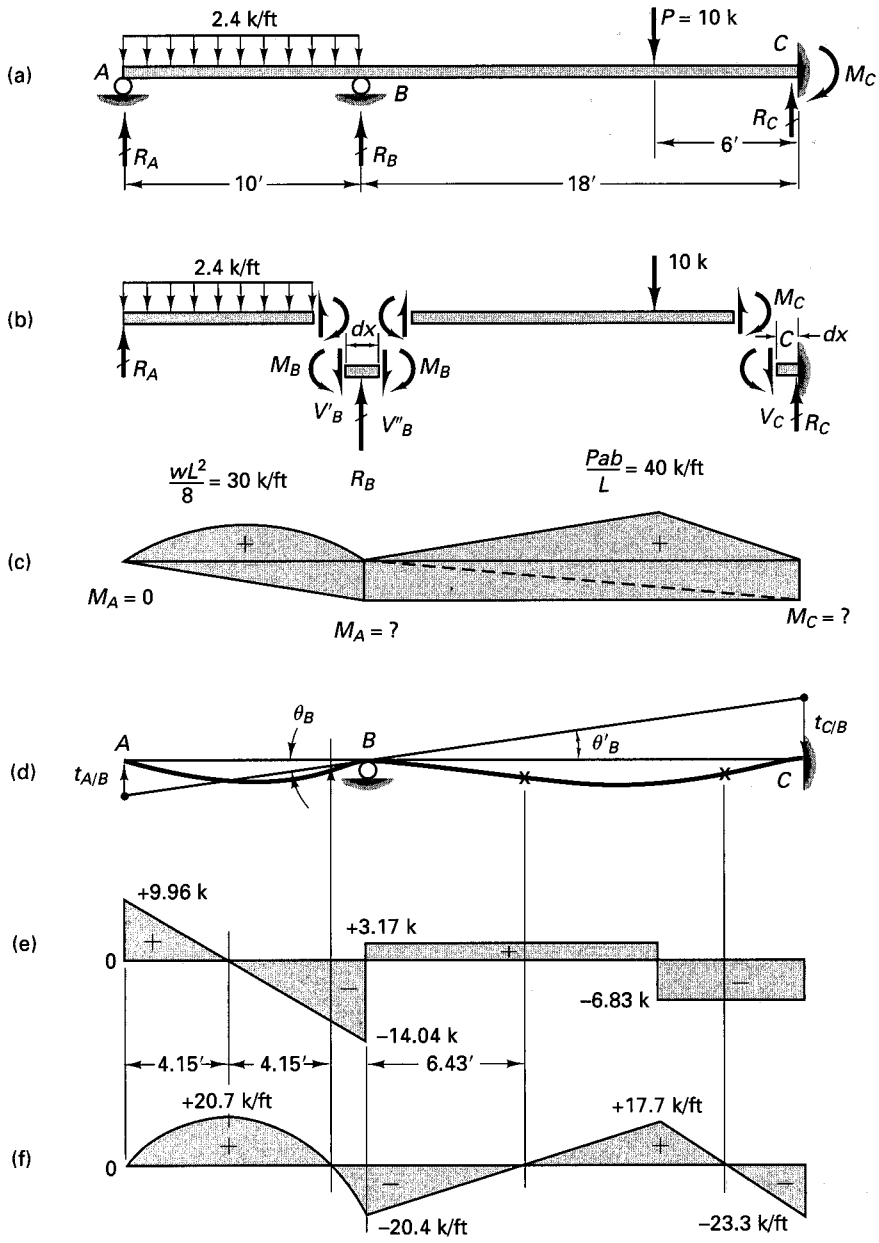


Fig. 15-13

claro, esos diagramas son similares a los mostrados antes en las figuras 15-10(b) y 15-12(b). Ningún momento extremo existe en A ya que se trata de un rodillo. La clave de la solución está en dos condiciones geométricas para la curva elástica sobre toda la viga, figura 15-13(d):

(a) $\theta_B = \theta'_B$. Como la viga es físicamente continua, hay una línea en el soporte B que es tangente a la curva elástica en *cualquiera* de los claros.
(b) $t_{B/C} = 0$, ya que el soporte B no se desvía desde una tangente fija en C.

Para aplicar la condición (a), se determinan $t_{A/B}$ y $t_{C/B}$ y, *dividiendo esas cantidades entre las longitudes del claro respectivo*, se obtienen los dos ángulos θ_B y θ'_B. Esos ángulos son iguales. Sin embargo, aunque $t_{C/B}$ se expresa algebraicamente como una cantidad positiva, la tangente por el punto B está *arriba* del punto C. Por tanto, esta desviación debe considerarse negativa. Por consiguiente, usando la condición (a), se obtiene una ecuación con los momentos redundantes.

$$t_{A/B} = \frac{1}{EI}\left[\frac{2}{3}10(+30)\frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}10(+M_B)\frac{2}{3}10\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\left(1000 + \frac{1}{3}100M_B\right)$$

$$t_{C/B} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}18(+40)\frac{1}{3}(18+6) + \frac{1}{2}18(+M_B)\frac{2}{3}18 + \frac{1}{2}18(+M_c)\frac{1}{3}18\right]$$

$$= \frac{1}{EI}(2880 + 108M_B + 54M_C)$$

Como

$$\theta_B = \theta'_B \qquad \text{o} \qquad \frac{t_{A/B}}{L_{AB}} = -\frac{t_{C/B}}{L_{CB}}$$

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{1000 + 100M_B/3}{10}\right) = -\frac{1}{EI}\left(\frac{2880 + 108M_B + 54M_C}{18}\right)$$

o

$$28M_B/3 + 3M_C = -260$$

Usando la condición (b) para el claro BC proporciona otra ecuación, $t_{B/C} = 0$, o

$$\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}18(+40)\frac{1}{3}(18+12) + \frac{1}{2}18(+M_B)\frac{1}{3}18 + \frac{1}{2}18(+M_C)\frac{2}{3}18\right] = 0$$

o

$$3M_B + 6M_C = -200$$

Resolviendo las dos ecuaciones reducidas simultáneamente,

$$M_B = -20.4 \text{ ft-lb} \qquad \text{y} \qquad M_C = -23.3 \text{ ft-lb}$$

donde los signos concuerdan con la convención de signos usada para vigas. Esos momentos con sus sentidos apropiados se muestran en la figura 15-13(b).

Después de encontrados los momentos redundantes M_A y M_B, ningún procedimiento nuevo es necesario para construir los diagramas de momento y fuerza cortante. *Sin embargo, debe tenerse cuidado de incluir los momentos en los soportes al calcular las fuerzas cortantes y reacciones.* Usualmente, las vigas aisladas, como se muestra en la figura 15-13(b), son los cuerpos libres más convenientes para determinar las fuerzas cortantes. Las reacciones se obtienen sumando las fuerzas cortantes sobre las vigas adyacentes.

Para el cuerpo libre AB:

$$\sum M_B = 0 \curvearrowleft + 2.4(10)5 - 20.4 - 10R_A = 0 \quad R_A = 9.96\,\text{k} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 \curvearrowright + 2.4(10)5 + 20.4 - 10V'_B = 0 \quad V'_B = 14.04\,\text{k} \uparrow$$

Para el cuerpo libre BC:

$$\sum M_C = 0 \curvearrowleft + 10(6) + 20.4 - 23.3 - 18V''_B = 0$$

$$V''_B = 3.17\,\text{k} \uparrow$$

$$\sum M_B = 0 \curvearrowright + 10(12) - 20.4 + 23.3 - 18V_C = 0$$

$$V_C = R_C = 6.83\,\text{k} \uparrow$$

Comprobación: $R_A + V'_B = 24\,\text{k} \uparrow$ y $V''_B + R_C = 10\,\text{k} \uparrow$

Entonces, $R_B = V'_B + V''_B = 17.21$ kips $\uparrow$.

Los diagramas completos de fuerza cortante y momento flexionante se muestran en las figuras 15-13(e) y (f), respectivamente.

Generalizando el procedimiento usado en el ejemplo precedente, puede deducirse para vigas continuas una fórmula de recurrencia (es decir, una ecuación que puede aplicarse repetidamente para cada dos claros adyacentes). Para cualquier número n de claros, pueden escribirse $n - 1$ de tales ecuaciones. Esto da suficientes ecuaciones simultáneas para la solución de los momentos redundantes sobre los soportes. Esta fórmula de recurrencia se llama *ecuación de los tres momentos* porque en ella aparecen tres momentos desconocidos.[9]

---

[9]Para el análisis de este procedimiento, véase por ejemplo, E. P. Popov, *Mechanics of Materials* (*Mecánica de materiales*), 2a. ed., Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1976, pp. 435-440.

PROBLEMAS

Sección 15-3 Las deflexiones en vigas en puntos específicos en muchos de los problemas de las secciones 15-7 y 15-8 pueden ser asignadas para ser resueltas por el método de área-momento.

15-1 al 15-12. Usando el método de área-momento, determine la deflexión y la pendiente de las curvas elásticas en los puntos A debido a las cargas aplicadas en las vigas, como se muestra en las figuras. Especifique la dirección de la deflexión y de la rotación para las cantidades calculadas. Si no se da el tamaño de la viga ni su momento de inercia, considere EI constante. Use en todos los casos $E = 29 \times 10^3$ ksi o 200 GPa. Dibuje en todos los casos la curva elástica, mostrando los puntos de inflexión.

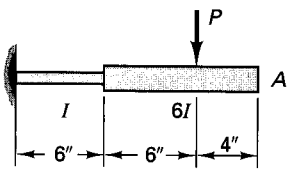


Fig. P15-1

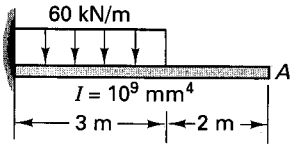


Fig. P15-2

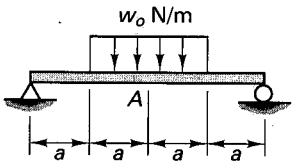


Fig. P15-3

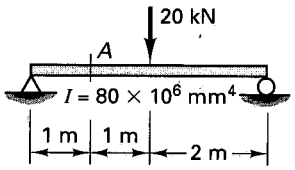


Fig. P15-4

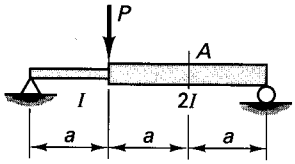


Fig. P15-5

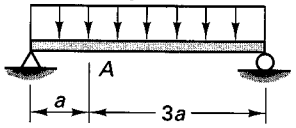


Fig. P15-6

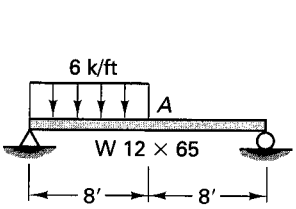


Fig. P15-7

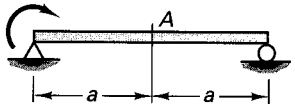


Fig. P15-8

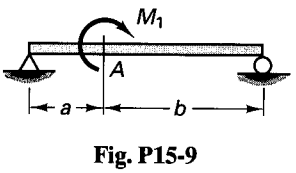


Fig. P15-9

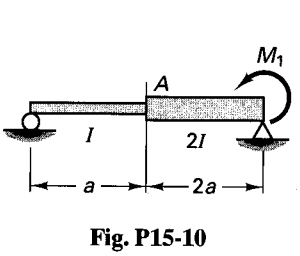


Fig. P15-10

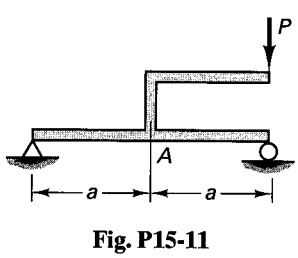


Fig. P15-11

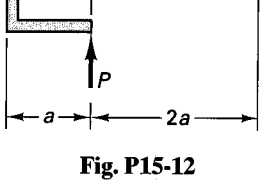


Fig. P15-12

15-13. Determine la deflexión en el centro del claro de una viga simple, cargada como se muestra en la figura, resolviendo los dos problemas separados indicados y superponiendo los resultados. Use el método de área-momento. *EI* es constante. (*Nota:* La solución de problemas complejos subdividiéndolos en una parte simétrica y otra antisimétrica es a menudo muy conveniente porque reduce el trabajo numérico.)

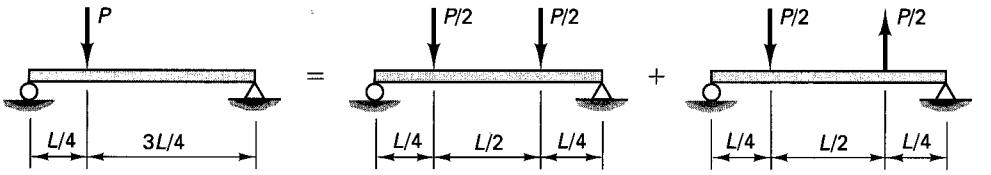


Fig. P15-13

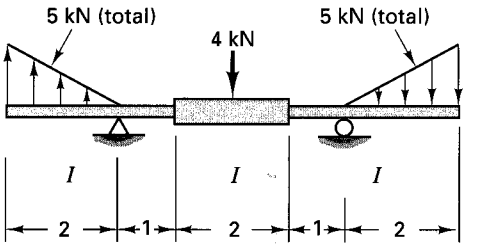


Fig. P15-14

15-14. Determine la deflexión elástica en el centro del claro para la viga cargada como se muestra en la figura; $I_1 = 10 \times 10^6$ mm^4, $I_2 = 20 \times 10^6$ mm^4 y $E = 70$ GPa. Todas las dimensiones están en metros.

15-15. Usando el método de área-momento, establezca la ecuación de la curva elástica para la viga en el problema 14-9.

15-16. Usando el método de área-momento, establezca la ecuación de la curva elástica para la viga en el problema 15-6.

15-17. Usando el método de área-momento, determine la deflexión máxima para la viga en el problema 15-8.

15-18. Usando el método de área-momento, determine la deflexión máxima para la viga en el problema 15-9.

15-19. Usando el método de área-momento, determine la deflexión máxima para la viga en el problema 15-5.

15-20. Usando el método de área-momento, determine la deflexión máxima para la viga en el problema 15-10.

15-21. Usando el método de área-momento, resuelva el problema 14-38 y determine la deflexión máxima.

15-22. Para la viga cargada como se muestra en la figura, determine (a) la deflexión en el centro del claro, (b) la deflexión en el punto de inflexión de la curva elástica y (c) la deflexión máxima, $EI = 1800$ lb-in^2.

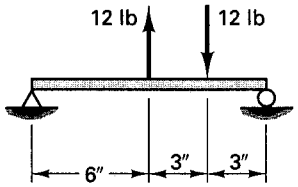


Fig. P15-22

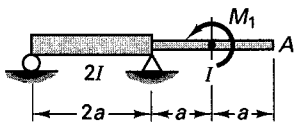


Fig. P15-23

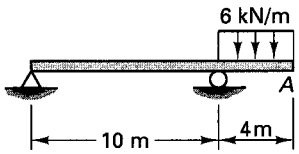


Fig. P15-24

15-23 y 15-24. Usando el método de área-momento, determine la deflexión y la pendiente del voladizo en el punto A para las vigas cargadas como se muestra en las figuras. La EI en el segundo problema es constante.

15-25. Determine la deflexión máxima *hacia arriba* para el voladizo de una viga cargada como se muestra en la figura. E e I son constantes.

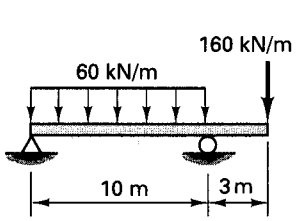


Fig. P15-25

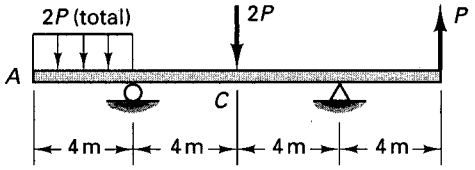


Fig. P15-26

15-26. Para la viga elástica de rigidez flexionante constante EI, cargada como se muestra en la figura, encuentre la deflexión y la pendiente en los puntos A y C.

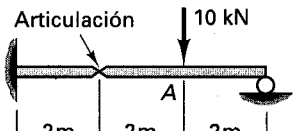


Fig. P15-27

15-27. Una estructura está formada uniendo una viga simple a un voladizo por medio de una articulación, como se muestra en la figura. Si se aplica una fuerza de 10 kN en el centro del claro simple, determine la deflexión en A causada por esta fuerza. EI es constante en toda la estructura.

15-28. Una viga articulada está cargada como se muestra en la figura. Determine la deflexión y la pendiente de la curva elástica en el punto A.

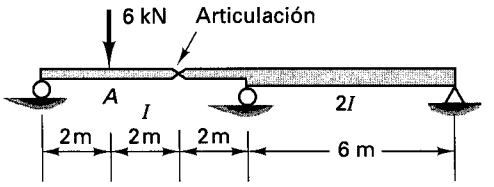


Fig. P15-28

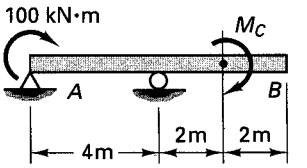


Fig. P15-29

15-29. La viga AB está sometida a un momento concentrado en A y a un momento concentrado desconocido M_C, como se muestra en la figura. Usando el método de área-momento, determine la magnitud del momento M_C de manera que la deflexión en el punto B sea cero. EI es constante.

15-30. La viga mostrada en la figura tiene una $EI = 3600 \times 10^6$ lb-in^2. Determine la distancia a tal que la deflexión en A sea de 0.25 in si el extremo está sometido a un momento concentrado $M_A = 15$ k-ft.

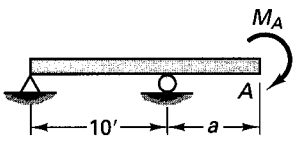


Fig. P15-30

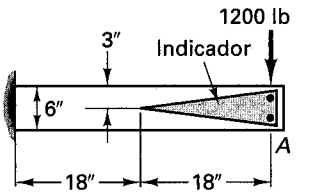


Fig. P15-31

15-31. Un indicador luminoso está unido en A a una viga de madera de 6×6 in, como se muestra en la figura. Determine la posición del extremo del indicador cuando se aplica una fuerza concentrada de 1200 lb. $E = 1.2 \times 10^6$ psi.

15-32. La viga $ABCD$ está inicialmente horizontal. La carga P se aplica luego en C, como se muestra en la figura. Se quiere colocar una fuerza vertical en B para que la posición de la viga en B recupere su nivel original $ABCD$. ¿Qué fuerza se requiere en B?

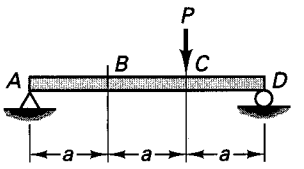


Fig. P15-32

Sección 15-4

15-33 y 15-34. Para las vigas cargadas como se muestra en las figuras, usando el método de área-momento, determine las reacciones redundantes y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. En ambos problemas *EI* es constante.

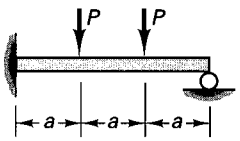


Fig. P15-33

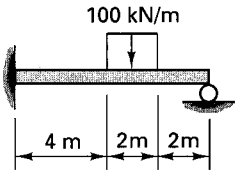


Fig. P15-34

15-35. Para la viga cargada como se muestra en la figura, (a) determine la razón del momento en el empotramiento al momento aplicado M_A; (b) determine la rotación del extremo *A*. *EI* es constante.

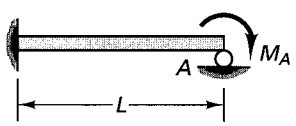


Fig. P15-35

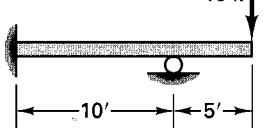


Fig. P15-36

15-36. (a) Usando el método de área-momento, determine el momento redundante en el extremo empotrado para la viga mostrada en la figura y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Ignore el peso de la viga. (b) Seleccione una viga W usando un esfuerzo de flexión permisible de 18,000 psi y un esfuerzo cortante permisible de 12,000 psi. (c) Determine la deflexión máxima de la viga entre sus soportes y la deflexión máxima del voladizo. $E = 29 \times 10^6$ psi.

15-37. (a) Usando el método de área-momento, determine el momento redundante en el extremo empotrado para la viga mostrada en la figura y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. (b) Seleccione el peralte para una viga de madera de 200 mm de ancho usando un esfuerzo de flexión permisible de 8,000 kN/m^2 y un esfuerzo cortante permisible de 1,000 kN/m^2.

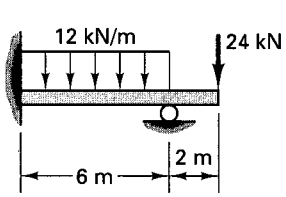


Fig. P15-37

15-38. Para la viga de rigidez EI constante y cargada como se muestra en la figura, (a) determine la reacción y la deflexión en el punto A. La constante de resorte tiene el valor $k = 3EI/a^3$. (b) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Muestre la forma deflexionada de la viga.

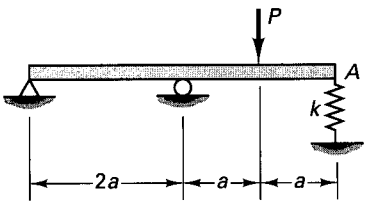


Fig. P15-38

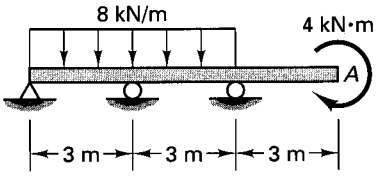


Fig. P15-39

15-39. Para la viga cargada como se muestra en la figura, (a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante, (b) esboce la forma de la curva elástica mostrando el punto de inflexión y (c) determine la rotación del extremo A.

15-40. Para la viga cargada como se muestra en la figura, (a) determine la razón del momento en el extremo empotrado al momento aplicado M_A; (b) determine la rotación del extremo A.

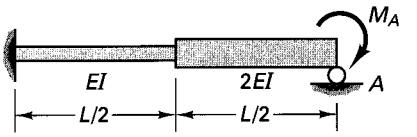


Fig. P15-40

15-41. Usando el método área-momento, demuestre que la deflexión máxima de una viga doblemente empotrada con carga uniformemente distribuida es la quinta parte de la deflexión máxima de la misma viga simplemente apoyada. EI es constante.

15-42 y 15-43. Para las vigas de EI constante mostradas en las figuras, usando el método área-momento, (a) determine los momentos de empotramiento debido a las cargas aplicadas y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. (b) Encuentre las deflexiones máximas.

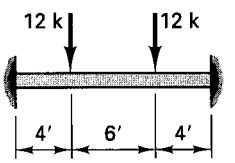


Fig. P15-42

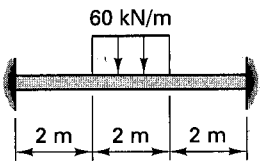


Fig. P15-43

15-44 al 15-47. Para las vigas de rigidez *EI* constante mostradas en las figuras, dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. Localice los puntos de inflexión y esboce las curvas elásticas.

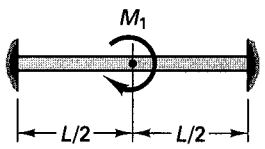


Fig. P15-44

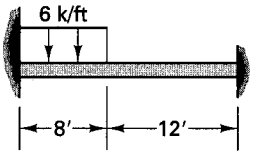


Fig. P15-45

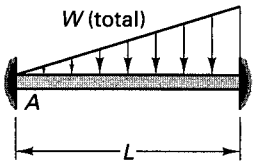


Fig. P15-46

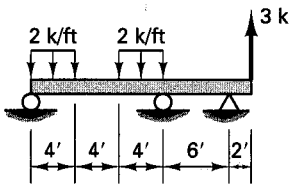


Fig. P15-47

15-48. Una viga de rigidez *EI* constante está empotrada en ambos extremos y tiene claro *L*. Si uno de los soportes se asienta verticalmente una cantidad Δ con respecto al otro soporte (sin girar), ¿qué momentos serán inducidos en los extremos?

15-49 y 15-50. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para las vigas de rigidez *EI* variable mostradas en las figuras. Localice los puntos de inflexión y esboce las curvas elásticas.

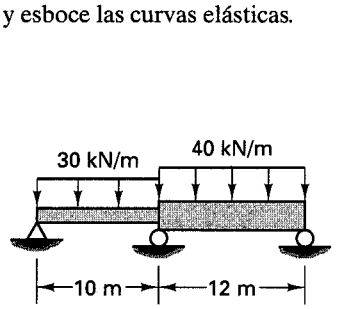


Fig. P15-49

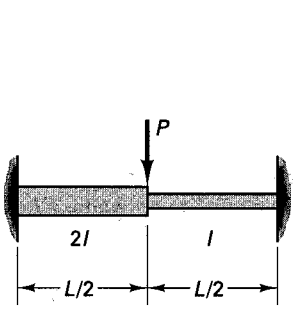


Fig. P15-50

15-51. Resuelva el ejemplo 15-10 suponiendo que el soporte derecho *C* está articulado.

15-52. Resuelva el problema 15-47 suponiendo que el soporte izquierdo está empotrado.

15-53. Resuelva el ejemplo 15-10 suponiendo que ambos soportes *A* y *C* están empotrados.

16

Columnas

16-1. Introducción

La selección de elementos estructurales y de máquinas se basa en tres características: **resistencia, rigidez** y **estabilidad**. Los procedimientos de análisis de esfuerzos y deformaciones en un estado de equilibrio *estable* fueron vistos con algún detalle en los capítulos anteriores. Pero no todos los sistemas estructurales son necesariamente estables. Por ejemplo, considere una barra metálica con extremos a escuadra de 10 mm de diámetro. Si tal barra fuese de 20 mm de largo y actuase como miembro axialmente comprimido, no surgiría la consideración de su inestabilidad y se le podría aplicar una fuerza considerable. Por otra parte, si otra barra del mismo material fuese de 1000 mm y se hiciese actuar en compresión, entonces, bajo una carga mucho más pequeña que la que podría soportar la pieza corta, la barra larga se pandearía lateralmente y se colapsaría. Una barra de medir, sometida a compresión axial, fallaría de la misma manera. La consideración de la resistencia del material solamente no es suficiente para predecir el comportamiento de tales miembros. Las consideraciones de estabilidad son primordiales en algunos sistemas estructurales.

El fenómeno de la inestabilidad estructural ocurre en numerosas situaciones en que se encuentran presentes esfuerzos de compresión. Las láminas

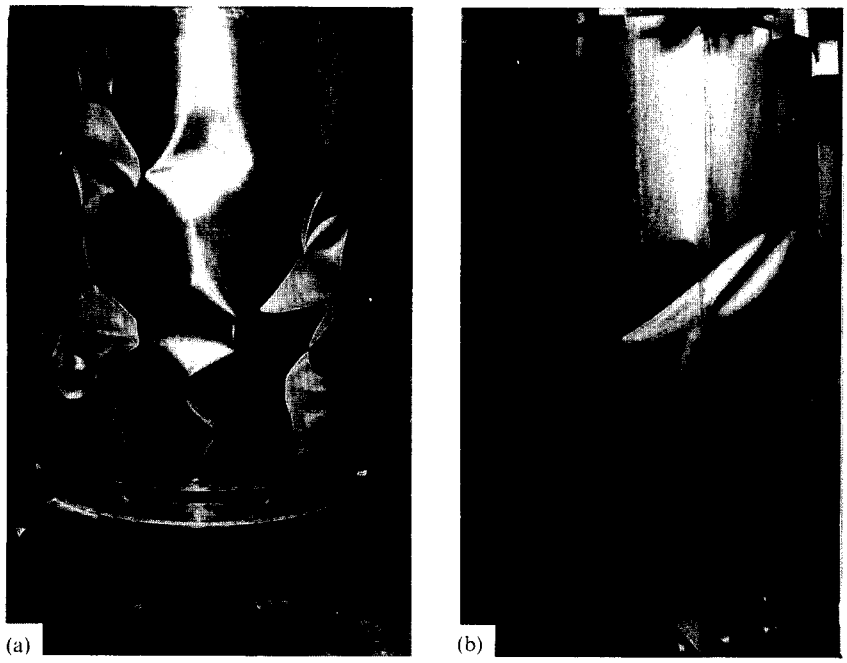


Fig. 16-1 Patrones típicos de pandeo de cilindros de pared delgada (a) en compresión y (b) en torsión de un cilindro con presión interna. (Cortesía de L. A. Harris de la North American Aviation, Inc.)

delgadas, aunque totalmente capaces de soportar cargas de tensión, son muy pobres en su capacidad para transmitir compresión. Las vigas estrechas, no soportadas lateralmente, pueden ladearse y fallar bajo una carga aplicada. Los tanques al vacío, así como los cascos de submarinos, a menos que estén apropiadamente diseñados, pueden distorsionarse severamente bajo presión externa y asumir formas que difieren drásticamente de su geometría original. Un tubo de pared delgada puede arrugarse como papel de seda al estar sometido a compresión axial o a un par de torsión; véase la figura 16-1.[1] Durante algunas etapas del despegue, las delgadas cubiertas de los misiles están cargadas críticamente en compresión. Esos son problemas crucialmente importantes del diseño ingenieril. Además, los fenómenos de pandeo o abollamiento observados en miembros cargados en compresión ocurren a menudo súbitamente. Por esta razón, muchas fallas por inestabilidad estructural son muy espectaculares y peligrosas.

[1]Las figuras están adaptadas de L. A. Harris, H. W. Suer y W. T. Skene, "Model investigations of unstiffened and stiffened circular shells" ("Investigaciones en modelos de cascarones circulares no rigidizados y rigidizados"), *Experimental Mechanics*, julio, 1961, pp. 3 y 5.

Un vasto número de los problemas de inestabilidad estructural sugeridos por el listado precedente de problemas están más allá del alcance de este texto.[2] Esencialmente, sólo los problemas de columnas serán considerados aquí.

Por conveniencia, este capítulo se divide en dos partes. La parte A se dedica a la teoría del pandeo en columnas y la parte B trata de las aplicaciones al diseño. Sin embargo, primero serán vistos ejemplos de posibles inestabilidades en miembros prismáticos rectos con diferentes secciones transversales. A esto seguirá el establecimiento de los criterios de estabilidad para el equilibrio estático. El propósito de las siguientes dos secciones introductorias es aclarar al lector los aspectos de la inestabilidad en columnas considerados en el resto del capítulo.

16-2. Ejemplos de inestabilidad

El análisis del problema general de inestabilidad aun de columnas *prismáticas* rectas vistas en este capítulo es bastante complejo, y es importante ser consciente, por lo menos en una forma *cualitativa*, de las complejidades implicadas para entender las limitaciones de las ecuaciones obtenidas subsecuentemente. El pandeo de columnas rectas es fuertemente influenciado por el tipo de sección transversal; haremos a continuación algunas consideraciones sobre este problema.

En numerosas aplicaciones de ingeniería, los miembros a compresión tienen secciones transversales tubulares. Si el espesor de la pared es delgado, los elementos tipo placa de tales miembros pueden pandearse localmente. Un ejemplo de este comportamiento está ilustrado en la figura 16-2(a) para un tubo cuadrado de pared delgada. Bajo una carga axial suficientemente grande, las paredes laterales tienden a subdividirse en una secuencia de abolladuras alternadas hacia afuera y hacia adentro. En consecuencia, las placas soportan un esfuerzo axial menor en las regiones de grandes desplazamientos por pandeo respecto a las esquinas; véase la figura 16-2(b). Para tales casos, es costumbre aproximar la compleja distribución del esfuerzo por un esfuerzo permisible constante que actúa sobre un *ancho efectivo w* próximo a las esquinas o a los rigidizados.[3] En este texto, excepto en el diseño de columnas de aleaciones de aluminio, se supondrá que los espesores de elementos de placa de columnas son suficientemente grandes para excluir la necesidad de considerar este fenómeno de pandeo local.

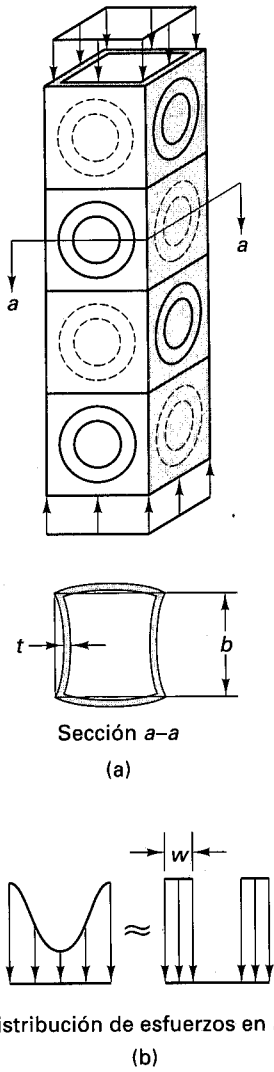


Fig. 16-2 Representación esquemática de un tubo cuadrado de pared delgada pandeado.

[2] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures* (*Resistencia al pandeo de estructuras metálicas*), Nueva York, McGraw-Hill, 1952; D. O. Brush y B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells* (*Pandeo de barras, placas y cascarones*), Nueva York, McGraw-Hill, 1975; A. Chajes, *Principles of Structural Stability* (*Principios de estabilidad estructural*), Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1974; G. Gerard *et al.*, *Handbook of Structural Stability* (*Manual de estabilidad estructural*), partes I-VI, NACA TN, pp. 3781-3786, Washington, DC, NASA, 1957-1958; B. G. Johnston (editor), *Design Criteria for Metal Compression Members* (*Criterios de diseño para miembros metálicos a compresión*), 4a. ed., Nueva York, Wiley, 1988; S. P. Timoshenko y J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (*Teoría de la estabilidad elástica*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1961; A. S. Volmire, *Flexible Plates and Shells* (*Placas y cascarones flexibles*), Air Force Flight Dynamics Laboratory, trans. Technical Report núms. 66-216, Wright-Patterson Air Force Base, 1967.

[3] T. von Karman, E. E. Sechler y L. H. Donnell, "The strength of thin plates in compression" ("La resistencia de placas delgadas en compresión"), *Trans. ASME, 54*, APM-54-5, 1932, pp. 53-57. Véanse también las referencias dadas en el último pie de página.

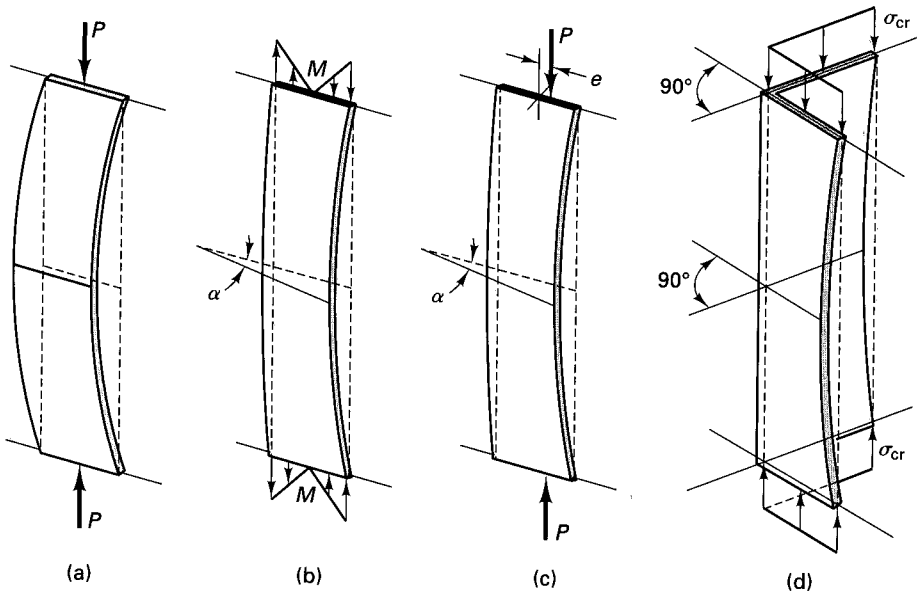


Fig. 16-3 Modos de pandeo de columnas: (a) flexión pura, (b) y (c) flexión torsionante y (d) torsión pura.

Algunos aspectos que requieren atención en un problema general de inestabilidad de columna están ilustrados en la figura 16-3. Aquí, el énfasis se hace en el tipo de pandeo que es posible en miembros prismáticos. Un tablón de rigidez flexionante limitada pero de rigidez torsionante adecuada, sometido a una fuerza axial de compresión, se muestra pandeado en un modo de flexión en la figura 16-3(a). Si el mismo tablón se somete a momentos de extremo, figura 16-3(b), además de un modo de pandeo por flexión, las secciones tendrán también una tendencia a torcerse. Este es un modo de pandeo flexotorsionante y el mismo tipo de pandeo puede ocurrir para la fuerza excéntrica P, como se muestra en la figura 16-3(c). Finalmente, un modo de pandeo torsionante puro está ilustrado en la figura 16-3(d). Esto ocurre cuando la rigidez torsionante del miembro es pequeña. Como se recordará de la Sección 6-14, las *secciones abiertas* de pared delgada son por lo general pobres en rigidez torsionante. En contraste, los miembros *tubulares* de pared delgada son excelentes para resistir pares de torsión y son rígidos torsionalmente. Por tanto, un miembro tubular, como el mostrado en la figura 16-2, no exhibirá, en general, un pandeo torsionante. En la figura 16-4 se muestran algunas secciones abiertas de pared delgada que serán examinadas en su susceptibilidad al pandeo torsionante.

En la figura 16-4(a) se muestran dos secciones con simetría biaxial en las que sus centroides C y centros de cortante S coinciden. Los miembros a compresión con tales secciones transversales se pandean en flexión pura, figura 16-3(a), o bien torciéndose alrededor de S, figura 16-3(d). Para miembros de *pared delgada*, cuando la rigidez torsionante (Sección 6-14) es menor que su rigidez flexionante, una columna puede torcerse antes de exhibir un pandeo flexionante. Comúnmente, esto es más probable que ocurra

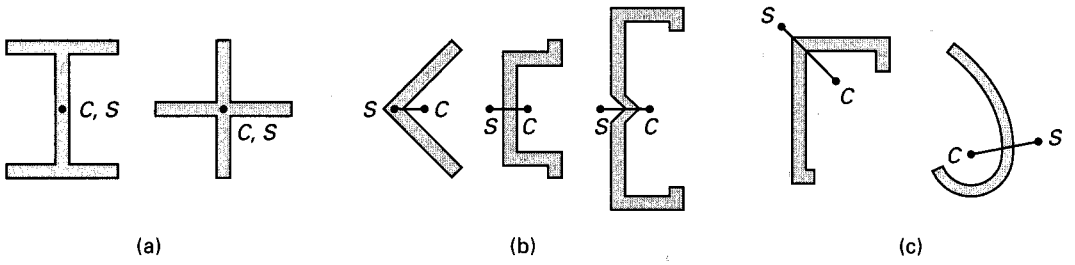


Fig. 16-4 Secciones de columnas que exhiben diferentes modos de pandeo.

en columnas con secciones transversales cruciformes que en secciones en forma de I. Sin embargo, el modo torsionante de pandeo no controla por lo general el diseño ya que las secciones metálicas laminadas o extruidas son relativamente gruesas.

Las secciones transversales mostradas en las figuras 16-4(b) y (c) tienen sus centroides C y centros de cortante S en diferentes posiciones. El pandeo flexionante ocurre para las secciones en la figura 16-4(b) si la mínima rigidez flexionante alrededor del eje principal mayor es menor que la rigidez torsionante. De otra manera se desarrollará un pandeo flexionante y torsionante simultáneamente con el miembro torciéndose alrededor de S. Para las secciones en la figura 16-4(c), el pandeo siempre ocurre según este último modo. En las deducciones subsecuentes se supondrá que los espesores de las paredes de los miembros son suficientemente grandes para excluir la posibilidad del pandeo torsionante o del flexotorsionante. No serán considerados los miembros a compresión con secciones transversales del tipo mostrado en la figura 16-4(c).

Los siguientes casos interesantes de posible pandeo de miembros rectos han sido también excluidos en este texto. Uno de ellos se muestra en la figura 16-5, donde dos barras con nodos articulados en sus extremos forman un ángulo muy pequeño con la horizontal. En este caso es posible que la fuerza P aplicada alcance una magnitud tal que las barras comprimidas deformadas tomen la posición horizontal. Entonces, con un ligero incremento de P, las barras *resortean* a una nueva posición de equilibrio. Este tipo de inestabilidad es de gran importancia en cascarones de pared delgada y poca altura así como en placas curvas. Otro posible problema de pandeo se muestra en la figura 16-6, donde una barra circular esbelta está sometida a un par de torsión T. Cuando el par de torsión T alcanza un valor crítico, la barra resortea asumiendo una curva helicoidal espacial.[4] Este problema es de importancia en el diseño de flechas de transmisión largas y esbeltas.

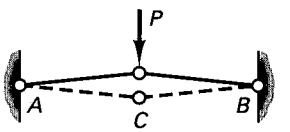


Fig. 16-5 Resorteo de barras a compresión.

Fig. 16-6 Pandeo torsionante espacial en espiral de una flecha esbelta.

[4]A. G. Greenhill, "On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust. Appendix: Theoretical investigation of the stability of shafting under given forces" ("Sobre la resistencia de flechas de transmisión sometidas a torsión y empuje axial. Apéndice: Investigación teórica de la estabilidad de flechas bajo fuerzas dadas"), *Proceedings,* Londres, Institution of Mechanical Engineers, 1883, pp. 190-209.

16-3. Criterios para la estabilidad del equilibrio

Para aclarar los criterios de estabilidad para el equilibrio estático,[5] consideremos una barra vertical rígida con un resorte torsionante de rigidez k en su base, como se muestra en la figura 16-7(a). El comportamiento de una barra sometida a una fuerza vertical P y una fuerza horizontal F es mostrado en la figura 16-7(b) para una F grande y una F pequeña. Surge la pregunta: ¿Cómo se comportará este sistema si $F = 0$?

Para responder esta pregunta analíticamente, el sistema debe ser *deliberadamente desplazado* una pequeña cantidad (infinitesimal) consistente con las condiciones de frontera. Entonces, si las fuerzas restitutivas son mayores que las fuerzas que tienden a perturbar el sistema, éste es estable, y si las fuerzas restitutivas son menores, entonces el sistema es inestable.

La barra rígida mostrada en la figura 16-7(a) sólo puede girar. Por tanto, tiene un grado de libertad. Para un supuesto ángulo pequeño de rotación θ, el *momento restaurador* es $k\theta$, y, con $F = 0$, el *momento perturbador* es PL sen $\theta \approx PL\theta$. Por tanto, si

$$k\theta > PL\theta \quad \text{el sistema es } \textit{estable} \tag{16-1}$$

y

$$k\theta < PL\theta \quad \text{el sistema es } \textit{inestable} \tag{16-2}$$

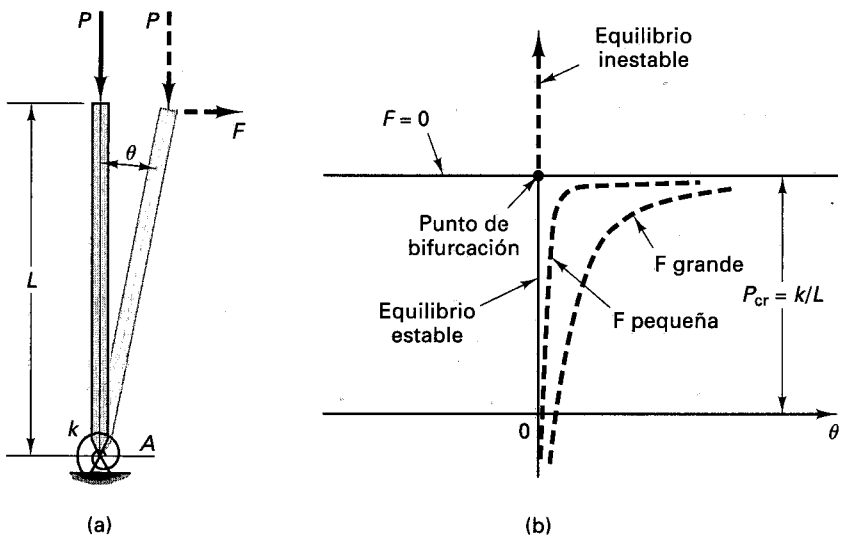


Fig. 16-7 Comportamiento por pandeo de una barra rígida.

[5]Algunos lectores encontrarán más conveniente estudiar primero las Secciones 16-9 y 16-10, donde se consideran las columnas sometidas a cargas axiales y transversales actuando simultáneamente. El pandeo de columnas es el caso límite (degenerado) en tales problemas.

Justamente en el punto de transición, $k\theta = PL\theta$ y el equilibrio no es ni estable ni inestable, sino *neutro*. La fuerza asociada con esta condición es la *carga crítica* o *carga de pandeo*, que será designada por P_{cr}. Para el sistema de barras considerado,

$$\boxed{P_{cr} = k/L} \qquad (16\text{-}3)$$

En presencia de una fuerza horizontal F, las curvas $P - \theta$ son como se muestran por las líneas de rayas en la figura 16-7(b) que se vuelven asintóticas a la línea horizontal en P_{cr}. Curvas similares resultarían colocando la fuerza vertical P excéntricamente con respecto al eje de la barra. En cualquier caso, aun para sistemas inestables, θ no puede llegar a ser infinitamente grande ya que siempre hay un punto de equilibrio en θ algo menor que π. La discrepancia aparente en la gráfica es causada al suponer en las ecuaciones 16-1 y 16-2 que θ es pequeño, que sen $\theta \approx \theta$ y que cos $\theta \approx 1$. La condición encontrada para equilibrio neutro cuando $F = 0$ puede explicarse más ampliamente con referencia a la figura 16-8.

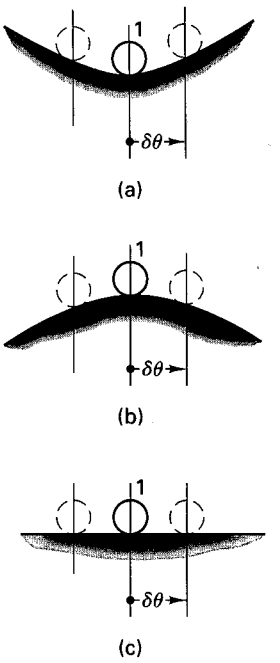


Fig. 16-8 Equilibrios (a) estable, (b) inestable y (c) neutro.

Es conveniente relacionar el proceso de determinar el tipo de estabilidad con una bola que descansa sobre superficies sin fricción de diferentes formas; véase la figura 16-8. En ésta, en los tres casos, las bolas en la posición 1 están en equilibrio. Para determinar el tipo de equilibrio, es necesario desplazar las bolas una distancia infinitesimal $\delta\theta$ hacia cualquier lado. En el primer caso, figura 16-8(a), la bola rueda de regreso a su posición inicial y el equilibrio es *estable*. En el segundo caso, figura 16-8(b), la bola una vez desplazada no regresará a su posición inicial y el equilibrio es *inestable*. En el último caso, figura 16-8(c), la bola puede permanecer en su posición desplazada, donde estará también en equilibrio. Tal equilibrio es *neutro*. Por tanto, por analogía, un sistema estructural está en un estado de equilibrio neutro cuando tiene por lo menos *dos posiciones vecinas de equilibrio* a una distancia infinitesimal entre ellas. Este criterio para el equilibrio neutro es aplicable sólo para desplazamientos *infinitesimales* ya que bajo desplazamientos grandes pueden prevalecer condiciones diferentes (figura 16-7).

Con base en el razonamiento previo, la línea horizontal para $F = 0$ mostrada en la figura 16-7(b) es puramente esquemática para definir P_{cr}. Teóricamente, sólo tiene significado dentro de una distancia infinitesimal desde el eje vertical.

Para demostrar esto de nuevo, consideremos la barra rígida vertical mostrada en la figura 16-7(a) y hagamos $F = 0$. Luego, para determinar el equilibrio *neutro*, *desplazamos* la barra en cualquier dirección a través de un ángulo $\delta\theta$ (*no* a través del ángulo θ mostrado en la figura) y formulamos la ecuación de equilibrio:

$$PL\,\delta\theta - k\,\delta\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad \boxed{(PL - k)\,\delta\theta = 0} \qquad (16\text{-}4)$$

Esta ecuación tiene *dos* raíces distintas: La primera, cuando $\delta\theta = 0$ y P es arbitraria, figura 16-7(b), y la segunda, cuando la expresión en paréntesis es cero. Esta segunda solución da $P_{cr} = k/L$. Para este valor de la fuerza axial, $\delta\theta$ es arbitraria. Por consiguiente, hay *dos* posiciones de equilibrio bajo P_{cr}. Una de ellas es para una barra recta y la otra para una barra inclinada según un

ángulo $\delta\theta$. Como bajo P_{cr} existen esas dos ramas de la solución, tal punto se llama *punto de bifurcación*.[6]

En la ilustración previa, la barra rígida tiene un solo grado de libertad ya que para un desplazamiento infinitesimalmente pequeño, el sistema queda completamente descrito por el ángulo $\delta\theta$. Un problema con dos grados de libertad es analizado en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16-1

Dos barras rígidas, cada una de longitud L, que forman un miembro vertical recto como se muestra en la figura 16-9(a), tienen resortes torsionantes de rigidez k en los nodos ideales articulados B y C. Determine la fuerza vertical crítica P_{cr} y la forma del miembro pandeado.

SOLUCIÓN

Para determinar la fuerza crítica de pandeo P_{cr}, al sistema debe dársele un desplazamiento compatible con las condiciones de frontera. Tal desplazamiento con sentido positivo se muestra como $A'B'C$ en la figura 16-9(a). La barra BC gira un ángulo $\delta\theta_1$ y la barra AB gira independientemente un ángulo $\delta\theta_2$. Por tanto, este sistema tiene *dos* grados de libertad. Los diagramas de cuerpo libre para los miembros AB y BC en posiciones deflexionadas están dibujados en las figuras 16-9(b) y (c). Luego, suponiendo que las rotaciones de los miembros son infinitesimales, se escriben las ecuaciones de equilibrio para cada miembro. Al escribir esas ecuaciones debe notarse que $M_1 = k(\delta\theta_2 - \delta\theta_1)$, donde los términos en paréntesis constituyen el ángulo de rotación infinitesimal *entre* las dos barras. Con base en esto,

$$\sum M_{B'} = 0: \qquad PL\,\delta\theta_2 - k(\delta\theta_2 - \delta\theta_1) = 0$$

y

$$\sum M_C = 0: \qquad PL\,\delta\theta_1 + k(\delta\theta_2 - \delta\theta_1) - k\,\delta\theta_1 = 0$$

Reordenando términos,

$$k\,\delta\theta_1 - (k - PL)\,\delta\theta_2 = 0$$

$$-(2k - PL)\,\delta\theta_1 + k\,\delta\theta_2 = 0$$

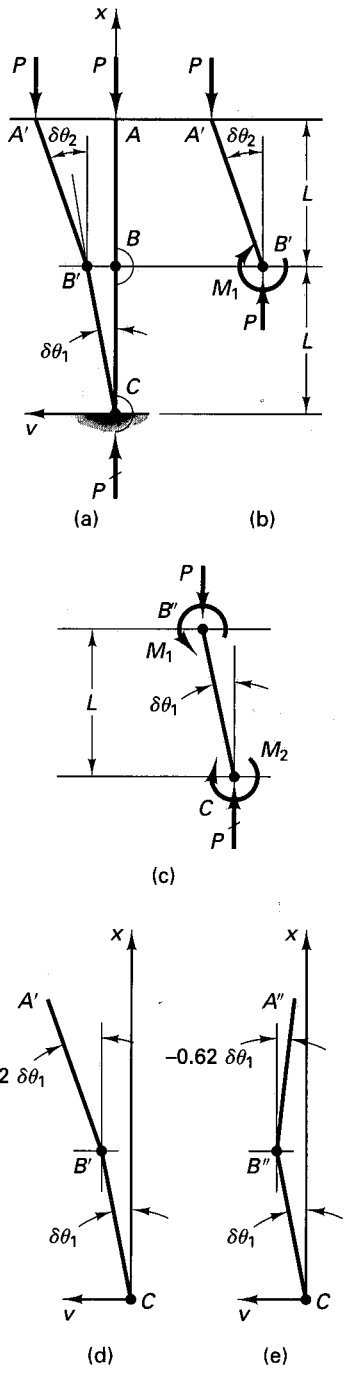


Fig. 16-9

[6]El criterio estático para el equilibrio neutro no es aplicable a sistemas no conservativos donde no se presenta la bifurcación y deben usarse entonces criterios dinámicos. Tales casos surgen, por ejemplo, cuando la fuerza aplicada P permanece tangente al eje de la barra deflexionada en el punto de aplicación. Este problema fue ampliamente estudiado por H. Ziegler. Véase su libro *Principles of Structural Stability* (*Principios de estabilidad estructural*), Waltham, MA, Blaisdell, 1968.

Esas dos ecuaciones lineales homogéneas tienen una solución trivial, $\delta\theta_1 = \delta\theta_2 = 0$, así como una solución no cero[7] si el determinante de los coeficientes es cero; es decir,

$$\begin{vmatrix} k & -(k - PL) \\ -(2k - PL) & k \end{vmatrix} = 0$$

Al desarrollar este determinante, se obtiene la *ecuación característica*

$$P^2 - 3\frac{k}{L}P + \frac{k^2}{L^2} = 0$$

Las raíces de tal ecuación se llaman *valores propios* o *eigenvalores*, *el menor* de los cuales es la carga crítica de pandeo. En este caso, hay dos raíces:

$$P_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\frac{k}{L} \quad \text{y} \quad P_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\frac{k}{L}$$

y $P_{cr} = P_1$.

Al sustituir las raíces en cualquiera de las ecuaciones simultáneas, se determinan las relaciones entre las rotaciones de las barras. Entonces, para P_1, $\delta\theta_2/\delta\theta_1 = 1.62$ y para P_2, $\delta\theta_2/\delta\theta_1 = -0.62$. Los correspondientes modos deflexionados se muestran en las figuras 16-9(d) y (e). El de la figura 16-9(d) corresponde a P_{cr}. Esas formas modales se llaman *vectores propios* o *eigenvectores* y suelen escribirse en forma matricial como

$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.62 \end{Bmatrix}\delta\theta_1 \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{Bmatrix}\delta\theta_1$$

donde $\delta\theta_1$ es una constante arbitraria.

Es claro que al incrementar el número de barras articuladas con resortes para representar una columna, se incrementa también el número de grados de libertad. En el límite, una columna elástica continua tiene un número infinito de grados de libertad. Sin embargo, a diferencia de los problemas de vibraciones, en el análisis del pandeo, sólo la menor raíz es importante. Las cargas de pandeo para columnas elásticas con condiciones de frontera diferentes serán deducidas en las siguientes secciones.

Antes de proceder con la deducción de las cargas críticas para columnas con base en el concepto de equilibrio neutro, es importante examinar

[7]Heurísticamente, esto puede demostrarse de la siguiente manera. Consideremos las dos ecuaciones lineales homogéneas siguientes:

$$Ax + By = 0 \quad \text{y} \quad Cx + Dy = 0$$

La primera de esas ecuaciones requiere que $y/x = -A/B$, mientras que la segunda requiere que $y/x = -C/D$. Para que las dos ecuaciones sean consistentes, $A/B = C/D$, o $AD - CB = 0$, que es el valor del determinante desarrollado de los coeficientes de las ecuaciones simultáneas. Hay también una solución trivial para $x = y = 0$.

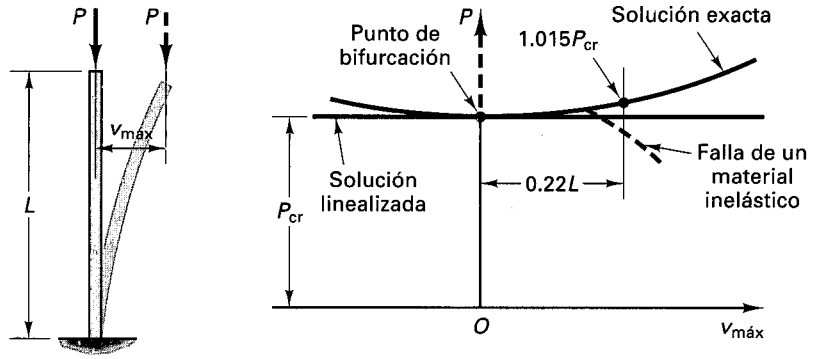


Fig. 16-10 Comportamiento de una columna ideal elástica.

el significado de tales análisis. Las cargas críticas no describen el proceso posterior al pandeo. Sin embargo, usando las ecuaciones diferenciales exactas (no lineales) para la curvatura, puede mostrarse[8] que para columnas *elásticas* pueden encontrarse posiciones de equilibrio *superiores* a P_{cr}. Los resultados de tal análisis están ilustrados en la figura 16-10. Note especialmente que al incrementar P_{cr} en sólo 1.5% se genera una deflexión lateral máxima de 22% de la longitud de la columna.[9] Por razones prácticas, tales enormes deflexiones rara vez pueden ser toleradas. Además, el material usualmente no puede resistir los esfuerzos de flexión inducidos. Por tanto, la falla de columnas reales sería inelástica. En general, se tiene poca resistencia posterior al pandeo adicional en columnas reales y el uso de P_{cr} para la capacidad de columnas es aceptable. Esto contrasta con el comportamiento de placas y cascarones, donde se puede desarrollar una considerable resistencia posterior al pandeo.

Otra ilustración del significado de P_{cr} en relación con el comportamiento de columnas elásticas[10] y elastoplásticas[11] basado en análisis no lineales se muestra en la figura 16-11. En esas gráficas se consideran columnas que están inicialmente arqueadas en forma senoidal con una deflexión central máxima de Δ_o. Las trayectorias de equilibrio para esos casos varían, dependiendo del tamaño de la curvatura inicial. Sin embargo, independientemente de la magnitud de Δ_o, la carga crítica P_{cr} sirve como asíntota para columnas con curvatura pequeña, que se encuentran comúnmente en pro-

[8]J. L. Lagrange, "On the shapes of columns" ("Sobre las formas de las columnas"), *Oeuvres de Lagrange*, vol. 1, París, 1867.

[9]El hecho que una columna elástica continúa soportando carga más allá de la etapa de pandeo puede demostrarse aplicando una fuerza en exceso de la de pandeo a una barra o placa flexibles, como una sierra de carpintero.

[10]El análisis de la deflexión elástica de columnas, llamada *Elastica de Lagrange*, puede encontrarse en S. P. Timoshenko y J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (*Teoría de la estabilidad elástica*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1961.

[11]T. von Karman, "Untersuchungen Ueber Knickfestigkeit" ("Investigaciones sobre la resistencia al pandeo"), *Collected Works of Theodore von Karman*, vol. I, 1902-1913, Londres, Butterworth Scientific Publications, 1956, pp. 90-140. Véase también el pie de página anterior.

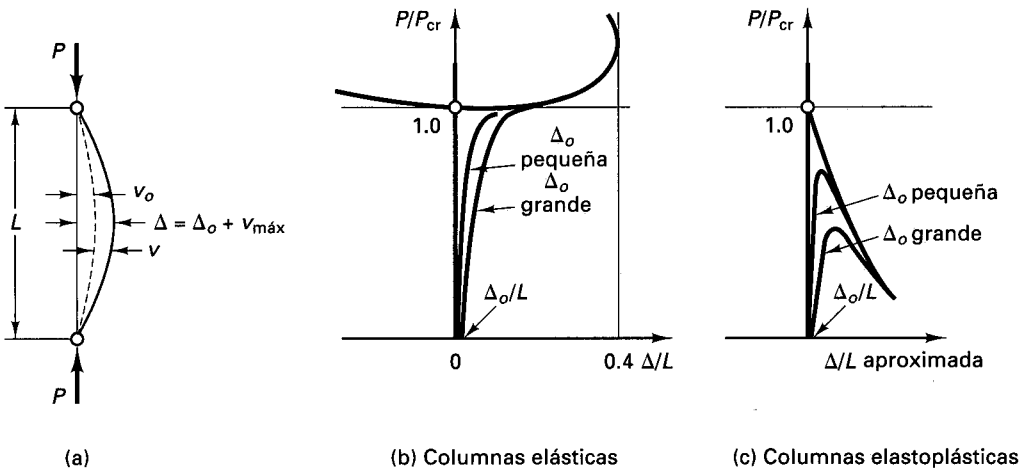


Fig. 16-11 Comportamiento de columnas rectas e inicialmente curvas donde $(v_o)_{máx} = \Delta_o$.

blemas de ingeniería; véase la figura 16-11(b). Debe notarse que una columna larga *perfectamente elástica* inicialmente recta con extremos articulados, al pandearse en aproximadamente un "círculo" completo, alcanza la intolerable deflexión de 0.4 de la longitud de la columna. El comportamiento de las columnas elastoplásticas es enteramente diferente; véase la figura 16-11(c). Sólo una columna perfectamente recta puede alcanzar P_{cr} y después descender súbitamente en su capacidad de carga. Las imperfecciones en las columnas, como la falta de rectitud, reducen drásticamente la capacidad de carga. Sin embargo, en todo caso, P_{cr} proporciona el parámetro esencial para determinar la capacidad de una columna. Con salvaguardas apropiadas, pueden formularse procedimientos de diseño que usen este parámetro clave.

Parte A TEORÍA DEL PANDEO DE COLUMNAS

16-4. Carga de Euler para columnas con extremos articulados

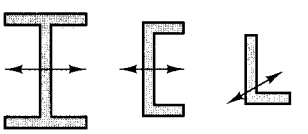


Fig. 16-12 El pandeo flexionante de columnas ocurre en el plano del eje mayor.

Bajo la carga crítica, una columna circular o tubular en su sección transversal, puede pandearse lateralmente en cualquier dirección. En el caso más general, un miembro a compresión no posee la misma rigidez flexionante en todas direcciones. El momento de inercia es un máximo respecto a un eje centroidal del área de la sección transversal y un mínimo respecto al otro; véase la figura 16-12. La importante rigidez por flexión *EI* de una columna depende de la *I mínima* y bajo la carga crítica, una columna se pan-

dea hacia un lado o el otro en el plano del eje mayor. El uso de la I mínima en la deducción que sigue es sobreentendido.

Considere la columna ideal perfectamente recta con soportes articulados en ambos extremos; véase la figura 16-13(a). La *menor* fuerza con la que es posible un modo de pandeo es la *carga crítica* o *carga de pandeo de Euler*.

Para determinar la carga crítica para esta columna, la columna comprimida *se desplaza* como se muestra en la figura 16-13(b). En esta posición, el momento de flexión, de acuerdo con la convención de signos en vigas[12] es $-Pv$. Sustituyendo este valor del momento en la ecuación 14-10, la ecuación diferencial para la curva elástica para la columna inicialmente recta toma la forma

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}v \tag{16-5}$$

Haciendo $\lambda^2 = P/EI$ y transponiendo términos se obtiene

$$\boxed{\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = 0} \tag{16-6}$$

Esta es una ecuación de la misma forma que la del movimiento armónico simple, y su solución es

$$v = A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x \tag{16-7}$$

donde A y B son constantes arbitrarias que deben ser determinadas a partir de las condiciones de frontera. Esas condiciones son

$$v(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad v(L) = 0$$

Por consiguiente,

$$v(0) = 0 = A \operatorname{sen} 0 + B \cos 0 \qquad \text{o} \qquad B = 0$$

y

$$v(L) = 0 = A \operatorname{sen} \lambda L \tag{16-8}$$

Esta ecuación puede ser satisfecha haciendo $A = 0$. Sin embargo, con A y B iguales cada una a cero, la ecuación 16-7 es una solución de columna recta y se llama usualmente solución trivial. Una solución alternativa se obtiene requiriendo que el término con el seno en la ecuación 16-8 desaparezca. Esto ocurre cuando λn es igual a $n\pi$, donde n es un entero. Por tanto, como λ se definió como $\sqrt{P/EI}$, la enésima fuerza crítica P_n que hace posible la forma deflexionada de la columna se obtiene haciendo $\sqrt{P/EI}\,L = n\pi$. Por consiguiente,

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \tag{16-9}$$

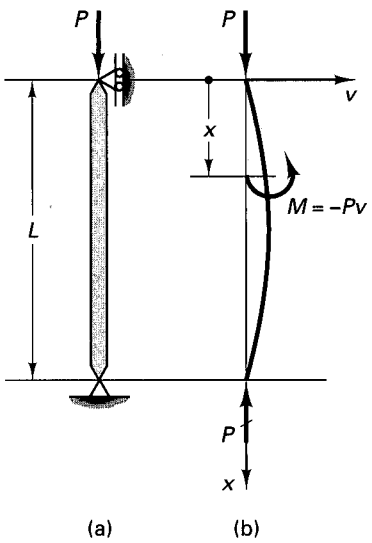


Fig. 16-13 Columna articulada en ambos extremos.

[12]Para el sentido positivo de la deflexión v mostrada, el momento flexionante es negativo. Si la columna se deflexionara en sentido opuesto, el momento sería positivo. Sin embargo, v sería negativa. Por tanto, para hacer Pv positiva, debe tratarse igualmente como una cantidad negativa.

Esas P_n son los *valores propios* para este problema. Sin embargo, como en los problemas de inestabilidad sólo el *menor valor* de P_n es importante, n debe tomarse como la unidad y la *carga crítica* o *carga de Euler*[13] P_{cr} para una columna *elástica perfectamente recta* inicialmente, con extremos articulados es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{16-10}$$

donde E es el módulo elástico del material, I es el *mínimo* momento de inercia de la sección transversal de una columna y L es su longitud. Este caso de una columna articulada en ambos extremos suele denominarse *caso fundamental.*

De acuerdo con la ecuación 16-7, bajo la carga crítica, como $B = 0$, la ecuación de la curva elástica pandeada es

$$v = A \operatorname{sen} \lambda x \tag{16-11}$$

Esta es la función característica o *función propia* de este problema y, como $\lambda = n\pi/L$, n puede tomar cualquier valor entero. Hay un número infinito de tales funciones. En esta solución linealizada, la amplitud A del modo de pandeo permanece indeterminada. Para el caso fundamental $n = 1$, la curva elástica es una curva de media onda senoidal. Esta forma y los modos correspondientes a $n = 2$ y 3 se muestran en la figura 16-14. Los modos superiores no tienen importancia física en los problemas de pandeo, ya que la carga crítica mínima de pandeo ocurre para $n = 1$.

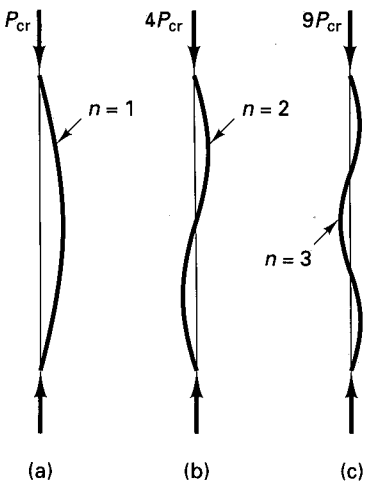


Fig. 16-14 Tres primeros modos de pandeo para una columna articulada en ambos extremos.

16-5. Carga de Euler para columnas con restricciones de extremo diferentes

El mismo procedimiento que el analizado antes puede usarse para determinar las cargas axiales críticas para columnas con diferentes condiciones de frontera. Las soluciones de esos problemas son muy sensitivas a las restricciones de extremo. Considere, por ejemplo, una columna con un extremo empotrado y el otro articulado, como se muestra en la figura 16-15, donde la columna pandeada está dibujada en una posición *deflexionada.* Aquí, el efecto del momento desconocido de extremo M_o y las reacciones deben ser considerados al formular la ecuación diferencial para la curva elástica bajo la carga crítica:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-Pv + M_o(1 - x/L)}{EI} \tag{16-12}$$

Haciendo $\lambda^2 = P/EI$ como antes, y transponiendo, se obtiene

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = \frac{\lambda^2 M_o}{P}\left(1 - \frac{x}{L}\right) \tag{16-13}$$

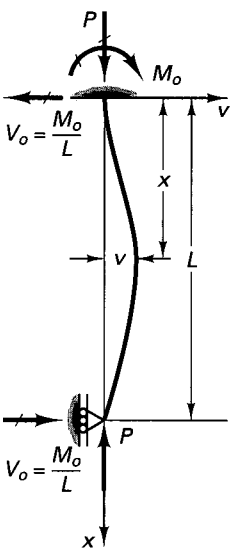


Fig. 16-15 Columna empotrada en un extremo y articulada en el otro.

[13]Esta fórmula fue obtenida por el gran matemático Leonhard Euler en 1757.

La *solución homogénea* de esta ecuación diferencial (es decir, cuando el lado derecho es cero) es la misma que la dada por la ecuación 16-7. La *solución particular*, debida al lado derecho no cero, se encuentra al dividir el término en ese lado entre λ^2. La solución completa toma entonces la forma

$$v = A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x + (M_o/P)(1 - x/L) \qquad (16\text{-}14)$$

donde A y B son constantes arbitrarias y M_o es el momento desconocido en el empotramiento. Las tres condiciones de frontera cinemáticas son

$$v(0) = 0 \qquad v(L) = 0 \qquad \text{y} \quad v'(0) = 0$$

Por consiguiente,

$$v(0) = 0 = B + M_o/P$$
$$v(L) = 0 = A \operatorname{sen} \lambda L + B \cos \lambda L$$

y

$$v'(0) = 0 = A\lambda - M_o/PL$$

Resolviendo esas ecuaciones simultáneamente, se obtiene la siguiente ecuación trascendental:

$$\lambda L = \tan \lambda L \qquad (16\text{-}15)$$

que debe ser satisfecha por una forma de equilibrio no trivial de la columna bajo la carga crítica. La raíz más pequeña de la ecuación 16-15 es

$$\lambda L = 4.493$$

de donde el correspondiente valor propio mínimo o carga crítica para una *columna empotrada en un extremo y articulada en el otro* es

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} = \frac{2.05\pi^2 EI}{L^2} \qquad (16\text{-}16)$$

Puede demostrarse que en el caso de una columna *empotrada en ambos extremos*, figura 16-16(d), la carga crítica es

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \qquad (16\text{-}17a)$$

Las dos últimas ecuaciones muestran que restringiendo los extremos, las cargas críticas son considerablemente mayores que las del caso fundamental, ecuación 16-10. Por otra parte, la carga crítica para una columna "*en voladizo*", [14]figura 16-16(b), con una carga en su parte superior es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (16\text{-}17b)$$

[14]Un ejemplo de esto es un poste de teléfono sin arriostramiento y con un pesado transformador en su parte superior.

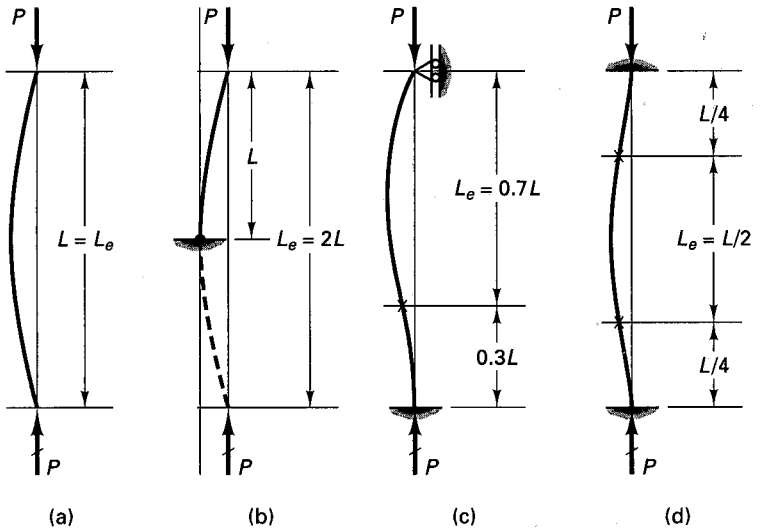


Fig. 16-16 Longitudes efectivas de columnas con diferentes restricciones.

En este caso extremo, la carga crítica es sólo la cuarta parte de la del caso fundamental.

Todas las fórmulas previas pueden hacerse parecer a la del caso fundamental si se usa la *longitud efectiva de columna* en vez de la longitud real. Esta longitud es la distancia entre los puntos de inflexión sobre las curvas elásticas. La longitud efectiva de columna L_e para el caso fundamental es L, pero para los casos analizados es de $0.7L$, $0.5L$ y $2L$, respectivamente. Para el caso general, $L_e = KL$, donde K es el factor de longitud efectiva, que depende de las restricciones en los extremos. Por tanto, una forma más general de la fórmula de Euler, incorporando el concepto de *longitud efectiva de columna* L_e puede escribirse como

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{16-18}$$

En contraste con los casos clásicos mostrados en la figura 16-16, los miembros reales en compresión están rara vez verdaderamente articulados o completamente empotrados en sus extremos. Debido a la incertidumbre respecto al empotramiento de los extremos, las columnas suelen suponerse articuladas en ellos. Con la excepción del caso mostrado en la figura 16-16(b), donde esta simplificación no puede usarse, este procedimiento es conservador.

Resumen del procedimiento Las cargas de pandeo de columnas en esta y la sección precedente se encuentran usando la misma relación curvatura-momento que se obtuvo para la deflexión de vigas, ecuaciones 14-10. Sin embargo, los momentos flexionantes son escritos para columnas carga-

das axialmente en posiciones ligeramente *deflexionadas*. Matemáticamente esto conduce a un tipo enteramente diferente de ecuación diferencial de segundo orden respecto a la usada para la flexión en vigas. La solución de esta ecuación muestra que para la *misma carga*, son posibles dos configuraciones vecinas de equilibrio para una columna. Una de esas configuraciones corresponde a una columna recta y la otra a una columna ligeramente deflexionada. La fuerza axial asociada simultáneamente con las formas recta y deflexionada de la columna es la carga crítica de pandeo. Esto ocurre en el punto de *bifurcación* de la solución.

En la formulación desarrollada, las columnas se suponen linealmente *elásticas* y que tienen la misma sección transversal en toda su longitud. Sólo se consideran las deflexiones por flexión de la columna.

Para las ecuaciones diferenciales de segundo orden consideradas en este tratamiento son aplicables las mismas condiciones *cinemáticas* de frontera que para las vigas en flexión, figura 14-5.

Las fórmulas para la carga elástica de pandeo son realmente sorprendentes. Aunque *no dependen de la resistencia de un material*, determinan la capacidad de carga de las columnas. La única propiedad del material implicada es el módulo elástico E que físicamente representa la característica de rigidez de un material.

Las ecuaciones previas *no son aplicables* si el esfuerzo axial de la columna excede el límite proporcional del material. Este problema se analiza en la siguiente sección.

16-6. Limitaciones de las fórmulas de Euler

El módulo elástico E se usó en la obtención de las fórmulas de Euler para columnas; por tanto, todos los razonamientos presentados antes son aplicables *siempre que el comportamiento del material permanezca linealmente elástico*. Para recalcar esta importante limitación, la ecuación 16-10 se reescribe en una forma diferente. Por definición, $I = Ar^2$, donde A es el área de la sección transversal y r es su *radio de giro*. Sustituyendo esta relación en la ecuación 16-10, se obtiene

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 EAr^2}{L_e^2}$$

o

$$\boxed{\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2}} \qquad (16\text{-}19a)$$

donde el *esfuerzo crítico* σ_{cr} para una columna se define como P_{cr}/A (es decir, como un esfuerzo *promedio* sobre el área transversal A de una columna bajo la carga crítica P_{cr}). La longitud de la columna es L_e y r es el radio de giro *mínimo* del área de la sección transversal, ya que la fórmula original de Euler está en términos del I mínimo. Usando la longitud efectiva L_e, la expresión resulta general. La relación L_e/r de la longitud de la

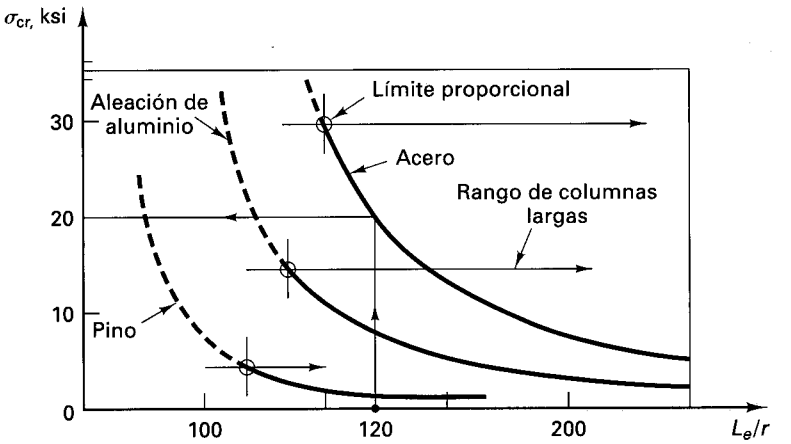


Fig. 16-17 Variación del esfuerzo crítico de columnas con la relación de esbeltez para tres materiales distintos.

columna al radio de giro *mínimo* se llama *relación de esbeltez* de la columna. *Ningún factor de seguridad está incluido en la última ecuación.*

Una interpretación gráfica de la ecuación 16-19a se muestra en la figura 16-17, donde el esfuerzo crítico de la columna está graficado *versus* la relación de esbeltez para tres diferentes materiales. Para cada material, E es constante, y la curva resultante es una hipérbola. Sin embargo, como la ecuación 16-19a se basa en el comportamiento elástico de un material, el σ_{cr} determinado por esta ecuación no puede exceder el límite proporcional de un material. Por tanto, las hipérbolas mostradas en la figura 16-17 están dibujadas con líneas de rayas más allá del límite proporcional del material individual y esas porciones de las curvas *no deben ser usadas*. Las modificaciones necesarias de la ecuación 16-19a para incluir la respuesta de un material inelástico serán analizadas en la siguiente sección.

Las porciones útiles de las hipérbolas no representan el comportamiento de una columna, sino el comportamiento de un número infinito de columnas ideales. Por ejemplo, una columna particular de acero, digamos, con una $L_e/r = 120$ puede cuando más, soportar una carga de $\sigma_1 A$, donde $\sigma_1 = \sigma_{cr} = 20$ ksi. Nótese que σ_{cr} *siempre decrece con relaciones* L/r *crecientes*. Además, note que una definición precisa de una columna larga es ahora posible con la ayuda de esos diagramas. Así entonces, se dice que una columna es larga si le es aplicable la fórmula elástica de Euler. El principio del rango de columnas largas se muestra para tres materiales en la figura 16-17.

Ejemplo 16-2

Encuentre la longitud L más corta para una columna de acero con extremos articulados y área transversal de 60 × 100 mm, para la cual es aplicable la fórmula de Euler. Sea $E = 200$ GPa y considere que el límite proporcional es de 250 MPa.

SOLUCIÓN

El momento de inercia mínimo del área de la sección transversal es $I_{mín} = 100 \times 60^3/12 = 1.8 \times 10^6$ mm^4. Por consiguiente, el *radio de giro mínimo r* está dado por

$$r = r_{mín} = \sqrt{\frac{I_{mín}}{A}} \tag{16-19b}$$

y

$$r_{mín} = \sqrt{\frac{1.8 \times 10^6}{60 \times 100}} = \sqrt{3} \times 10 \text{ mm}$$

Luego, usando la ecuación 16-19a y notando que para una columna con extremos articulados $L_e = L, \sigma_{cr} = \pi^2 E/(L/r)^2$. Despejando la relación de esbeltez L/r en el límite proporcional,

$$\left(\frac{L}{r}\right)^2 = \frac{\pi^2 E}{\sigma_{cr}} = \frac{\pi^2 \times 200 \times 10^3}{250} = 800\pi^2$$

o

$$\frac{L}{r} = 88.9 \qquad \text{y} \qquad L = 88.9\sqrt{3} \times 10 = 1540 \text{ mm}$$

Por tanto, si esta columna tiene 1.54 m o más de longitud, se pandeará elásticamente, porque para tales dimensiones de la columna, el esfuerzo crítico durante el pandeo no excederá el límite proporcional del material.

16-7. Fórmulas generalizadas para la carga de pandeo de Euler

Un diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión típico para una probeta impedida de pandearse se muestra en la figura 16-18(a). En el rango de esfuerzos de O a A, el material se comporta elásticamente. Si el esfuerzo en una columna en el pandeo no excede este rango, la columna se pandea elásticamente. La hipérbola expresada por la ecuación 16-19a con un E elástico, es aplicable en tal caso. Esta porción de la curva se muestra como ST en la figura 16-18(b). Es importante recordar que esta curva no representa el comportamiento de una columna, sino más bien el comportamiento de un número infinito de columnas ideales de longitudes diferentes. La hipérbola más allá del rango útil se muestra en la figura con línea de rayas.

Una columna con una relación L_e/r correspondiente al punto S en la figura 16-18(b), es la columna más corta de un material dado que se pandeará elásticamente. Una columna más corta, con una relación L_e/r aun más pequeña, no se pandeará en el límite elástico del material. En el diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión, figura 16-18(a), esto signi-

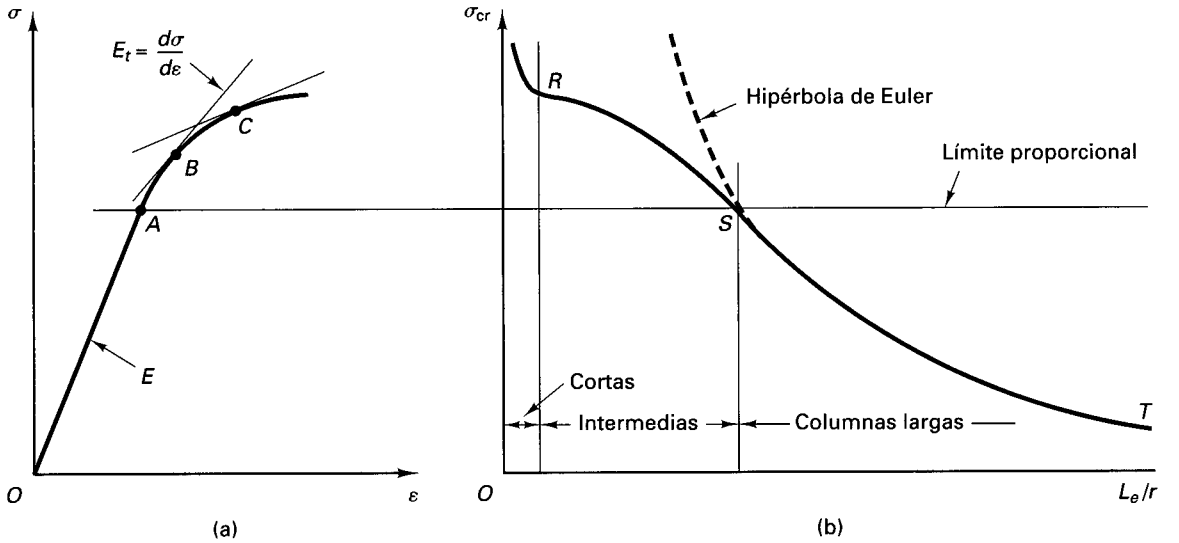


Fig. 16-18 (a) Diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión y (b) esfuerzo crítico en columnas *versus* relación de esbeltez.

fica que el nivel de esfuerzo en la columna ha pasado el punto A y alcanzado tal vez algún punto B. A este nivel mayor de esfuerzo, puede decirse que ha sido creada una columna de material diferente, ya que la rigidez del material no es representada por el módulo elástico. En este punto. la rigidez del material es dada instantáneamente por la tangente a la curva esfuerzo-deformación unitaria [es decir, por el *módulo tangente* E_t; véase la figura 16-18(a)]. La columna permanece estable si su nueva rigidez flexionante E_tI en B es suficientemente grande y puede soportar una carga mayor. Cuando la carga se incrementa, el nivel de esfuerzo se eleva, mientras que el módulo tangente disminuye. Una columna de cada vez "material menos rígido" está actuando bajo una carga creciente. La sustitución del módulo elástico E por el módulo tangente E_t es entonces la única modificación necesaria para hacer aplicables las fórmulas de pandeo elástico en el rango inelástico. Por consiguiente, la *fórmula generalizada para la carga de pandeo de Euler* o *fórmula del módulo tangente*, toma la forma

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{(L_e/r)^2} \tag{16-20}$$

Como los esfuerzos correspondientes a los módulos tangente pueden obtenerse del diagrama esfuerzo-deformación unitaria en compresión, la relación L_e/r a la que una columna se pandeará con esos valores puede obtenerse de la ecuación 16-20. Una gráfica que representa este comportamiento para relaciones bajas e intermedias de L_e/r se muestra en la figura 16-18(b) por la curva de R a S. Ensayos en columnas individuales verifican esta curva con extraordinaria exactitud.

La fórmula del módulo tangente da la capacidad de carga de una columna en el *instante que tiende a pandearse*. Cuando una columna se deforma más aún, la rigidez de las fibras sobre el lado cóncavo continúa exhibiendo aproximadamente el módulo tangente E_t. Sin embargo, las fibras en el lado

convexo al ser liberadas de algún esfuerzo, se descargan según el módulo elástico E original, como se muestra en la figura 16-19 en el punto C. Como los dos módulos, E_t y E, se usan para desarrollar esta teoría,[15] ésta se llama *teoría del doble módulo* o *teoría del módulo reducido* para el pandeo de columnas. Para la misma relación de esbeltez de columna, esta teoría siempre da una capacidad de pandeo ligeramente mayor que la teoría del módulo tangente. La discrepancia entre las dos teorías no es muy grande. La razón de esta discrepancia la explicó Shanley.[16] Según él, el pandeo procede *simultáneamente* con la carga axial creciente. La carga aplicada dada por la teoría del módulo tangente crece asintóticamente a la dada por la teoría del módulo doble; véase la figura 16-20. Sin embargo, antes de alcanzarse la carga dada por la teoría del módulo doble, se puede anticipar una fluencia o falla del material, haciendo al módulo tangente una opción atractiva. Es conveniente que en la teoría del módulo tangente las propiedades mecánicas de toda la sección transversal son las mismas, mientras que varían diferentemente para diferentes secciones transversales en la teoría del módulo doble.

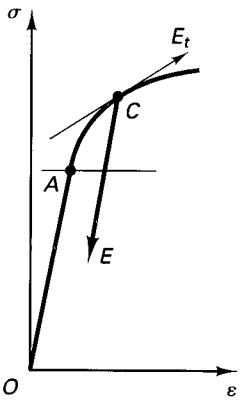


Fig. 16-19 Comportamiento esfuerzo-deformación unitaria en columna pandeada.

La carga máxima entre la del módulo-tangente y la del módulo-doble para cualquier material elastoplástico no dependiente del tiempo ni de la sección transversal fue determinada exactamente por Lin.[17] Duberg y Wilder[18] han concluido además que para materiales cuyas curvas esfuerzo-deformación unitaria cambian gradualmente en el rango inelástico, la carga máxima en la columna puede estar apreciablemente arriba de la carga del módulo tangente. Sin embargo, si el material en el rango inelástico tiende a exhibir rápidamente comportamiento plástico, la carga máxima estará sólo ligeramente arriba de la carga del módulo-tangente.

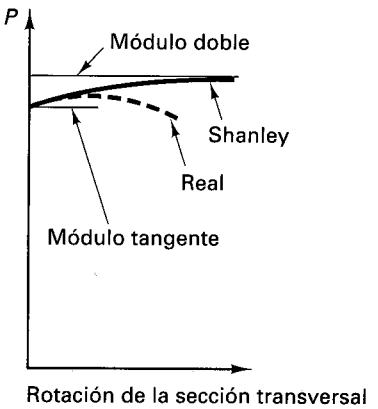


Fig. 16-20 Cargas de pandeo inelástico según diferentes teorías.

Como se mencionó antes, a las columnas que se pandean elásticamente se les llama en general *columnas largas*. A las columnas con relaciones L_e/r que no exhiben fenómenos de pandeo se les llama *columnas cortas*. Las columnas restantes son de *longitud intermedia*. Para relaciones L_e/r pequeñas, los materiales dúctiles "se aplastan" y pueden soportar cargas muy grandes.

Como la longitud L_e en la ecuación 16-20 es tratada como la longitud efectiva de una columna, diferentes condiciones de extremo pueden ser analizadas. Siguiendo este procedimiento con fines de comparación, se muestran en la figura 16-21 gráficas del esfuerzo crítico σ_{cr} *versus* la relación de esbeltez L_e/r para columnas empotradas y para columnas articuladas en sus extremos. Es importante notar que la capacidad de carga para esos dos casos, según las ecuaciones 16-10 y 16-17, está en razón de 4 a 1 sólo para columnas que tengan la relación de esbeltez $(L_e/r)_1$ o mayor. Para relaciones L_e/r menores, un beneficio progresivamente menor se obtiene al restringir los extremos. Para relaciones L_e/r pequeñas, las curvas se juntan. Hace poca diferencia si un "bloque corto" está articulado o empotrado en sus extremos, ya que la resistencia más que el pandeo es la que determina el comportamiento.

[15] F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures* (*Resistencia al pandeo de estructuras metálicas*), Nueva York, McGraw-Hill, 1952.

[16] F. R. Shanley, "Inelastic column theory" ("Teoría de columnas inelásticas"), *J. Aeron. Sci.*, **14**, núm. 5, mayo, 1947, pp. 261-267.

[17] T. H. Lin, "Inelastic column buckling" ("Pandeo inelástico de columnas"), *J. Aeron. Sci.*, **17**, núm. 3, 1950, pp. 159-172.

[18] J. E. Duberg y T. W. Wilder, "Column behavior in the plastic stress range" ("Comportamiento de columnas en el rango de esfuerzos plásticos"), *J. Aeron. Sci.*, **17**, núm. 6, 1950, pp. 323-327.

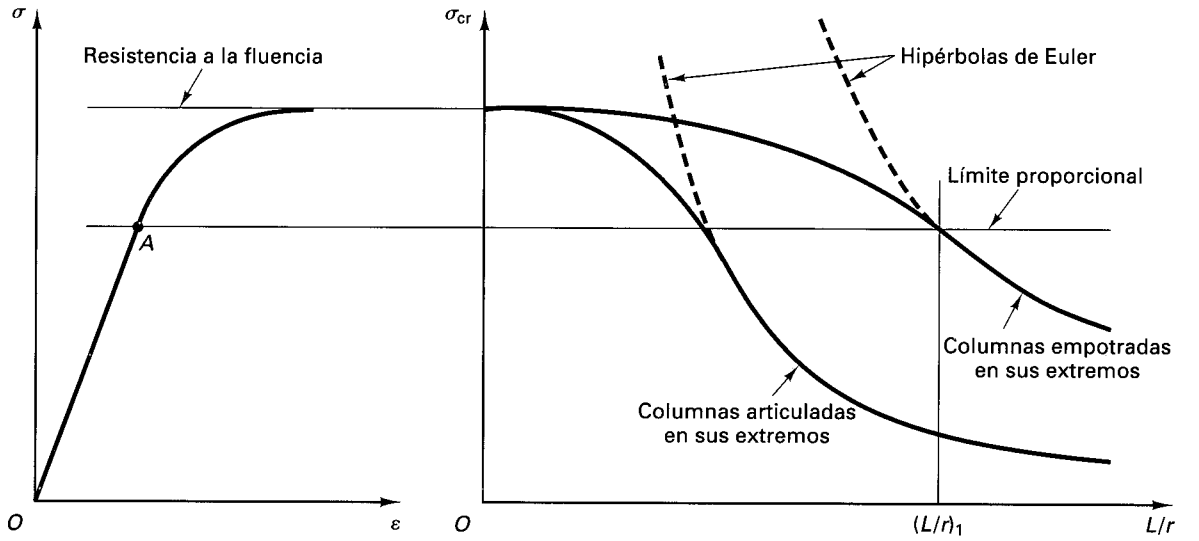


Fig. 16-21 Comparación del comportamiento de columnas con diferentes condiciones en los extremos.

16-8. Cargas excéntricas y la fórmula de la secante

Un método diferente al visto antes puede usarse para determinar la capacidad de una columna. Como ninguna columna es perfectamente recta ni las fuerzas aplicadas son perfectamente axiales, el comportamiento de las columnas reales puede ser estudiado con algunas imperfecciones o posibles desalineamientos de las cargas aplicadas determinados estadísticamente. Entonces, para el diseño de una columna real que se designe "recta", puede asignársele un probable desalineamiento o una excentricidad de la carga. Además, hay muchas columnas donde se aplica deliberadamente una carga excéntrica. Así entonces, una columna cargada excéntricamente puede estudiarse y su capacidad ser determinada con base en un esfuerzo elástico permisible. *Esto no determina la capacidad última de una columna.*

Para analizar el comportamiento de una columna cargada excéntricamente, considere la columna mostrada en la figura 16-22. Si el origen de los ejes coordenados se toma en la posición de la fuerza superior P, el momento flexionante en cualquier sección es $-Pv$ y la ecuación diferencial para la curva elástica es la misma que para una columna cargada axialmente; es decir,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}v \qquad (16\text{-}5)$$

donde, haciendo nuevamente $\lambda = \sqrt{P/EI}$, la solución general es, como antes:

$$v = A \operatorname{sen} \lambda x + B \cos \lambda x \qquad (16\text{-}7)$$

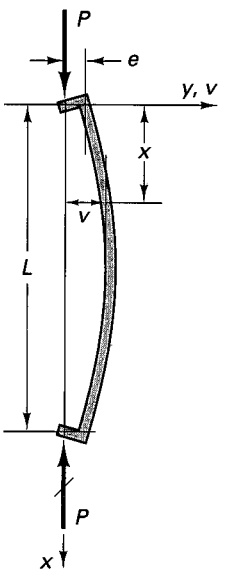


Fig. 16-22 Columna cargada excéntricamente.

Sin embargo, el resto del problema no es el mismo, ya que *las condiciones de frontera son ahora diferentes*. En el extremo superior, v es igual a la excentricidad de la carga aplicada; es decir, $v(0) = e$. Por consiguiente, $B = e$, y

$$v = A \operatorname{sen} \lambda x + e \cos \lambda x \tag{16-21}$$

Luego, debido a la simetría, la curva elástica tiene una tangente vertical a la mitad de la altura de la columna; es decir

$$v'(L/2) = 0$$

Por tanto, haciendo la derivada de la ecuación 16-21 igual a cero en $x = L/2$, se encuentra que

$$A = e \frac{\operatorname{sen} \lambda L/2}{\cos \lambda L/2}$$

Por consiguiente, la ecuación para la curva elástica es

$$v = e\left(\frac{\operatorname{sen} \lambda L/2}{\cos \lambda L/2} \operatorname{sen} \lambda x + \cos \lambda x\right) \tag{16-22}$$

No se tiene ninguna indeterminación por constantes en esta ecuación y la deflexión máxima $v_{\text{máx}}$ puede encontrarse con ella. Esta deflexión máxima ocurre en $L/2$, ya que en este punto, la derivada de la ecuación 16-22 es igual a cero. Por tanto,

$$v(L/2) = v_{\text{máx}} = e\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \lambda L/2}{\cos\ \lambda L/2} + \cos \frac{\lambda L}{2}\right) = e \sec \frac{\lambda L}{2} \tag{16-23}$$

Para la columna mostrada en la figura 16-20, el momento flexionante máximo M se desarrolla en el punto de deflexión máxima y numéricamente es igual a $Pv_{\text{máx}}$. Por consiguiente, como la fuerza directa y el momento flexionante máximo no se conocen, el esfuerzo de compresión *máximo* que ocurre en la columna (compare esto con el *esfuerzo promedio* P/A que actúa sobre la columna) puede calcularse con la fórmula usual como

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{Pv_{\text{máx}}\, c}{Ar^2} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{\lambda L}{2}\right)$$

Pero $\lambda = \sqrt{P/EI} = \sqrt{P/EAr^2}$; por tanto,

$$\boxed{\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec \frac{L}{r}\sqrt{\frac{P}{4EA}}\right)} \tag{16-24}$$

Esta ecuación, debido al término con la secante, se conoce como la *fórmula de la secante para columnas* y se aplica a columnas de cualquier longitud, siempre que el esfuerzo máximo no exceda el límite elástico. Una condición de iguales excentricidades de las fuerzas aplicadas en la misma dirección, causa la deflexión máxima.

Note que en la ecuación 16-24, el radio de giro r *puede no ser mínimo* ya que se obtiene del valor de I asociado con el eje respecto al cual ocurre la flexión. En algunos casos puede existir una condición más crítica de pandeo en la dirección de una excentricidad no definida. Note también que en la ecuación 16-24, *la relación entre* $\sigma_{\text{máx}}$ *y* P *no es lineal*; $\sigma_{\text{máx}}$ *crece*

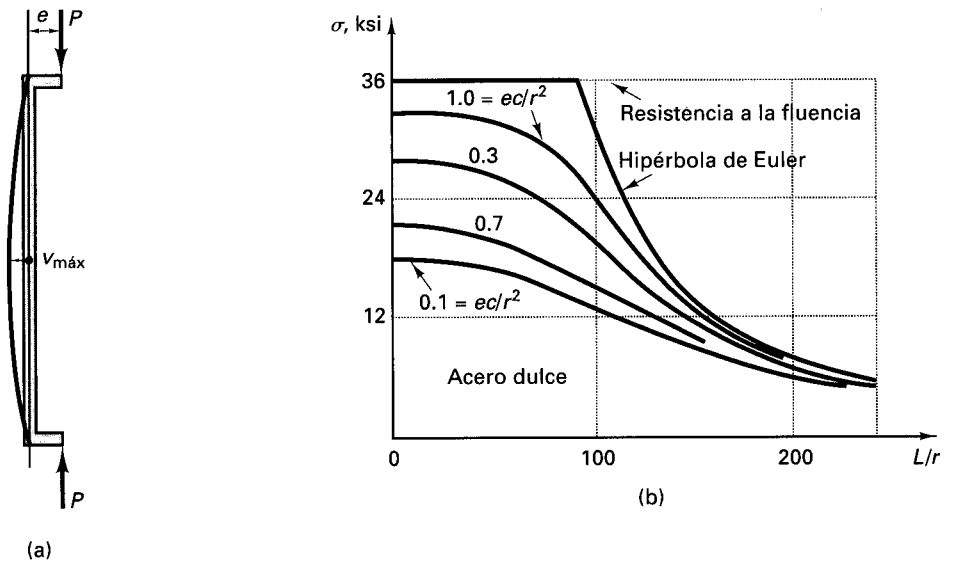


Fig. 16-23 Resultados de análisis para diferentes columnas por la fórmula de la secante con el parámetro nPa/A.

más rápido que P. Por tanto, las soluciones para esfuerzos máximos en columnas causados por diferentes fuerzas axiales no pueden ser superpuestas; más bien, las fuerzas deben superponerse primero y luego calcularse los esfuerzos.

Para una fuerza permisible P_a sobre una columna, donde n es el factor de seguridad, nP_a debe sustituir a P en la ecuación 16-24 y $\sigma_{máx}$ debe hacerse igual al punto de fluencia de un material; es decir,

$$\sigma_{máx} = \sigma_{yp} = \frac{nP_a}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{L}{r}\sqrt{\frac{nP_a}{4EA}}\right) \qquad (16\text{-}25)$$

Este procedimiento asegura un factor de seguridad correcto para la fuerza aplicada, ya que tal fuerza puede incrementarse n veces antes de que se alcance un esfuerzo crítico. Note que el término nP_a aparece también bajo el radical.

La aplicación de las ecuaciones 16-24 y 16-25 es engorrosa y requiere un procedimiento de tanteos. Alternativamente, pueden estudiarse gráficamente como se muestra en la figura 16-23.[19] En esta gráfica note el gran efecto que la excentricidad de la carga tiene en las columnas cortas y el efecto ignorable en las columnas muy esbeltas. Las gráficas de este tipo constituyen una gran ayuda en el diseño práctico. La ecuación de la secante cubre todo el rango de longitudes de columnas. La mayor desventaja al usar esta fórmula

[19]Esta figura está adaptada de D. H. Young, "Rational design of steel columns" ("Diseño racional de columnas de acero"), *Trans. ASCE*, **101**, 1936, p. 431.

es que alguna excentricidad e debe ser supuesta aun para columnas supuestamente rectas y esto es una tarea difícil.[20]

La fórmula de la secante para columnas *cortas* se revierte a la familiar expresión cuando L/r tiende a cero. Para este caso, el valor de la secante tiende a la unidad; por consiguiente, en el límite, la ecuación 16-24 toma la forma

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A} + \frac{Pec}{Ar^2} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \qquad (16\text{-}26)$$

que es la relación normalmente usada para bloques cortos.

16-9. Vigas-columnas

En la sección precedente se consideró el problema de una columna axialmente cargada sometida a momentos iguales en sus extremos. Este es un caso especial de un miembro sobre el que actúan simultáneamente una fuerza axial y fuerzas transversales o momentos que generan flexión. A tales miembros se les llama *vigas-columnas*. El comportamiento de las vigas-columnas y las soluciones linealizadas que se emplean generalmente para su análisis pueden ser aclarados por el simple ejemplo de la barra rígida que se muestra en la figura 16-24(a). Esta barra de longitud L es mantenida inicialmente en una posición vertical por un resorte en A con una constante de resorte torsional k. Cuando se aplican una fuerza vertical P y una fuerza horizontal F en la parte superior de la barra, ella gira y la ecuación de equilibrio debe escribirse para el *estado deformado*, forma similar a la usada en el análisis de estabilidad. Teniendo en cuenta que $k\theta$ es el momento resistente desarrollado por el resorte en A, se obtiene

$$\sum M_A = 0 \curvearrowright + \qquad PL\,\text{sen}\,\theta + FL\cos\theta - k\theta = 0$$

o

$$P = \frac{k\theta - FL\cos\theta}{L\,\text{sen}\,\theta} \qquad (16\text{-}27)$$

Las características cualitativas de este resultado se muestran en la figura 16-24(b) y la correspondiente curva se designa como *solución exacta*. Es interesante notar que cuando $\theta \to \pi$, una fuerza muy grande P puede ser soportada por el sistema, siempre que el resorte continúe funcionando. Para una fuerza P aplicada hacia arriba, graficada hacia abajo en la figura, el ángulo θ decrece cuando P crece.

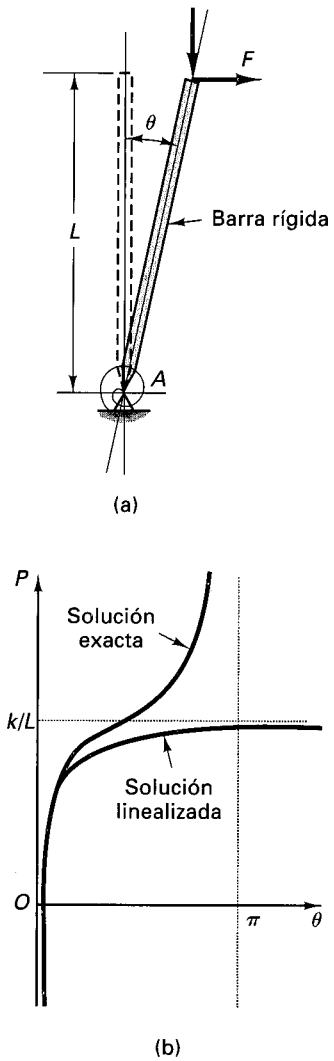


Fig. 16-24 Barra rígida con un grado de libertad.

[20]Además, el hecho de que el esfuerzo alcance un cierto valor no implica que la columna se pandee (es decir, el esfuerzo no es una medida de la carga de pandeo en todos los casos). Puede demostrarse que una carga axial adicional puede ser resistida más allá del punto en que se alcanza el esfuerzo máximo en la sección crítica. Véase F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures* (*Resistencia al pandeo de estructuras metálicas*), Nueva York, McGraw-Hill, 1952, capítulo 1.

La solución expresada por la ecuación 16-27 es para deformaciones arbitrariamente grandes. En problemas complejos es difícil encontrar soluciones de tal generalidad. Además, en la mayor parte de las aplicaciones, las grandes deformaciones no pueden ser toleradas. Por tanto, es usualmente posible limitar la investigación del comportamiento de los sistemas a deformaciones pequeñas y moderadamente grandes. En este problema, esto puede lograrse haciendo sen $\theta \approx \theta$ y cos $\theta \approx 1$. De esta manera, la ecuación 16-27 se simplifica y toma la forma

$$P = \frac{k\theta - FL}{L\theta} \qquad \text{o} \qquad \theta = \frac{FL}{k - PL} \tag{16-28}$$

Para valores finitos pequeños de θ, esta solución es muy aceptable. Por otra parte, cuando θ crece, la discrepancia entre esta solución linealizada y la exacta se vuelve muy grande y pierde su significado físico.

Por analogía con esto, para el análisis de vigas-columnas elásticas, donde las deflexiones van de pequeñas a moderadas, es generalmente suficientemente exacto emplear la ecuación diferencial lineal usual para deflexiones elásticas de vigas. Sin embargo, al aplicar esta ecuación, los momentos flexionantes causados por las cargas transversales, así como por las fuerzas axiales, *deben escribirse para un miembro deflexionado*. Tal procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16-3

Una viga-columna está sometida a una fuerza axial P y a una fuerza transversal hacia arriba F en el centro de su claro; véase la figura 6-25(a). Determine la ecuación de la curva elástica y la fuerza axial crítica P_{cr}. EI es constante.

SOLUCIÓN

El diagrama de cuerpo libre para la viga-columna *deflexionada* se muestra en la figura 16-25(b). Este diagrama ayuda en la formulación del momento flexionante total M, que incluye el efecto de la fuerza axial P multiplicada por la deflexión v. Entonces, usando la relación $M = EIv''$, ecuación 14-10, y notando que para el lado izquierdo del claro, $M = -(F/2)x - Pv$, se tiene

$$EIv'' = M = -Pv - (F/2)x \qquad 0 \le x \le L/2$$

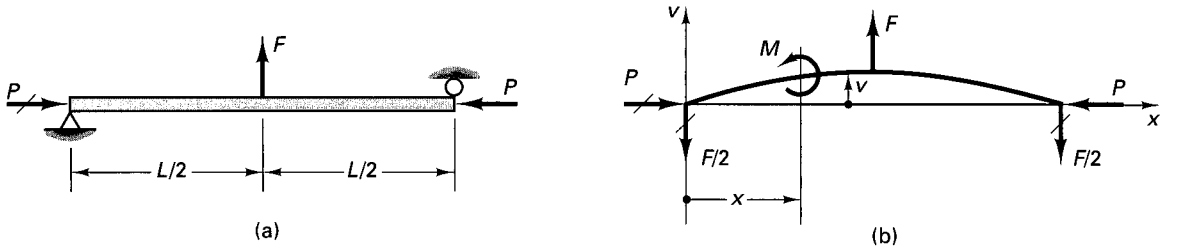


Fig. 16-25

o

$$EIv'' + Pv = -(F/2)x$$

Dividiendo toda la ecuación entre EI, haciendo $\lambda^2 = P/EI$ y después de algunas simplificaciones, la ecuación diferencial gobernante toma la forma

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \lambda^2 v = -\frac{\lambda^2 F}{2P}x \qquad 0 \le x \le L/2 \tag{16-29}$$

La solución homogénea de esta ecuación diferencial es la misma que la de la ecuación 16-6, y la solución particular es igual al término a la derecha dividido entre λ^2. Por tanto, la solución completa es

$$v = C_1 \operatorname{sen} \lambda x + C_2 \cos \lambda x - (F/2P)x \tag{16-30}$$

Las constantes C_1 y C_2 se obtienen de la condición de frontera, $v(0) = 0$ y de una condición de simetría, $v'(L/2) = 0$. La primera condición da

$$v(0) = C_2 = 0$$

Como

$$v' = C_1 \lambda \cos \lambda x - C_2 \lambda \operatorname{sen} \lambda x - F/2P$$

con C_2 ya conocida que es cero, la segunda condición da

$$v'(L/2) = C_1 \lambda \cos \lambda L/2 - F/2P = 0$$

o

$$C_1 = F/[2P\lambda \cos (\lambda L/2)]$$

Sustituyendo esta constante en la ecuación 16-30,

$$v = \frac{F}{2P\lambda}\frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\cos \lambda L/2} - \frac{F}{2P}x = \frac{F}{2P\lambda}\left(\frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\cos \bar{u}} - \lambda x\right) \tag{16-31}$$

donde la última relación se obtiene haciendo

$$\lambda L/2 = \bar{u} \tag{16-32}$$

Como la deflexión máxima ocurre en $x = L/2$, después de algunas simplificaciones, se tiene

$$v_{máx} = \frac{F}{2P\lambda}(\tan \bar{u} - \bar{u}) \tag{16-33}$$

y el momento flexionante máximo absoluto que ocurre en el centro del claro es

$$M_{máx} = \left| -\frac{FL}{4} - Pv_{máx} \right| = \frac{F}{2\lambda} \tan \bar{u} \tag{16-34}$$

Las ecuaciones 16-31, 16-33 y 16-34 se vuelven infinitas cuando $\bar{u}$ es un múltiplo de $\pi/2$ y cualquier entero impar, ya que entonces cos $\bar{u}$ es igual a cero y tan $\bar{u}$ es infinito. Por tanto, para un modo n-ésimo, donde n es un entero impar

$$\bar{u} = \frac{\lambda L}{2} = \sqrt{\frac{P_n}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{n\pi}{2} \tag{16-35}$$

Despejando P_n de las dos últimas expresiones y haciendo $n = 1$, se obtiene la carga crítica de pandeo:

$$P_n = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{16-36}$$

Este procedimiento muestra que una solución de la ecuación diferencial *linealizada* da la *carga de pandeo de Euler*, causando deflexiones y momentos infinitos. Por otra parte, para fuerzas de tensión, las deflexiones se reducen. Esas tendencias son similares a las mostradas en la figura 16-24(b).

A continuación, es de considerable importancia práctica obtener una solución aproximada a este problema que puede entonces generalizarse a un gran número de problemas de viga-columna, para encontrar deflexiones y momentos máximos. Con este fin, desarrollamos tan $\bar{u}$ en la serie de Maclaurin (Taylor) y sustituimos el resultado en la ecuación 16-33, tomando nota de la ecuación 16-35:

$$\tan\bar{u} = \bar{u} + \frac{1}{3}\bar{u}^3 + \frac{2}{15}\bar{u}^5 + \frac{17}{315}\bar{u}^7 + \frac{62}{2835}\bar{u}^9 + \cdots \tag{16-37}$$

$$v_{máx} = \frac{F}{2P\lambda}\frac{1}{3}\left(\frac{\lambda L}{2}\right)^3\left(1 + \frac{2}{5}\bar{u}^2 + \frac{17}{105}\bar{u}^4 + \frac{62}{945}\bar{u}^6 + \ddagger\right) \tag{16-38}$$

Sin embargo, en vista de las ecuaciones 16-35 y 16-36,

$$\bar{u}^2 = \frac{\lambda^2 L^2}{4} = \frac{PL^2}{4EI} = 2.4674\,\frac{P}{P_{cr}} \tag{16-39}$$

Sustituyendo la última ecuación en la ecuación 16-38 y simplificando,

$$v_{máx} = \frac{FL^3}{48EI}\left[1 + 0.9870\left(\frac{P}{P_{cr}}\right) + 0.9857\left(\frac{P}{P_{cr}}\right)^2 + 0.9855\left(\frac{P}{P_{cr}}\right)^3 + \cdots\right] \tag{16-40}$$

Aproximando los coeficientes[21] en la expresión entre corchetes por la unidad y recordando que la suma de la serie de potencias[22] puede escribirse en forma compacta, se tiene

$$v_{máx} \approx \frac{FL^3}{48EI}\left(\frac{1}{1 - P/P_{cr}}\right) \tag{16-41}$$

En esta expresión puede verse (véase la Tabla 10 del apéndice) que el coeficiente por delante de los corchetes es la deflexión central de la viga *sin la fuerza axial*. La expresión entre corchetes da el *factor de amplificación de la deflexión* causada por la fuerza P aplicada. Cuando esta fuerza alcanza el

[21] A. Chajes, *Principles of Structural Stability* (*Principios de estabilidad estructural*), Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1974. Para un análisis de vigas-columnas elastoplásticas, véase K. Jezek, "Die Tragfaehigkeit axial gedrueckter und auf Biegung beanspruchter Stahlstaebe" ("La resistencia de barras de acero sometidas a carga axial de compresión y a flexión"), *Der Stahlbau*, 9, 1936, pp. 12, 22 y 39.

[22] Esto puede verificarse dividiendo la unidad entre el denominador.

valor P_{cr}, la deflexión se vuelve infinita. Este factor de amplificación puede usarse con virtualmente cualquier tipo de cargas transversales siempre que ellas se apliquen en la misma dirección y los resultados son notablemente exactos para deflexiones pequeñas y moderadas.

Después que se obtiene la deflexión máxima aproximada usando la ecuación 16-41, el momento flexionante máximo se obtiene por estática:

$$M_{máx} = \left| -\frac{FL}{4} - Pv_{máx} \right| \tag{16-42}$$

donde el primer término es debido a la carga transversal y el segundo a la fuerza axial en un miembro deflexionado. En vigas-columnas robustas, el último término no es importante.

Es importante notar que las ecuaciones diferenciales, como la ecuación 16-29, para vigas-columnas son de un tipo diferente a las usadas para vigas cargadas sólo transversalmente. Por esta razón, las funciones de singularidad presentadas antes no pueden aplicarse en esos problemas.

16-10. Ecuaciones diferenciales alternativas para vigas-columnas

Para algunas soluciones de problemas de vigas-columnas, es conveniente escribir las ecuaciones diferenciales gobernantes en formas diferentes a las de la sección anterior. Para obtener tales ecuaciones, consideremos el elemento de viga-columna mostrado en la figura 16-26 y hagamos las siguientes aproximaciones de deflexiones pequeñas:

$$dv/dx = \tan\theta \approx \operatorname{sen}\theta \approx \theta \qquad \cos\theta \approx 1 \qquad \text{y} \qquad ds \approx dx$$

Con base en esto, las dos ecuaciones de equilibrio son

$$\sum F_y = 0 \uparrow + \qquad q\,dx + V - (V + dV) = 0$$

$$\sum M_A = 0 \circlearrowleft + \qquad M - P\,dv + V\,dx + q\,dx\,dx/2 - (M + dM) = 0$$

La primera de esas ecuaciones da

$$\frac{dV}{dx} = q \tag{16-43}$$

que es idéntica a la ecuación 7-3. La segunda, al ignorar los infinitesimales de orden superior, da

$$V = \frac{dM}{dx} + P\frac{dv}{dx} \tag{16-44}$$

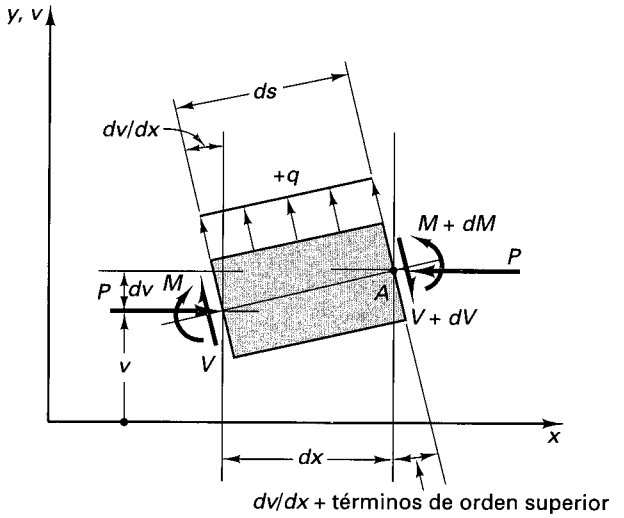


Fig. 16-26 Elemento de viga-columna.

Por tanto, para vigas-columnas, la fuerza cortante V, además de depender de la razón de cambio del momento M como en las vigas, depende ahora también de la *magnitud de la fuerza axial y de la pendiente de la curva elástica*. El último término es la componente de P a lo largo de las secciones inclinadas mostradas en la figura 16-24.

Al sustituir la ecuación 16-44 en la ecuación 16-43 y usando la usual relación curvatura-momento de vigas $d^2v/dx^2 = M/EI$, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales gobernantes alternativas para vigas-columnas:

$$\boxed{\frac{d^2M}{dx^2} + \lambda^2 M = q} \tag{16-45}$$

o

$$\boxed{\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{q}{EI}} \tag{16-46}$$

donde, por simplicidad, se supone que EI es constante y, como antes, $\lambda^2 = P/EI$. Las condiciones de frontera para esas ecuaciones son las mismas que para vigas en flexión (véase la figura 14-5), *excepto para cortante*, donde debe aplicarse la ecuación 16-44. Usando de nuevo la relación curvatura-momento para vigas, la ecuación 16-44 puede escribirse en forma alternativa más apropiada como

$$\boxed{V = EI\frac{d^3v}{dx^3} + P\frac{dv}{dx}} \tag{16-44a}$$

Si $P = 0$, las ecuaciones 16-44a, 16-45 y 16-46 se convierten, respectivamente, en las ecuaciones 14-14b, 7-5 y 14-14c para vigas cargadas transversalmente.

Para referencias futuras, las soluciones homogéneas de la ecuación 16-46 y varias de sus derivadas son

$$v = C_1 \operatorname{sen}\lambda x + C_2 \cos\lambda x + C_3 x + C_4 \qquad \text{(16-47a)}$$

$$v' = C_1\lambda \cos\lambda x - C_2\lambda \operatorname{sen}\lambda x + C_3 \qquad \text{(16-47b)}$$

$$v'' = -C_1\lambda^2 \operatorname{sen}\lambda x - C_2\lambda^2 \cos\lambda x \qquad \text{(16-47c)}$$

$$v''' = -C_1\lambda^3 \cos\lambda x + C_2\lambda^3 \operatorname{sen}\lambda x \qquad \text{(16-47d)}$$

Estas relaciones son útiles para expresar las condiciones de frontera al evaluar las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4. El uso de la ecuación 16-44a en vez de la ecuación 14-14b es esencial cuando debe considerarse la fuerza cortante en una frontera.

Las soluciones de las ecuaciones homogéneas 16-45 y 16-46 para condiciones de frontera particulares conducen a las cargas críticas de pandeo para columnas *prismáticas* elásticas. Esas soluciones tienen el mismo significado que el visto antes en conexión con las soluciones equivalentes de las ecuaciones diferenciales de segundo orden en las secciones 16-4 y 16-5.

Ejemplo 16-4

Una barra esbelta de EI constante está sometida simultáneamente a momentos extremos M_o y a una fuerza axial P, como se muestra en la figura 16-27(a). Determine la deflexión máxima y el máximo momento flexionante.

SOLUCIÓN

Dentro del claro no hay carga transversal. Por tanto, el término a la derecha de la ecuación 16-46 es cero y la solución homogénea de esta ecuación dada por la ecuación 16-47a es la solución completa. Las condiciones de frontera son

$$v(0) = 0 \qquad v(L) = 0 \qquad M(0) = -M_o \qquad \text{y} \qquad M(L) = -M_o$$

Como $M = EIv''$, con la ayuda de las ecuaciones 16-47a y 16-47c, esas condiciones dan

$$v(0) = \qquad\qquad + C_2 \qquad\qquad + C_4 = 0$$

$$v(L) = +C_1 \operatorname{sen}\lambda L + C_2 \cos\lambda L + C_3 L + C_4 = 0$$

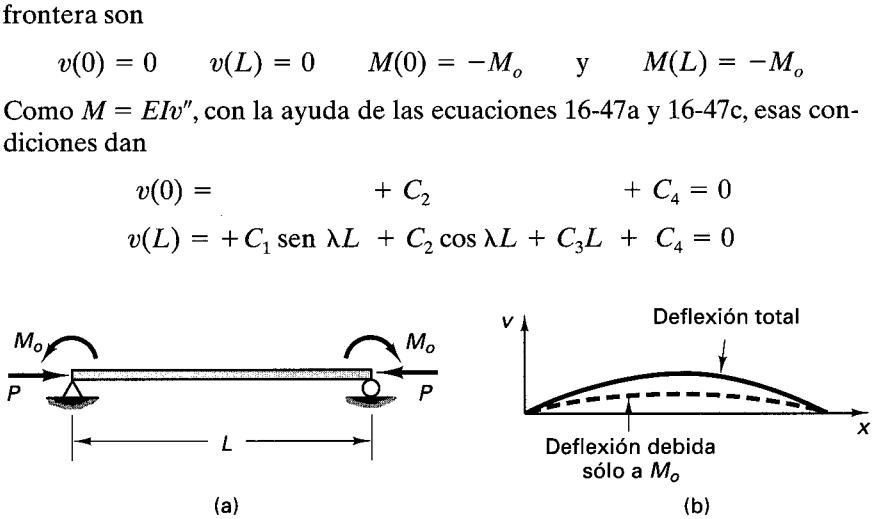


Fig. 16-27

$$M(0) = \qquad - C_2 EI\lambda^2 \qquad = -M_o$$
$$M(L) = -C_1 EI\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda L - C_2 EI\lambda^2 \cos \lambda L \qquad = -M_o$$

Resolviendo esas cuatro ecuaciones simultáneamente,

$$C_1 = \frac{M_o}{P} \frac{1 - \cos \lambda L}{\operatorname{sen} \lambda L} \qquad C_2 = -C_4 = \frac{M_o}{P} \qquad \text{y} \qquad C_3 = 0$$

Por tanto, la ecuación de la curva elástica es

$$v = \frac{M_o}{P}\left(\frac{1 - \cos \lambda L}{\operatorname{sen} \lambda L} \operatorname{sen} \lambda x + \cos \lambda x - 1\right) \tag{16-48}$$

La deflexión máxima ocurre en $x = L/2$. Después de algunas simplificaciones, se encuentra que

$$v_{\text{máx}} = \frac{M_o}{P}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 \lambda L/2}{\cos \lambda L/2} + \cos \frac{\lambda L}{2} - 1\right) = \frac{M_o}{P}\left(\sec \frac{\lambda L}{2} - 1\right) \tag{16-49}$$

El momento flexionante máximo también se presenta en $x = L/2$. Su máximo absoluto es

$$M_{\text{máx}} = |-M_o - Pv_{\text{máx}}| = M_o \sec \lambda L/2 \tag{16-50}$$

Esta solución es directamente comparable a la dada en la sección 16-8 para una columna cargada excéntricamente. Sin embargo, dos diferencias en los detalles de las soluciones deben ser observadas. Los momentos extremos $M_o = Pe$ de la solución anterior y el eje x de la columna cargada excéntricamente están a una distancia e del eje de la columna. Entonces, usando algunas identidades trigonométricas, puede demostrarse que las ecuaciones 16-22 y 16-48 conducen a los mismos resultados.

Los resultados muestran de nuevo que en miembros esbeltos, los momentos flexionantes pueden incrementarse considerablemente en presencia de fuerzas axiales de compresión. Similarmente a la condición encontrada en el ejemplo 16-3, cuando $\lambda L/2 = \pi/2$, la fuerza axial $P = P_{\text{cr}}$ y $v_{\text{máx}}$ y $M_{\text{máx}}$ se vuelven infinitos.

Si las fuerzas aplicadas son de tensión en vez de compresión, el signo de P cambia así como el carácter de las ecuaciones 16-45 y 16-46. Para tales casos, las deflexiones se reducen con una fuerza P axial creciente.

A continuación, la ecuación 16-49 se reescribe en una forma aproximada de la misma manera que se hizo en el ejemplo 16-3. Con este fin, sec $\lambda L/2 = \sec \bar{u}$ se desarrolla en la serie de Maclaurin (Taylor) y, después de sustituirla en la ecuación 16-49, se simplifica usando la ecuación 16-39. Así entonces,

$$\sec \bar{u} = 1 + \frac{1}{2}\bar{u}^2 + \frac{5}{24}\bar{u}^4 + \frac{61}{720}\bar{u}^6 + \cdots \tag{16-51}$$

y

$$v_{\text{máx}} = \frac{M_o}{P}\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda L}{2}\right)^2\left[1 + 1.028\left(\frac{P}{P_{\text{cr}}}\right) + 1.032\left(\frac{P}{P_{\text{cr}}}\right)^2 + \ddagger\right] \tag{16-52}$$

De nuevo, todos los coeficientes en la expresión entre corchetes pueden aproximarse por la unidad sumada a la serie de potencias, dando

$$v_{\text{máx}} \approx \frac{M_o L^2}{8EI}\left(\frac{1}{1 - P/P_{\text{cr}}}\right) \tag{16-53}$$

El coeficiente por delante del paréntesis es la deflexión en medio del claro debida a los momentos de extremo M_o (véase la Tabla 11 del apéndice). El factor de amplificación de la deflexión debido a la carga axial P entre paréntesis es idéntico al encontrado antes en el ejemplo 16-3. Cuando la fuerza P alcanza la carga de pandeo de Euler, la deflexión se vuelve infinita de acuerdo con esta *teoría de deflexiones lineales pequeñas*.

El momento flexionante máximo en el centro de la viga se obtiene por estática:

$$M_{\text{máx}} = |-M_o - Pv_{\text{máx}}| \tag{16-54}$$

Ejemplo 16-5

Usando la ecuación 16-46 en forma homogénea, determine la carga de pandeo de Euler para una columna con extremos articulados.

SOLUCIÓN

Para este fin, la ecuación 16-46 puede escribirse como

$$\frac{d^4v}{dx^4} + \lambda^2 \frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{16-55}$$

La solución de esta ecuación y varias de sus derivadas están dadas por las ecuaciones 16-47. Para una columna articulada en sus extremos, las condiciones de frontera son

$$v(0) = 0 \qquad v(L) = 0 \qquad M(0) = EIv''(0) = 0$$

y

$$M(L) = EIv''(L) = 0$$

Usando esas condiciones con las ecuaciones 16-47a y 16-47c, se obtiene

$$\begin{aligned} C_2 \qquad\qquad\qquad + C_4 &= 0 \\ C_1 \operatorname{sen} \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 L + C_4 &= 0 \\ -C_2 \lambda^2 EI \qquad\qquad &= 0 \\ -C_1 \lambda^2 EI \operatorname{sen} \lambda L - C_2 \lambda^2 EI \cos \lambda L &= 0 \end{aligned}$$

Para obtener una solución no trivial se requiere que el determinante de los coeficientes de este conjunto de ecuaciones algebraicas homogéneas sea igual a cero (véase el ejemplo 16-1). Por tanto, con $\lambda^2 EI = P$,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen} \lambda L & \cos\lambda L & L & 1 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ -P \operatorname{sen}\lambda L & -P\cos\lambda L & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La evaluación de este determinante conduce a sen $\lambda L = 0$, que es precisamente la misma condición dada por la ecuación 16-8.

Este enfoque es conveniente en problemas con condiciones de frontera diferentes, donde la fuerza axial y EI permanecen constantes en toda la longitud de la columna. El método no puede aplicarse directamente si la fuerza axial se extiende sólo sobre una parte del miembro.

Parte B DISEÑO DE COLUMNAS

16-11. Consideraciones generales

Para columnas que no sean cortas, la teoría del pandeo para columnas muestra que las áreas transversales de éstas deben tener el radio de giro mínimo r mayor posible. Resulta así la relación de esbeltez menor posible L_e/r, lo que permite el uso de esfuerzos superiores. Sin embargo, como se vio en la sección 16-2, deben ponerse límites al espesor mínimo del material para prevenir el pandeo local de las placas. Como los perfiles laminados comerciales tienen generalmente relaciones de espesor de pared suficientemente grandes para prevenir tal pandeo, se dará aquí sólo un breve tratamiento de este problema en tanto que es aplicable a miembros en compresión de aluminio. Los modos de pandeo torsional que pueden controlar la capacidad de columnas hechas de placas delgadas y secciones transversales abiertas asimétricas están excluidos de consideración (véase la sección 16-2).

Como los miembros tubulares tienen un gran radio de giro en relación con la cantidad de material en la sección transversal, son excelentes para usarse como columnas. Las secciones de patín ancho (llamadas también secciones H) son también muy adecuadas como columnas y son superiores a las secciones I que tienen patines angostos, lo que conduce a grandes relaciones de L_e/r. Para obtener un gran radio de giro, las columnas a menudo se construyen con perfiles laminados o extruidos y las piezas individuales se separan entre sí para obtener el efecto deseado. Secciones transversales para miembros en compresión típicas de puentes se muestran en las figuras 16-28(a) y (b), para un pescante de grúa o una torre de radio en la figura

16-28(c) y para una armadura ordinaria en la figura 16-28(d). Los ángulos en el último caso están separados por separadores. Los perfiles longitudinales principales en los otros miembros están separados por placas o barras ligeras de celosía, como se muestra en las figuras 16-28(e) y (f). La inestabilidad local debe ser atendida cuidadosamente para prevenir fallas en la celosía, como se muestra en la figura 16-29. Tales temas van más allá del alcance de este texto.[23]

Imperfecciones inevitables deben reconocerse en el diseño práctico de columnas. Por tanto, las especificaciones usualmente estipulan no sólo la calidad del material sino también las tolerancias de fabricación para la falta de rectitud permisible. Los esfuerzos residuales causados por el proceso de manufactura deben también considerarse. Por ejemplo, las secciones de acero de patín ancho, debido a un enfriamiento disparejo durante una operación de rolado en caliente, desarrollan patrones de esfuerzos residuales del tipo mostrado en la figura 16-30. Los esfuerzos residuales máximos de compresión pueden ser del orden de $0.3\sigma_{yp}$ en tales miembros. Las soldaduras en miembros de aleación de aluminio reducen las propiedades mecánicas del material en las zonas afectadas por el calor. Por esas razones, los resultados experimentales sobre pandeo de columnas muestran una gran dispersión.

Después de la aceptación inicial de la fórmula de pandeo de Euler más allá de su rango de aplicabilidad, existió una situación caótica por muchos años con respecto a las fórmulas de diseño de columnas. Ahora que el fenómeno del pandeo en columnas se ha entendido con mayor claridad, sólo unos cuantos tipos de fórmulas para columnas son de uso común. Para el acero es usual especificar dos fórmulas. Una de ellas es para uso en columnas de longitudes cortas e intermedias; la otra es para columnas esbeltas, figura 16-31(a). Para el rango inferior de longitud de columnas se especifica usualmente una parábola (y en algunos cuantos casos, una línea recta inclinada). De esta manera, la resistencia básica a compresión del material,

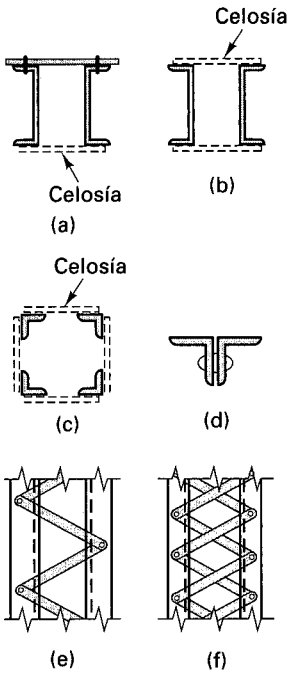


Fig. 16-28 Secciones transversales de columnas armadas típicas.

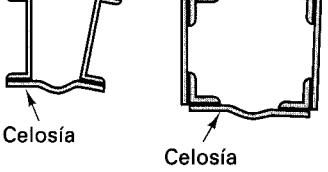


Fig. 16-29 Inestabilidad de la celosía.

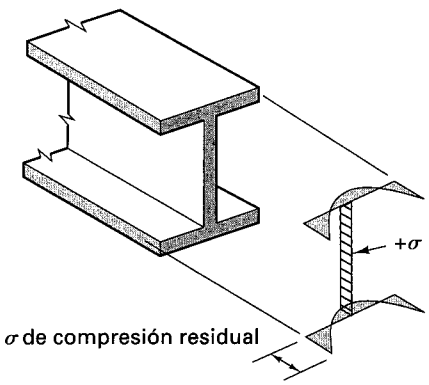


Fig. 16-30 Patrón esquemático de esfuerzos residuales.

[23]B. G. Johnson (editor), *Stability Design Criteria for Metal Structures* (*Criterios de diseño por estabilidad en estructuras metálicas*), 4a. ed., Nueva York, Wiley, 1988.

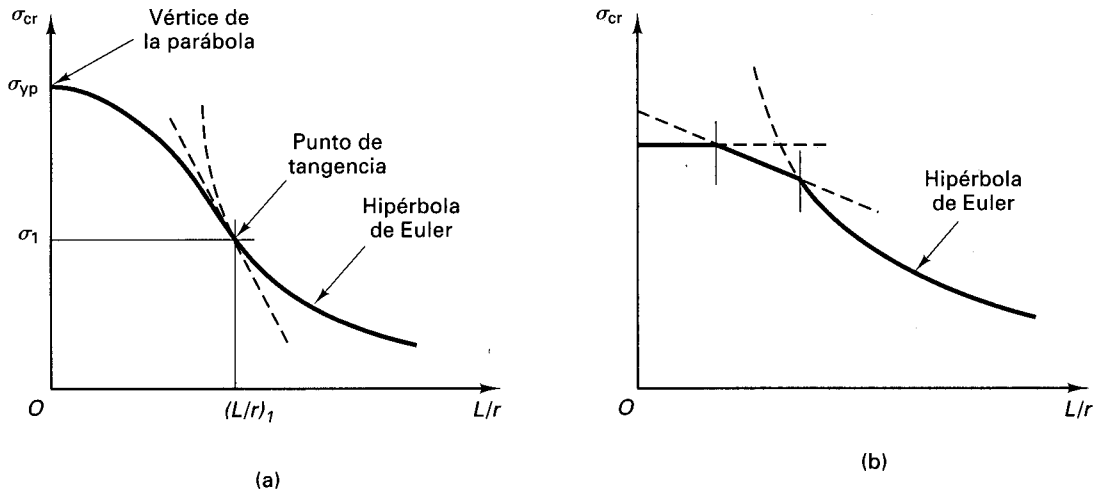


Fig. 16-31 Curvas típicas de pandeo de columnas para diseño.

esfuerzos residuales y tolerancias de fabricación, son tomados en cuenta. Para columnas esbeltas (largas), la carga crítica del pandeo de Euler proporciona la base para el esfuerzo crítico. En este rango de longitudes de columnas, los esfuerzos residuales juegan un papel relativamente menor. Los parámetros dominantes son la rigidez del material, E, y las imperfecciones geométricas de fabricación. A menudo las dos ecuaciones complementarias especificadas tienen una tangente común en un valor seleccionado de L/r. Tal condición no puede satisfacerse si se usa una línea recta en vez de una parábola. En algunas especificaciones se considera el enfoque más conservador de usar la fórmula elástica y un esfuerzo permisible suponiendo una excentricidad accidental basada en las tolerancias de fabricación.

Para algunos materiales se especifica una secuencia de tres diferentes ecuaciones para el diseño de columnas, figura 16-31(b). Una de esas ecuaciones para columnas cortas define la resistencia básica a compresión de un material. Otra ecuación específicamente aplicable a columnas largas se basa en la carga de pandeo de Euler. Una relación empírica, como la línea recta inclinada mostrada en la figura, o una parábola, se especifican para columnas de longitudes intermedias. Tal tipo de fórmulas se dan generalmente para aleaciones de aluminio y madera.

Al aplicar las fórmulas de diseño, es importante observar lo siguiente:

1. El material y las tolerancias de fabricación para las cuales se escribe la fórmula.
2. Si la fórmula da la carga (o esfuerzo) de trabajo o si estima la capacidad última de carga de un miembro. Si la fórmula es del último tipo, debe incluirse un factor de seguridad.
3. El rango de aplicabilidad de la fórmula. Algunas fórmulas empíricas pueden conducir a un diseño inseguro si se usan más allá del rango especificado.

16-12. Columnas cargadas concéntricamente

Como ejemplos de fórmulas de diseño de columnas con carga nominalmente concéntrica, veremos fórmulas representativas para acero estructural, aleaciones de aluminio y madera. Las fórmulas para columnas cargadas excéntricamente serán consideradas en la siguiente sección.

Fórmulas para columnas de acero estructural El Instituto Americano de la Construcción en Acero (AISC) proporciona dos conjuntos de fórmulas para columnas con dos fórmulas en cada conjunto. Uno de esos conjuntos es para usarse en el *diseño por esfuerzos permisibles* (ASD) y el otro en el *diseño por factores de carga y resistencia* (LRFD).[24] En el segundo enfoque se hace una determinación probabilística implícita de la confiabilidad de la capacidad de las columnas, basada en los factores de carga y resistencia (véase la Sección 1-12). Veremos a continuación esos dos conjuntos de fórmulas. Como se fabrican aceros de varias resistencias a la fluencia, las fórmulas son dadas en términos de σ_{yp}, que varía para diferentes aceros. El módulo elástico E para todos los aceros es aproximadamente el mismo y se toma igual a 29×10^3 ksi (200 GPa).

Fórmulas del ASD del AISC para columas. La fórmula AISC para esfuerzo *permisible,* $\sigma_{perm,}$ para columnas *esbeltas* se basa en la carga de pandeo elástico de Euler con un factor de seguridad de 23/12 = 1.92. Las columnas esbeltas son aquellas que tienen una relación de esbeltez $(L_e/r)_1 = C_c = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_{yp}}$ o mayor. La constante C_c corresponde al esfuerzo crítico σ_{cr} en la carga de Euler igual a la mitad del esfuerzo de fluencia del acero σ_{yp}.

La fórmula para columnas largas cuando $(L_e/r) > C_c$ es

$$\sigma_{perm} = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r)^2} \tag{16-56}$$

donde L_e es la longitud efectiva de columna y r es el radio de giro mínimo del área de la sección transversal. No se permite que las columnas excedan una L_e/r de 200.

Para una relación L_e/r menor que C_c, el AISC especifica una fórmula parabólica:

$$\sigma_{perm} = \frac{[1 - (L_e/r)^2/2C_c^2]\sigma_{yp}}{\text{F.S.}} \tag{16-57}$$

donde F.S., el factor de seguridad, se define como

$$\text{F.S.} = \frac{5}{3} + \frac{3(L_e/r)}{8C_c} - \frac{(L_e/r)^3}{8C_c^3}$$

[24]Para las fórmulas ASD, véase el *Manual de construcción en acero del AISC*, 9a. ed., Chicago, AISC, 1989. Para las fórmulas LRFD, véase el *Manual de construcción en acero LRFD del AISC,* Chicago, AISC, 1986. Véase también B. J. Johnston, F. J. Lin y T. V. Galambos, *Basic Steel Design* (*Diseño básico en acero*), 3a. ed., Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1986; C. G. Salmon y J. E. Johnson, *Steel Structures* (*Estructuras de acero*), 2a. ed., Nueva York, Harper y Row, 1980; y W-W. Yu, *Cold-formed Steel Design* (*Diseño en acero formado en frío*), Nueva York, Wiley, 1985.

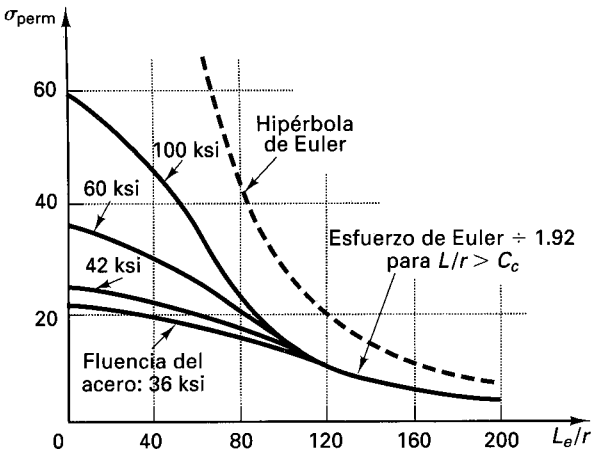


Fig. 16-32 Esfuerzo permisible para columnas cargadas axialmente según las especificaciones AISC.

Note que F.S. varía, siendo más conservador para las mayores relaciones de L_e/r. La ecuación escogida para el F.S. se aproxima a un cuarto de una curva seno con el valor de 1.67 en L_e/r igual a cero y de 1.92 en C_c. Una razón esfuerzo permisible *versus* relación de esbeltez para columnas cargadas axialmente de varios tipos de aceros estructurales se muestra en la figura 16-32.

Como en las aplicaciones prácticas, la restricción ideal de los extremos de las columnas, supuesta en la Sección 16-5, no puede ser siempre confiable, el AISC especifica conservadoramente una modificación de las longitudes efectivas como sigue:

Para columnas empotradas en ambos extremos: $L_e = 0.65L$
Para columnas empotradas en un extremo y articuladas en el otro: $L_e = 0.80L$
Para columnas empotradas en un extremo y libres en el otro: $L_e = 2.10L$

Ninguna modificación tiene que hacerse para columnas articuladas en ambos extremos, donde $L_e = L$. Para otras restricciones de extremo, véanse las Especificaciones AISC.

Fórmulas del LRFD del AISC para columnas. Aquí, de nuevo, hay dos ecuaciones que gobiernan la resistencia de la columna, una para pandeo elástico y la otra para pandeo inelástico. La frontera entre la inestabilidad inelástica y la elástica tiene lugar en $\lambda_c = 1.5$, donde el *parámetro de esbeltez de columna* λ_c se define como

$$\lambda_c = \frac{L_e}{r\pi}\sqrt{\frac{\sigma_{yp}}{E}} \qquad (16\text{-}58)$$

Esta expresión resulta de normalizar la relación de esbeltez L_e/r con respecto a la relación de esbeltez para el esfuerzo crítico elástico de Euler, suponiendo que $\sigma_{cr} = \sigma_{yp}$.

Para $\lambda_c > 1.5$, el esfuerzo *crítico* de pandeo σ_{cr} se basa en la carga de Euler y está dado como

$$\sigma_{cr} = \left[\frac{0.877}{\lambda_c^2} \right] \sigma_{yp} \qquad (16\text{-}59)$$

donde el factor 0.877 se introduce para tomar en cuenta la falta de rectitud inicial de la columna, véase la figura 16-11(c), y los efectos de los esfuerzos residuales.

Para $\lambda_c = 1.5$, una relación empírica basada en extensos estudios experimentales y probabilísticos está dada por

$$\sigma_{cr} = (0.658^{\lambda_c^2})\sigma_{yp} \qquad (16\text{-}60)$$

Esta ecuación incluye los efectos de los esfuerzos residuales y la falta de rectitud inicial.

Ambas fórmulas previas dan la resistencia axial nominal (capacidad) de columnas y deben usarse en conjunción con cargas factorizadas y un factor de resistencia ϕ_c de 0.85. Las relaciones de esbeltez efectivas L_e/r son determinadas igualmente que en el método ASD.

Fórmulas para columnas de aleaciones de aluminio Se dispone de un gran número de aleaciones de aluminio para aplicaciones ingenieriles. Las resistencias de fluencia y última de tales aleaciones varían sobre un amplio rango. Sin embargo, el módulo elástico de las aleaciones es razonablemente constante. La Aluminum Association (AA)[25] proporciona un gran número de fórmulas de diseño para columnas para diferentes aleaciones de aluminio. En todas esas fórmulas, el esfuerzo permisible varía con la relación de esbeltez de la columna, como se muestra en la figura 16-32. Un conjunto representativo de tres ecuaciones se da aquí para la aleación 6061-T6. Tal como se identifican por el primer número, los principales elementos aleantes en esta aleación de aluminio son el magnesio y el silicio. T6 significa que esta aleación ha sido tratada térmicamente para producir un revenido estable. Esta aleación encuentra su uso principal en estructuras de uso rudo que requieren buena resistencia contra la corrosión, como en camiones, tuberías, edificios, etc. Las aleaciones como la 2024 y la 7075 en sus varias combinaciones se usan en aeronaves, donde se emplean fórmulas similares.

Las tres fórmulas básicas para columnas para la aleación 6061-T6 son

$$\sigma_{perm} = 19 \text{ ksi} \qquad 0 \le L/r \le 9.5 \qquad (16\text{-}61a)$$

$$\sigma_{perm} = 20.2 - 0.126L/r \text{ ksi} \qquad 9.5 \le L/r \le 66 \qquad (16\text{-}61b)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{51{,}000}{(L/r)^2} \text{ksi} \qquad 66 \le L/r \qquad (16\text{-}61c)$$

[25] *Manual de construcción en aluminio*, Sección 1, "Specifications for aluminum structures" ("Especificaciones para estructuras de aluminio"), 5a ed., abril, 1982; Sección 2, "Illustrative examples of design" ("Ejemplos ilustrativos de diseño"), abril, 1978; y "Engineering data for aluminum structures" ("Datos ingenieriles para estructuras de aluminio"), 5a. ed., noviembre, 1981, Washington, DC, The Aluminum Association, Inc.

Para miembros en compresión de aleación de aluminio, las longitudes efectivas son aproximadas de la misma manera que las recomendadas por el AISC. Los esfuerzos en las ecuaciones 16-61a y 16-61b son reducidos a 12 ksi a una distancia de 1 in de una soldadura.

Al diseñar columnas de aleación de aluminio, se recomienda también revisar el pandeo local de las componentes de las columnas. Por tanto, la Aluminum Association da también fórmulas para los esfuerzos permisibles en patines proyectantes y almas de columnas (es decir, placas planas con lados soportados). Esas fórmulas, en grupos de tres, son similares a las ecuaciones 16-61, excepto que en vez de las relaciones de esbeltez L/r, se usan las razones b/t, donde b es el ancho de una placa y t es su espesor. Los esfuerzos permisibles dados por tales fórmulas pueden regir el diseño si tales esfuerzos son menores que los requeridos por las ecuaciones 16-61. Dos grupos básicos de fórmulas para determinar el pandeo local para la aleación 6061-T6 son los siguientes:

Para lados o patines proyectantes:

$$\sigma_{perm} = 19 \text{ ksi} \qquad 0 \le b/t \le 5.2 \qquad (16\text{-}62a)$$

$$\sigma_{perm} = 23.1 - 0.79b/t \text{ ksi} \qquad 5.2 \le b/t \le 12 \qquad (16\text{-}62b)$$

$$\sigma_{perm} = 1970/(b/t)^2 \text{ ksi} \qquad 12 \le b/t \qquad (16\text{-}62c)$$

Para placas soportadas en sus bordes:[26]

$$\sigma_{perm} = 19 \text{ ksi} \qquad 0 \le b/t \le 16 \qquad (16\text{-}63a)$$

$$\sigma_{perm} = 23.1 - 0.25b/t \text{ ksi} \qquad 16 \le b/t \le 33 \qquad (16\text{-}63b)$$

$$\sigma_{perm} = 490/(b/t) \text{ ksi} \qquad 33 \le b/t \qquad (16\text{-}63c)$$

Como los tres grupos de fórmulas son dados para los esfuerzos *permisibles* sobre secciones totales, incluyen factores de seguridad para el uso pretendido.

Fórmulas para columnas de madera La National Forest Products Association (NFPA)[27] proporciona la información necesaria para el diseño de columnas de madera. Aquí centraremos nuestra atención en las columnas *rectangulares* macizas. Para tratar tales columnas, es conveniente reescribir las fórmulas de diseño en términos de la relación de esbeltez L_e/d, donde L_e es la longitud efectiva de columna y d es la dimensión *mínima* de la sección transversal; véase la figura 16-33. Según esto,

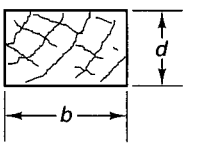


Fig. 16-33 Sección transversal de una columna de madera.

$$r_{mín} = \sqrt{\frac{I_{mín}}{A}} = \sqrt{\frac{bd^3}{12}\frac{1}{bd}} = \frac{d}{\sqrt{12}} \qquad (16\text{-}64)$$

[26]Tales como almas de columnas.

[27]Véase *National Design Specifications for Wood Construction* and *Design Values for Wood Construction, NSD Supplement* (*Especificaciones nacionales de diseño para construcción en madera* y *valores de diseño para construcción en madera, Suplemento NDS*), Washington, DC, National Forest Products Association, 1987. Tabla compilada por la National Forest Products Association. Véase también D. E. Breyer, *Design of Wood Structures* (*Diseño de estructuras de madera*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1988.

Sustituyendo esta relación en la ecuación 16-19a y dividiendo el esfuerzo crítico entre el factor de seguridad recomendado de 2.74,

$$\sigma_{perm} = \frac{\pi^2 E}{2.74(L_e/r)^2} = \frac{\pi^2 E}{2.74 \times 12(L_e/d)^2} = \frac{0.30E}{(L_e/d)^2} \quad (16\text{-}65)$$

Como este esfuerzo es derivado de la fórmula *elástica* de Euler, debe ponerse un límite a su uso en los valores pequeños de L_e/d. En las *Especificaciones de diseño* NFPA, esto se logra requiriendo que para una relación de esbeltez L_e/d, designada por K, el esfuerzo permisible no exceda dos tercios del esfuerzo de diseño F_c para un bloque corto de madera en compresión paralela al grano. En forma de ecuación, usando la ecuación 16-65, esto implica que

$$\frac{2}{3}F_c = \frac{0.3E}{(L_e/d)^2_{mín}} = \frac{0.3E}{K^2}$$

Por consiguiente,

$$K = \sqrt{\frac{0.45E}{F_c}} = 0.671\sqrt{\frac{E}{F_c}} \quad (16\text{-}66)$$

El valor de K proporciona la frontera para la esbeltez mínima de columna por usarse en la ecuación 16-65. Note que como E y F_c varían para diferentes maderas, K toma diferentes valores.

Una representación cualitativa gráfica de los esfuerzos permisibles para columnas sobre el rango permisible de relaciones de esbeltez L_e/d se muestra en la figura 16-34. Note que para columnas cortas se especifica un esfuerzo constante; para las relaciones de esbeltez intermedias y largas se especifica una curva con un punto de inflexión en K. Hay una pequeña discontinuidad en $L_e/d = 11$.

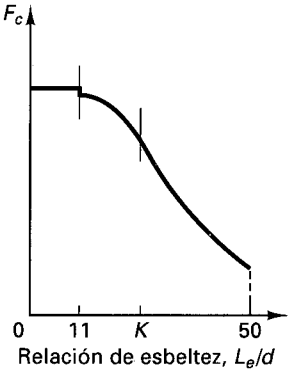


Fig. 16-34 Esfuerzo permisible típico para columnas de madera axialmente cargadas según las especificaciones NFPA.

Los esfuerzos permisibles en columnas rectangulares de madera axialmente cargadas son

$$\sigma_{perm} = F_c \qquad 0 \le L_e/d \le 11 \qquad (16\text{-}67a)$$

$$\sigma_{perm} = F_c\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{L_e/d}{K}\right)^4\right] \qquad 11 < L_e/d \le K \qquad (16\text{-}67b)$$

$$\sigma_{perm} = \frac{0.30E}{(L_e/d)^2} \qquad K \le L_e/d \le 50 \qquad (16\text{-}67c)$$

donde F_c es el esfuerzo permisible de diseño para un bloque corto en compresión paralela al grano, E es el módulo de elasticidad y K es definida por la ecuación 16-66. Note que la relación de esbeltez máxima permisible L_e/d es de 50.

Debe reconocerse que F_c y E para la madera son cantidades sumamente variables, dependientes de la especie, reglas de clasificación, humedad, condiciones de servicio, temperatura, duración de la carga, etc. Por tanto, en las aplicaciones reales, el lector debe consultar textos que traten tales problemas con más detalle.

Las longitudes efectivas son aproximadas de la misma manera que las recomendadas por el AISC.

Los siguientes ejemplos ilustran algunas aplicaciones de las fórmulas de diseño para columnas cargadas axialmente.

Ejemplo 16-6

(a) Determine las cargas axiales permisibles para dos columnas de acero W14 × 159 de 15 ft de longitud usando las fórmulas ASD del AISC; una de las columnas tiene extremos articulados y la otra tiene un extremo empotrado y el otro articulado. (b) Encuentre la solución para dos columnas W14 × 159 de 40 ft de longitud. Para la sección dada, $A = 46.7$ in^2 y $r_{mín} = 4.00$ in. Considere acero A36 con $\sigma_{yp} = 36$ ksi.

SOLUCIÓN

Para ambos casos, es necesario calcular C_c para determinar si la ecuación 16-56 o la 16-57 es aplicable:

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_{yp}} = \sqrt{2\pi^2 \times 29 \times 10^3/36} = 126.1$$

(a) Para el perfil W14 × 159, el *mínimo* $r = 4.00$ in. Por consiguiente, para la columna de 15 ft con extremos articulados, $L_e/r = 15 \times 12/4 = 45 < C_c$ y la ecuación 16-57 es aplicable. Por tanto,

$$\sigma_{perm} = \frac{[1 - 45^2/(2 \times 126.1^2)]36}{5/3 + 3 \times 45/(8 \times 126.1) - 45^3/(8 \times 126.1^3)} = 18.78 \text{ ksi}$$

y

$$P_{perm} = A\sigma_{perm} = 46.7 \times 18.78 = 877 \text{ kips}$$

Para la columna con un extremo empotrado y el otro articulado, de acuerdo con el AISC, la longitud efectiva $L_e = 0.8L = 12$ ft. Por consiguiente, $L_e/r = 12 \times 12/4 = 36$, y aplicando nuevamente la ecuación 16-57, $\sigma_{perm} = 19.50$ ksi y $P_{perm} = A\sigma_{perm} = 46.7 \times 19.50 = 911$ kips.

En este caso, la fuerza axial permisible se incrementa 3.9% al empotrar uno de los extremos de la columna.

(b) Para una columna de 40 ft con extremos articulados, $L_e/r = 40 \times 12/4 = 120 < C_c$. Por tanto, usando de nuevo la ecuación 16-57, puede determinarse que $\sigma_{perm} = 10.28$ ksi y $P_{perm} = A\sigma_{perm} = 46.7 \times 10.28 = 480$ kips. Similarmente, como para una columna empotrada en un extremo y articulada en el otro, $L_e/r = 0.8 \times 120 = 96$, la ecuación 16-57 da $\sigma_{perm} = 13.48$ ksi y $P_{perm} = A\sigma_{perm} = 46.7 \times 13.48 = 630$ kips.

Para este caso, la fuerza axial permisible se incrementa 31.2% empotrando uno de los extremos de la columna, a diferencia del 3.9% encontrado antes para la columna más corta. Esto concuerda completamente con la teoría generalizada de Euler, tratada en la sección 16-7. Como puede verse en la figura 16-21, al restringir los extremos de columnas *largas*, se obtiene un gran incremento en sus resistencias para valores grandes de L_e/r. Al

restringir los extremos de columnas cortas, se obtiene sólo un modesto incremento en sus resistencias.

Ejemplo 16-7

Usando las fórmulas ASD del AISC para columnas, seleccione una columna de 15 ft de altura articulada en sus extremos que debe soportar una carga axial de 200 kips. Considere acero estructural A572 con $\sigma_{yp} = 50$ ksi.

SOLUCIÓN

El tamaño requerido para la columna puede encontrarse directamente en las tablas del *Manual de construcción en acero del AISC*. Sin embargo, este ejemplo nos da la oportunidad de demostrar el procedimiento de tanteos que es a menudo tan necesario en el diseño, y la solución presentada se obtiene usando este método.

Primer ensayo: Sea $L/r = 0$ (una suposición pobre para una columna de 15 ft de longitud). Entonces, de la ecuación 16-57, como el F.S. = 5/3, $\sigma_{perm} = 50/\text{F.S.} = 30$ ksi y $A = P/\sigma_{perm} = 200/30 = 6.67$ in^2. De la Tabla 4A en el apéndice, esto requiere una sección W8 × 24, cuyo $r_{mín} = 1.61$ in. Por tanto, $L/r = 15(12)/1.61 = 112$. Con esta L/r, el esfuerzo permisible se encuentra usando la ecuación 16-56 o la ecuación 16-57, la que sea aplicable de acuerdo con el valor de C_c:

$$C_c = \sqrt{2\pi^2 E/\sigma_{yp}} = \sqrt{2\pi^2 \times 29 \times 10^3/50} = 107 < L/r = 112$$

Por tanto, usando la ecuación 16-56,

$$\sigma_{perm} = \frac{12\pi^2 \times 29 \times 10^3}{23 \times 112^2} = 11.9 \text{ ksi}$$

Este esfuerzo es mucho menor que el inicialmente supuesto de 30 ksi y otra sección debe escogerse.

Segundo ensayo: Sea $\sigma_{perm} = 11.9$ ksi, como el encontrado antes. Entonces $A = 200/11.9 = 16.8$ in^2, que requiere una sección W8 × 58 con $r_{mín} = 2.10$ in. Ahora, $L/r = 15(12)/2.10 = 8.57$, que es menor que el C_c encontrado antes. Por tanto, la ecuación 16-57 es aplicable y

$$\text{F.S.} = 5/3 + 3(85.7)/(8 \times 107) - (85.7)^3/(8 \times 107^3) = 1.90$$

y

$$\sigma_{perm} = [1 - (85.7)^2/(2 \times 107^2)]50/1.90 = 17.9 \text{ ksi}$$

Este esfuerzo requiere una $A = 200/17.9 = 11.2$ in^2, que es proporcionada por una sección W8 × 40 con $r_{mín} = 2.04$ in. Un cálculo de la capacidad de esta sección muestra que la carga axial permisible para ella es de 204 kips, lo que satisface los requisitos del problema.

Ejemplo 16-8

Determine la resistencia P_u de diseño en compresión para una columna de acero W14 × 159 de 15 ft de altura articulada en ambos extremos con base en las especificaciones LRFD del AISC. Para esta sección, $A = 46.7$ in^2 y $r_{mín} = 4.00$ in. Considere acero A36 con $\sigma_{perm} = 36$ ksi.

SOLUCIÓN

El parámetro de esbeltez de la columna, como se define por la ecuación 16-58, es

$$\lambda_c = \frac{15 \times 12}{4\pi}\sqrt{\frac{36}{29 \times 10^3}} = 0.5047$$

Como λ_c es menor que 1.5, la ecuación 16-60 es aplicable para determinar el esfuerzo crítico:

$$\sigma_{cr} = (0.658^{0.5047^2})36 = 32.36 \text{ ksi}$$

Por consiguiente, para esta columna, la resistencia *nominal* por compresión es

$$P_n = A\sigma_{cr} = 46.7 \times 32.36 = 1510 \text{ kips}$$

y como el factor de resistencia $\phi_c = 0.85$, la resistencia de diseño en compresión es

$$P_u = \phi_c P_n = 0.85 \times 1510 = 1289 \text{ kips}$$

Dividiendo P_u entre $P_{perm} = 877$ kips para una columna comparable analizada en el ejemplo 16-6, se obtiene 1.46. Este factor de carga da una indicación de la relación entre el ASD y el LRFD para este caso.

Ejemplo 16-9

Determine las cargas axiales permisibles para dos miembros a compresión hechos de una aleación de aluminio 6061-T6 con sección transversal de patín ancho de 5 × 5 × 5.366 lb/ft y las dimensiones mostradas en la figura 16-35. Uno de los miembros tiene 20 in de longitud y el otro 60 in. Suponga que cada puntal está articulado en ambos extremos. Para la sección dada, $A = 4.563$ in^2 y $r_{mín} = 1.188$ in.

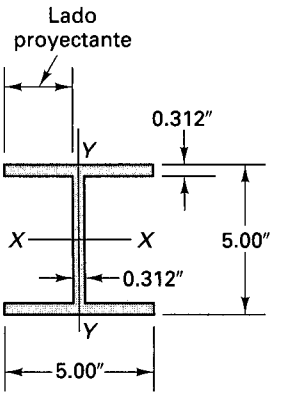


Fig. 16-35

SOLUCIÓN

Independientemente de la longitud de la columna, para aleaciones de aluminio, es necesario investigar el *pandeo local*. Para la sección dada, deben efectuarse dos cálculos, uno para los lados proyectantes de los patines y el otro para el alma.

En ambos casos, los valores b/t determinan el esfuerzo permisible en compresión. Para los patines,

$$\frac{b_f}{t} = \frac{5 - 0.312}{2 \times 0.312} = 7.51$$

Esta razón requiere el uso de la ecuación 16-62b; por consiguiente,

$$(\sigma_{perm})_{patines} = 23.1 - 0.79 \times 7.51 = 17.2 \text{ ksi}$$

La relación ancho-espesor del alma es

$$\frac{b_w}{t} = \frac{5 - 2 \times 0.312}{0.312} = 14.0$$

Como esta relación es menor que 16, de acuerdo con la ecuación 16-63a,

$$(\sigma_{perm})_{alma} = 19 \text{ ksi}$$

El pandeo de conjunto se investiga usando la ecuación 16-47, que depende de L/r, y para un puntal de 20 in es

$$\frac{L}{r} = \frac{20}{1.188} = 16.8$$

Por tanto, usando la ecuación 16-61b,

$$\sigma_{perm} = 20.2 - 0.126 \times 16.8 = 18.1 \text{ ksi}$$

Para este caso de un diseño bien balanceado, rige el esfuerzo permisible por pandeo local del patín. Por tanto,

$$P_{perm} = 4.563 \times 17.2 = 78.5 \text{ kips}$$

La relación de esbeltez para el puntal de 60 in es

$$\frac{L}{r} = \frac{60}{1.188} = 50.5$$

Por tanto, usando de nuevo la ecuación 16-61b,

$$\sigma_{perm} = 20.2 - 0.126 \times 50.5 = 13.8 \text{ ksi}$$

Este esfuerzo es menor que el determinado por pandeo local; por consiguiente,

$$P_{perm} = 4.563 \times 13.8 = 63.0 \text{ kips}$$

16-13. Columnas cargadas excéntricamente

En el pasado, las fórmulas tipo secante vistas en la sección 16-8 fueron usadas como un método racional para el diseño de columnas cargadas excéntricamente. Se presentan a continuación dos otros métodos que han encontrado un amplio uso.

Método del esfuerzo permisible Un procedimiento para diseñar columnas excéntricamente cargadas se obtiene adaptando la solución elástica para bloques cortos sometidos a flexión con carga axial, ecuación 9-5, y haciendo el esfuerzo de compresión máximo igual a o menor que para una columna cargada axialmente, Para un caso plano, resulta

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}} \tag{16-68}$$

Los esfuerzos de compresión en la última ecuación se tratan como cantidades positivas. Si sólo se aplica una fuerza P excéntrica, el momento flexionante $M = Pe$, donde e es la excentricidad de la carga; véase la figura 16-36. El esfuerzo permisible σ_{perm} es determinado con una fórmula apropiada, como la dada en la sección precedente para columnas cargadas axialmente de materiales diferentes. Usualmente, la solución de la ecuación 16-68 requiere un procedimiento de tanteos.

Para columnas de longitud corta e intermedia, el procedimiento previo es usualmente conservador, ya que σ_{perm} para esfuerzos de compresión es generalmente menor que el esfuerzo permisible por flexión. Por otra parte, este procedimiento puede volverse no conservador en columnas esbeltas, donde las deflexiones son amplificadas debido a la fuerza axial. Para tales casos, es apropiado determinar la magnitud de la amplificación del momento flexionante causada por la deflexión de la columna usando el factor de amplificación de la deflexión aproximado deducido en los ejemplos 16-3 o 16-4.

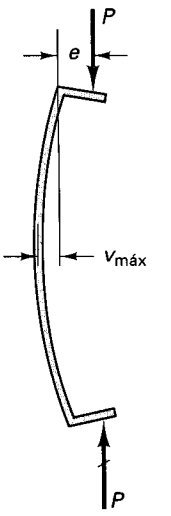


Fig. 16-36 Columna cargada excéntricamente.

Método de interacción En una columna cargada excéntricamente, una gran parte del esfuerzo total puede resultar del momento aplicado. Sin embargo, el *esfuerzo permisible en flexión es usualmente mayor que el esfuerzo axial permisible*. Por consiguiente, para una columna particular, es deseable alcanzar algún equilibrio entre los dos esfuerzos, dependiendo de las magnitudes relativas del momento flexionante y de la fuerza axial. Entonces, como en flexión $\sigma = Mc/I = Mc/Ar_1^2$, donde r_1 es el radio de giro *en el plano de flexión*, el área A_b requerida por el momento flexionante M es

$$A_b = \frac{Mc}{\sigma_{ab} r_1^2}$$

donde σ_{ab} es el *esfuerzo máximo de flexión* permisible. Similarmente, el área A_a requerida por la fuerza axial P es

$$A_a = \frac{P}{\sigma_{aa}}$$

donde σ_{aa} es el *esfuerzo axial permisible para el miembro actuando como columna*, que depende de la razón L/r. Por tanto, el área *total* A requerida para una columna sometida a una fuerza axial y un momento flexionante es

$$A = A_a + A_b = \frac{P}{\sigma_{aa}} + \frac{Mc}{\sigma_{ab} r_1^2} \tag{16-69}$$

Dividiendo entre A,

$$\frac{P/A}{\sigma_{aa}} + \frac{Mc/Ar_1^2}{\sigma_{ab}} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{\sigma_a}{\sigma_{aa}} + \frac{\sigma_b}{\sigma_{ab}} = 1 \qquad (16\text{-}70)$$

donde σ_a es el esfuerzo axial causado por las cargas verticales aplicadas y σ_b es el esfuerzo de flexión causado por el momento aplicado. Si una columna soporta sólo una carga axial y el momento aplicado es cero, la fórmula indica que la columna está diseñada para el esfuerzo σ_{aa}. Por otra parte, el esfuerzo permisible resulta ser el esfuerzo de flexión σ_{ab} si no hay una fuerza directa de compresión actuando sobre la columna. Entre esosdos casos extremos, la ecuación 16-70 mide la importancia relativa de los dos tipos de acciones y especifica la naturaleza de su interacción. Por tanto, suele llamarse *fórmula de interacción* y sirve como base para las especificaciones del ASD del AISC, donde se establece que la suma de esas dos razones de esfuerzos no debe exceder de la unidad. El mismo enfoque ha sido bien recibido en otras aplicaciones que las relativas al acero estructural. La Aluminum Association recomienda una relación similar. La National Forest Products Association desarrolló una serie de fórmulas con el mismo propósito.

En términos de la notación usada por el AISC, la ecuación 16-70 se reescribe como

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \leq 1.0 \qquad (16\text{-}71)$$

En la práctica, la excentricidad de la carga sobre una columna puede ser tal que cause momentos flexionantes respecto a ambos ejes de la sección transversal. La ecuación 16-71 toma entonces la forma

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \qquad (16\text{-}72)$$

Los subíndices x y y, combinados con el subíndice b, indican el eje de flexión respecto al cual un esfuerzo particular es aplicable, y

F_a = esfuerzo axial permisible si sólo se tiene una fuerza axial

F_b = esfuerzo de compresión permisible por flexión si sólo se tiene momento flexionante

f_a = esfuerzo axial calculado

f_b = esfuerzo de flexión calculado

En puntos que están arriostrados en el plano de flexión, F_a es igual al 60% del esfuerzo de fluencia F_y del material, y

$$\frac{f_a}{0.6F_y} + \frac{f_{bx}}{F_{bx}} + \frac{f_{by}}{F_{by}} \leq 1.0 \qquad (16\text{-}73)$$

En puntos intermedios en la longitud de un miembro en compresión, los momentos flexionantes secundarios debido a la deflexión (véase la figura 16-34) pueden contribuir en forma importante a la magnitud del esfuerzo

combinado. De acuerdo con las Especificaciones AISC, esta contribución se ignora en casos en que f_a/F_a es menor que 0.15 (es decir, el esfuerzo axial es pequeño en relación con el esfuerzo axial permisible), y la ecuación 16-73 puede aún usarse. Cuando f_a/F_a es mayor que 0.15, el efecto de los momentos flexionantes secundarios adicionales puede ser aproximado multiplicando ambos f_{bx} y f_{by} por un *factor de amplificación*, $C_m/(1 - f_a/F'_e)$, que toma en cuenta la relación de esbeltez en el plano de flexión y también la naturaleza de los momentos en los extremos. El término en el denominador del factor de amplificación considera el efecto de la relación de esbeltez por medio de F'_e (esfuerzo de pandeo de Euler usando L_e/r en el plano de flexión) dividido entre 23/12, o 1.92, que es el factor de seguridad del AISC para una columna muy larga con L_e/r mayor que C_c. (Véase la definición de C_c en la Sección 16-12.) Puede verse que el factor de amplificación crece con f_a y *crece muy rápidamente* cuando f_a se acerca al valor de F'_e. El término C_m en el numerador es un factor de corrección que toma en cuenta la relación entre los momentos de extremo así como su sentido relativo. El término C_m es mayor si los momentos extremos son tales que causan una curvatura simple del miembro y menor si causan una curvatura doble. La fórmula para $f_a/F_a > 0.15$ es entonces

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_{mx}f_{bx}}{(1 - f_a/F'_{ex})F_{bx}} + \frac{C_{my}f_{by}}{(1 - f_a/F'_{ey})F_{by}} \leq 1.0 \qquad (16\text{-}74)$$

De acuerdo con las especificaciones AISC,[28] el valor de C_m se tomará como sigue:

1. Para miembros en compresión de marcos sometidos a traslación de sus nodos (desplazamiento lateral), $C_m = 0.85$.
2. Para miembros en compresión restringidos de marcos arriostrados contra traslación de sus nodos y no sometidos a carga transversal entre sus soportes en el plano de flexión,

   $$C_m = 0.6 - 0.4M_1/M_2$$

   (pero no menor que 0.4), donde M_1/M_2 es la razón del menor al mayor momento en los extremos de aquella porción del miembro no arriostrada en el plano de flexión en consideración. M_1/M_2 es positiva cuando el miembro está flexionado en curvatura doble y negativa cuando está flexionado en curvatura simple.

3. Para miembros en compresión en marcos arriostrados contra traslación de sus nodos en el plano de carga y sometidos a carga transversal entre sus soportes, el valor de C_m puede determinarse por análisis racional. Sin embargo, en vez de tal análisis, pueden usarse los siguientes valores: (a) para miembros cuyos extremos están restringidos, $C_m = 0.85$; (b) para miembros cuyos extremos no están restringidos, $C_m = 1.0$.

[28] *Manual de construcción en acero del AISC*, 9a. ed., Chicago, AISC, 1989, pp. 5-27.

Ejemplo 16-10

Seleccione una columna de aleación de aluminio 6061-T6 para la carga mostrada en la figura 16-37 usando el método del esfuerzo permisible. Suponga que la columna está articulada y soportada lateralmente en ambos extremos.

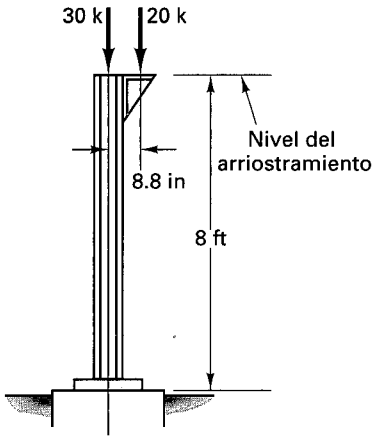


Fig. 16-37

SOLUCIÓN

En este problema, la ecuación 16-68 debe ser satisfecha con σ_{perm} dado por una de las ecuaciones 16-61. Suponiendo que la longitud de la columna está en el rango intermedio, la ecuación 16-61b es aplicable y puede escribirse la siguiente relación:

$$\frac{30 + 20}{A} + \frac{20 \times 8.8}{S} = \frac{50}{A} + \frac{176}{S} \leq 20.2 - 0.126\frac{L}{r}$$

donde A, S y r dependen de la sección transversal de la columna seleccionada. Note que debe usarse la S aplicable al plano de flexión. Para resolver este problema se usa un procedimiento de tanteos.

Primer ensayo: Es conveniente escribir la última ecuación en la forma siguiente:

$$\frac{50}{A} + \frac{176}{A}\left(\frac{A}{S}\right) \leq 20.2 - 0.126\frac{L}{r}$$

donde $A/S = B$ define un *factor de flexión*.[29] Esos factores son razonablemente constantes para toda una clase de secciones transversales. Por tanto, la solución puede comenzar seleccionándose un tamaño plausible para un miembro, que entonces proporciona datos para A/S y de la ecuación precedente puede despejarse un valor de prueba para A. Siguiendo este procedimiento, *supongamos* aquí una sección de patín ancho de aluminio de 8 in $\times$ 8.5 in $\times$ 8.32 lb/ft. El *Aluminum Association Construction Manual* da los siguientes datos para esta sección: $A = 7.08$ in^2, $S_x = 21.04$ in^3 y $r_{mín} = 1.61$ in. (Geométricamente, esta sección transversal es muy similar a la sección de acero W8 $\times$ 24 dada en la Tabla 4A del apéndice. Los valores correspondientes dados aquí son $A = 7.08$ in^2, $S_x = 20.9$ in^3 y $r_{mín} = 1.61$ in.) Con base en esos datos, $B = A/S_x = 7.08/21.04 = 0.337$. Por consiguiente, la ecuación básica de diseño es

$$\frac{50}{A} + \frac{176}{A} \times 0.337 = \frac{109.3}{A} = 20.2 - 0.126 \times \frac{8 \times 12}{1.61} = 12.69$$

La solución de esta ecuación da $A = 8.61$ in^2, que es mayor que el área proporcionada por la sección supuesta y se requiere entonces otro ensayo.

Segundo ensayo: Seleccionamos una W8 $\times$ 8 $\times$ 10.72 lb/ft que es la siguiente sección disponible mayor con $A = 9.12$ in^2, $S_x = 27.41$ in^3 y $r_{mín} = 2.01$ in. (Una sección W8 $\times$ 31 de acero tiene aproximadamente las mismas

[29]Los factores de flexión están tabulados para muchas secciones transversales en el *Manual de construcción en acero del AISC* o pueden calcularse para una sección supuesta cuando A y S se conocen.

propiedades.) Sustituyendo esas cantidades en la primera ecuación formulada aproximadamente antes muestra que

$$\frac{50}{9.12} + \frac{176}{27.41} = 11.9 \leq 20.2 - 0.126 \times \frac{8 \times 12}{2.01} = 14.2 \text{ ksi}$$

Por tanto, esta sección es satisfactoria. Para una solución completa de este problema, el pandeo local de los patines y el alma deben también revisarse, como se hizo en el ejemplo 16-9. Tal solución, no dada aquí, muestra que los esfuerzos por pandeo local son mayores que el esfuerzo axial permisible y no controlan el diseño.

Ejemplo 16-11

Seleccione una columna de acero para la carga mostrada en la figura 16-38 usando el método de interacción ASD del AISC. Suponga que la columna está articulada y lateralmente arriostrada en ambos extremos. Sea $F_y = 50$ ksi y $F_b = 30$ ksi.

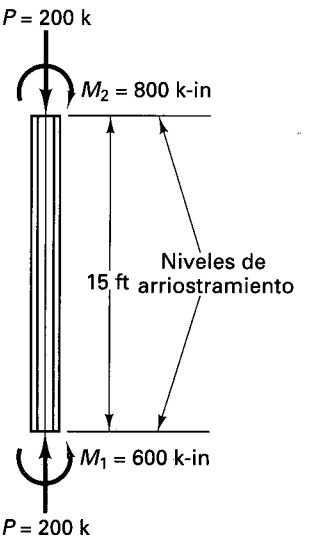


Fig. 16-38

SOLUCIÓN

En este problema, la fórmula de interacción, ecuación 16-72 o ecuación 16-73, debe ser satisfecha, dependiendo de si f_a/F_a es menor que o mayor que 0.15. La solución se obtiene por tanteos.

Primer ensayo: Sea $L_e/r = 0$, aunque es una suposición no muy buena para una columna de 15 ft. Correspondiente a este valor de la relación de esbeltez, F_a puede calcularse usando la ecuación 16-57 y se obtiene $F_a = 50/(5/3) = 30$ ksi. El área requerida de la sección puede entonces calcularse usando la ecuación 16-72:

$$1.0 \geq \frac{f_a}{F_a} + \frac{f_b}{F_b} \quad \text{o} \quad A \geq \frac{Af_a}{F_a} + \frac{Af_b}{F_b}$$

Como

$$f_b = \frac{M}{S_x} = \frac{M}{A}\frac{A}{S_x} = \frac{M}{A}B_x \quad \text{y} \quad f_a = \frac{P}{A}$$

$$A \geq \frac{P}{F_a} + \frac{M}{F_b}B_x$$

Para cualquier peralte de sección, el factor de flexión B_x no varía mucho. Por tanto, si se escoge un perfil W10, un valor típico de B_x, estipulado en tablas más extensas, es aproximadamente de 0.264. Entonces

$$A = \frac{200}{30} + \frac{800 \times 0.264}{30} = 13.7 \text{ in}^2$$

Seleccionamos una sección W10 × 49 con $A = 14.4\ \text{in}^2$, $r_{\text{mín}} = 2.54$ in, $r_x = 4.35$ in, $B_x = 0.264$ y llevamos a cabo los cálculos necesarios para determinar si gobierna la ecuación de interacción 16-72 o la ecuación 16-74:

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{200}{14.4} = 13.9 \text{ ksi} \quad f_b = \frac{MB_x}{A} = \frac{800 \times 0.264}{14.4} = 14.7 \text{ ksi}$$

$$\frac{L_e}{r_{\text{mín}}} = \frac{15 \times 12}{2.54} = 70.9 < C_c \quad C_c = \sqrt{2\pi^2 E/F_y} = 107$$

Usando la ecuación 16-57, $F_a = 19.3$ ksi y $f_a/F_a = 13.9/19.3 = 0.72 > 0.15$; por consiguiente, debe revisarse la fórmula de interacción dada por la ecuación 16-74. Para esto, usando L_e/r_x en el plano de flexión, se determina

$$F'_e = \frac{12\pi^2 E}{23(L_e/r_x)^2} = \frac{149 \times 10^3}{(15 \times 12/4.35)^2} = \frac{149 \times 10^3}{(41.4)^2} = 86.9 \text{ ksi}$$

Entonces, como los momentos extremos someten la columna a curvatura simple, $M_1/M_2 = -600/800 = -0.75$ y

$$C_m = 0.6 - 0.4M_1/M_2 = 0.6 - (0.4)(-0.75) = 0.9$$

Con flexión en un solo plano, la ecuación 16-74 se reduce a

$$\frac{f_a}{F_a} + \frac{C_m f_b}{(1 - f_a/F'_e)F_b} \leq 1.0$$

Al sustituir las cantidades apropiadas en esta relación, se obtiene

$$\frac{13.9}{19.3} + \frac{0.9 \times 14.7}{(1 - 13.9/86.9)30} = 0.72 + 0.52 = 1.24 > 1.0$$

Como la ecuación 16-74 no se satisface, se debe usar una sección mayor.

Segundo ensayo: Como ayuda para escoger una sección mayor, suponemos $F_a = 19.3$ ksi, que es el valor calculado para la sección en el ensayo previo. Usando $B_x = 0.264$ para secciones W10,

$$A \geq \frac{P}{F_a} + \frac{MB_x}{F_b} = \frac{200}{19.3} + \frac{800 \times 0.264}{30} = 17.4\ \text{in}^2$$

Seleccionamos ahora una sección W10 × 60 con $A = 17.6\ \text{in}^2$, $r_{\text{mín}} = 2.57$ in, $r_x = 4.39$ in, $B_x = 0.264$ y procedemos como en el primer ensayo para verificar la fórmula de interacción:

$$f_a = \frac{P}{A} = \frac{200}{17.6} = 11.4 \text{ ksi} \quad f_b = \frac{MB_x}{A} = \frac{800 \times 0.264}{17.6} = 12.0 \text{ ksi}$$

$$\frac{L_e}{r_{\text{mín}}} = \frac{15 \times 12}{2.57} = 70.0 < C_c$$

Usando la ecuación 16-57, $F_a = 19.4$ ksi y $f_a/F_a = 11.4/19.4 = 0.59 > 0.15$; por consiguiente, la ecuación 16-74 debe ser revisada:

$$F'_e = \frac{149 \times 10^3}{(L_e/r_x)^2} = \frac{149 \times 10^3}{(15 \times 12/4.39)^2} = 88.6 \text{ ksi}$$

De nuevo, usando la ecuación 16-74 para flexión en un solo plano y sustituyendo en ella las cantidades apropiadas, se tiene

$$\frac{11.4}{19.4} + \frac{0.9 \times 12.0}{(1 - 11.4/88.6)30} = 0.59 + 0.41 = 1.00$$

Como esta relación satisface la ecuación 16-74, la sección W10 × 60 es satisfactoria.

16-14. Estabilidad lateral de vigas

La teoría de resistencia y deflexión de vigas desarrollada en este texto es aplicable sólo si las vigas están en *equilibrio estable*. Las vigas angostas o esbeltas que no tienen soporte lateral pueden pandearse lateralmente y volverse así inestables; véase la figura 16-39. Estudios teóricos y experimentales de este problema muestran que, dentro de ciertos límites, pueden usarse esfuerzos de flexión reducidos para mantener la estabilidad de tales vigas. La naturaleza de los esfuerzos reducidos se parece a las curvas exhibidas para columnas en las figuras 16-31 y 16-34. El parámetro clave para la reducción del esfuerzo depende de las propiedades del material, de la geometría de la sección transversal y del gradiente del momento. Varias de las referencias citadas en este capítulo analizan este tema. En esta sección se da sólo un criterio simple para evitar el problema del pandeo lateral torsionante en vigas de acero compactas.

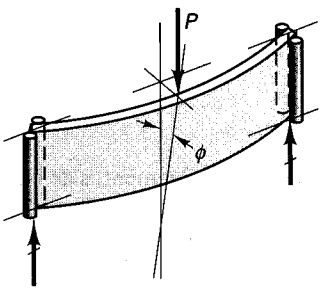


Fig. 16-39 Pandeo lateral torsionante de una viga angosta.

De acuerdo con las especificaciones ASD del AISC, para que una viga compacta califique para el esfuerzo de flexión permisible máximo, deberá tener soportes laterales intermitentes a intervalos que no excedan el valor

$$\frac{76b_f}{\sqrt{F_y}} \quad \text{o} \quad \frac{20{,}000}{(d/A_f)F_y} \quad \text{[in]} \qquad (16\text{-}75)$$

donde A_f es el área del patín de compresión, b_f es el ancho del patín, d es el peralte de la viga y F_y es el esfuerzo de fluencia del material en ksi.

PROBLEMAS

Sección 16-3

16-1. Una barra rígida articulada en la base se mantiene en posición vertical por medio de dos resortes: uno tiene una rigidez k N/mm y el otro $2k$ N/mm, como se muestra en la figura. Determine la fuerza crítica P_{cr} para este sistema.

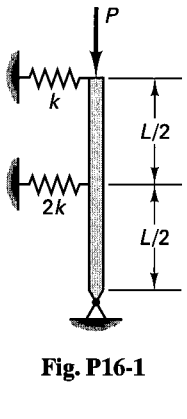


Fig. P16-1

16-2 al 16-5. Segmentos de barras rígidas de iguales longitudes a están conectados en sus nodos y en el fondo por articulaciones sin fricción y son mantenidos en posición recta por resortes torsionantes cuyas rigideces se dan en las figuras. Determine los valores propios de esos sistemas y muestre las funciones propias sobre diagramas separados. Identifique las cargas críticas.

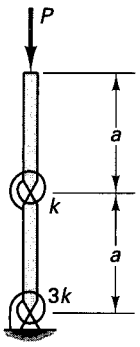


Fig. P16-2

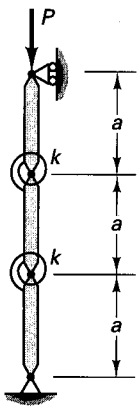


Fig. P16-3

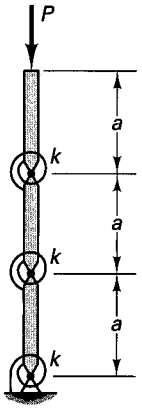


Fig. P16-4

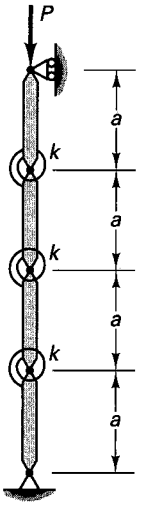


Fig. P16-5

16-6. Una columna prismática elástica sin peso puede ser aproximada por una serie de barras rígidas cada una de longitud a con una constante de resorte torsionante k apropiada en cada nodo, como se muestra en la figura. Establezca la ecuación del determinante para encontrar la carga crítica para un sistema que tenga n grados de libertad.

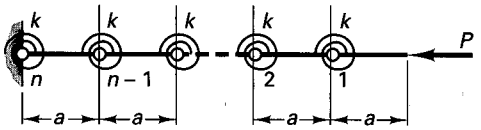


Fig. P16-6

Sección 16-5.

16-7. Una columna ideal está articulada en su base y atirantada en su parte superior por cuatro alambres, como se muestra en la figura. La columna de 3000 mm de altura tiene una sección transversal circular maciza de 80 mm de diámetro. Para la columna y los alambres, $E = 200$ GPa y $\sigma_{yp} = 400$ MPa. ¿Cuál debe ser el diámetro de los alambres para que una carga de pandeo P_{cr} perfectamente concéntrica pueda alcanzarse simultáneamente con un desplazamiento lateral en la parte superior? Suponga que el desplazamiento lateral es impedido sólo por un alambre. Considere que la columna es perfectamente rígida durante el desplazamiento lateral de la parte superior. (*Nota*: La excentricidad de la carga y la falta de rectitud geométrica de la columna deben considerarse en las aplicaciones reales.)

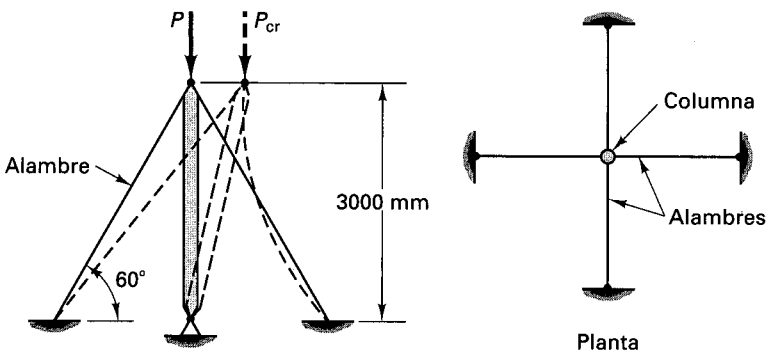


Fig. P16-7

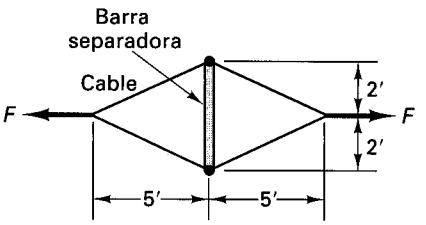


Fig. P16-8

16-8. Una barra de acero redonda de 1 in de diámetro y 4 ft de longitud actúa como separador en el arreglo mostrado en la figura. Si los cables y las conexiones están diseñados apropiadamente, ¿qué fuerza F puede aplicarse al conjunto? Use la fórmula de Euler y suponga un factor de seguridad de 3. $E = 29 \times 10^6$ psi.

16-9. Una barra maciza de acero con radio de 21 mm actúa como separador en el sistema mostrado en la figura. Con base en la fórmula de Euler y con un factor de seguridad de 1.7, ¿cuál es la capacidad del sistema con base en la resistencia de la barra separadora? $E = 200$ GPa.

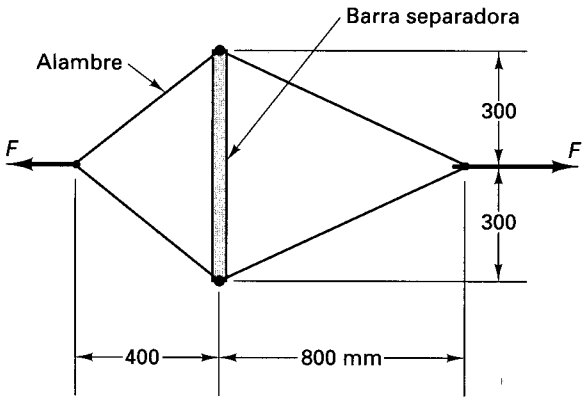


Fig. P16-9

16-10. Una barra pescante está hecha con un tubo de aluminio de 60 mm de diámetro exterior y 4 mm de espesor de pared, y es parte de un dispositivo para levantar cargas, como se muestra en la figura. Determine las magnitudes de la fuerza F que podría aplicarse a este sistema plano si rige la capacidad del pescante. Suponga un factor de seguridad de 2 para la carga de pandeo de Euler. $E = 75$ GPa. Todas las dimensiones mostradas están en milímetros.

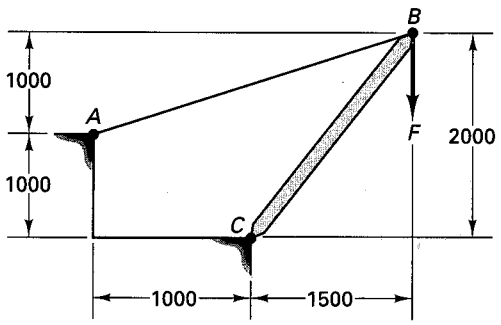


Fig. P16-10

16-11. El mástil de una grúa está hecho con un perfil tubular estándar rectangular de 4×2 in con peso de 6.86 lb/ft. ($A = 2.02$ in^2, $I_x = 1.29$ in^4 e $I_z = 3.87$ in^4.) Si esta grúa está armada como se muestra en la figura, ¿qué fuerza vertical F, gobernada por el tamaño del mástil, puede aplicarse en A? Suponga que todos los nodos están articulados y que los detalles de las conexiones son tales que el mástil queda cargado axialmente. La parte superior del mástil está arriostrada para prevenir desplazamientos laterales. Use la fórmula de Euler con un factor de seguridad de 3.3. $E = 29 \times 10^6$ psi.

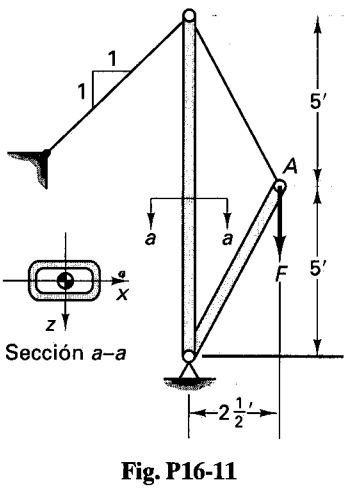


Fig. P16-11

16-12. ¿Qué fuerza F puede aplicarse al sistema mostrado en la figura si gobierna la barra AB de 25 × 16 mm hecha de una aleación de aluminio? El factor de seguridad para la carga de pandeo de Euler es de 2.5. Suponga que los extremos están articulados. E = 70 GPa.

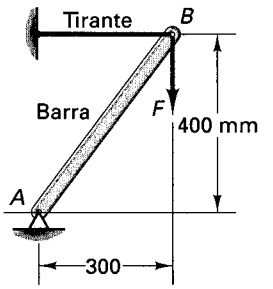


Fig. P16-12

16-13. Gobernada por la sección T de acero, ¿qué fuerza F puede aplicarse al sistema mostrado en la figura? El factor de seguridad para la carga de pandeo debe ser de 2. Suponga que los extremos están articulados y que la fuerza aplicada es axial. E = 200 GPa. Desprecie la posibilidad del pandeo torsionante.

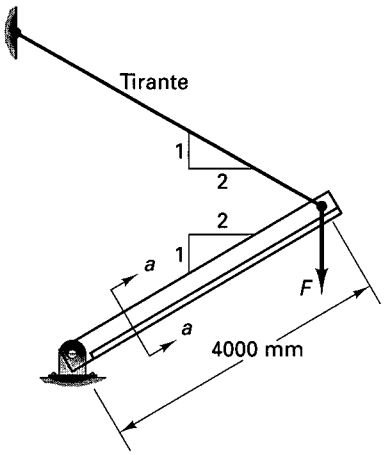
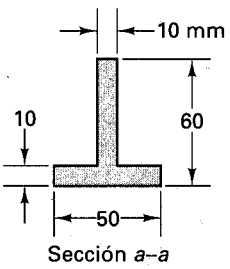


Fig. P16-13



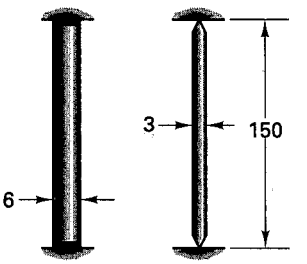


Fig. P16-14

16-14. Una barra delgada de acero inoxidable está precomprimida axialmente 100 N entre dos placas fijas a una distancia constante de 150 mm entre ellas; véase la figura. Este ensamble se hace a 20°C. ¿Qué tanto puede elevarse la temperatura de la barra para tener un factor de seguridad de 2 respecto al pandeo? Suponga E = 200 GPa y $\alpha = 15 \times 10^{-6}$ por°C.

16-15. ¿Qué tubo de tamaño estándar debe usarse para el miembro horizontal de la estructura mostrada en la figura para soportar la fuerza máxima de 20 kN, que incluye un factor de impacto? Use la fórmula de pandeo de Euler para columnas con extremos articulados y un factor de seguridad de 2.5. Desprecie el peso de la estructura. E =200 GPa.

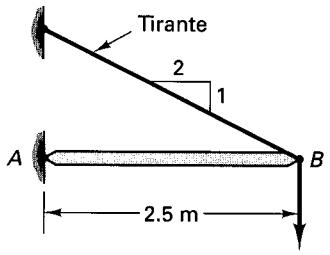


Fig. P16-15

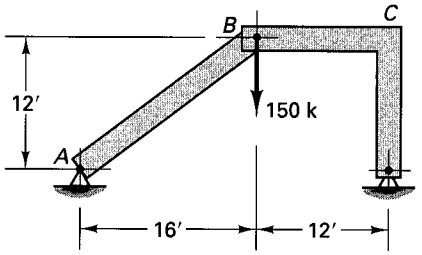


Fig. P16-16

16-16. Seleccione una sección W de acero para el miembro AB para el sistema mostrado en la figura que debe resistir una fuerza vertical de 150 k. El sistema está arriostrado lateralmente en B y C. Desprecie el peso de los miembros. Suponga extremos articulados y un factor de seguridad de 2. $E = 29 \times 10^3$ ksi.

16-17. Seleccione tubos estándar de acero para los miembros AC y AD mostrados en la figura para soportar una carga vertical $F = 4.75$ k con un factor de 2.5 respecto a la carga de pandeo de Euler. Desprecie el peso de los miembros. $E = 29 \times 10^3$ ksi.

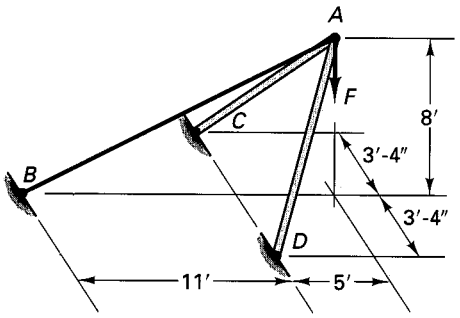


Fig. P16-17

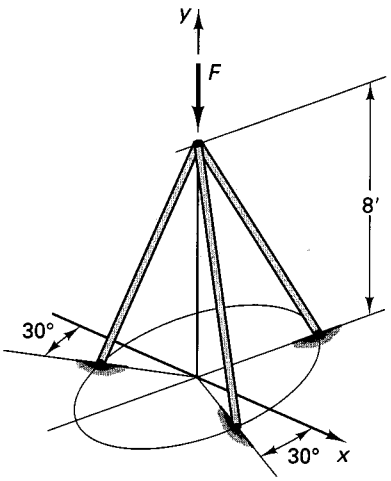


Fig. P16-18

16-18. Un tripié va a ser fabricado con ángulos de acero de 3 × 3 in, cada uno de 10 ft de longitud, para soportar una carga vertical $F = 8$ k en el centro, como se muestra en la figura. Usando la fórmula de pandeo de Euler con un factor de seguridad de 3 para tomar en cuenta el impacto, determine el espesor requerido de los ángulos. Desprecie el peso de los ángulos; suponga que éstos estarán cargados axialmente y que sus extremos estarán articulados. $E = 30 \times 10^6$ psi.

16-19. Una viga simple de rigidez EI_b está apuntalada en el centro de su claro por una barra esbelta de rigidez EI_c. Estime la deflexión de la viga en el centro si una fuerza doble de la carga de Euler para la columna es aplicada a este sistema.

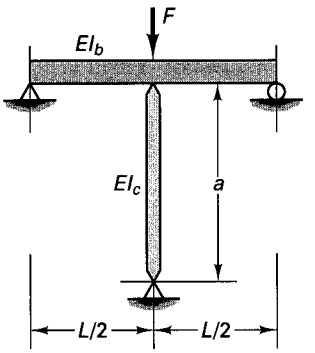


Fig. P16-19

Sección 16-6

16-20. Obtenga la ecuación 16-17a usando la ecuación 16-5 en la forma $EIv'' + Pv = M_o$, donde M_o es el momento en el extremo.

16-21. Obtenga la ecuación 16-17b usando la ecuación 16-5 en la forma $EIv'' + P(\delta - v)$, donde δ es la deflexión en el extremo.

16-22. Determine la carga crítica de pandeo para la columna mostrada en la figura. (*Sugerencia*: Véase el problema precedente; considere las condiciones de continuidad donde cambia *EI*.)

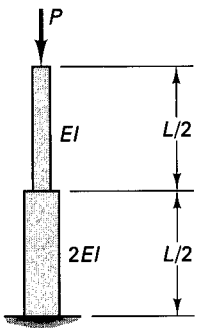


Fig. P16-22

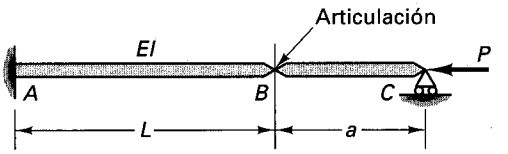


Fig. P16-23

16-23. Determine la ecuación trascendente para encontrar la carga crítica de pandeo para la barra *AB* de *EI* constante debido a la aplicación de la fuerza axial *P* a través del eslabón rígido *BC*. (*Sugerencia*: En una posición deflexionada, note la presencia de una fuerza cortante en *B*.)

16-24. La carga axial permisible para una columna de 4 m de longitud, articulada en sus extremos y hecha de un cierto material elástico lineal es de 20 kN. Cinco columnas diferentes hechas del mismo material y con la misma sección transversal tienen las condiciones de soporte mostradas en la figura. Usando la capacidad de la columna de 4 m como criterio, ¿cuáles son las cargas permisibles para las cinco columnas mostradas?

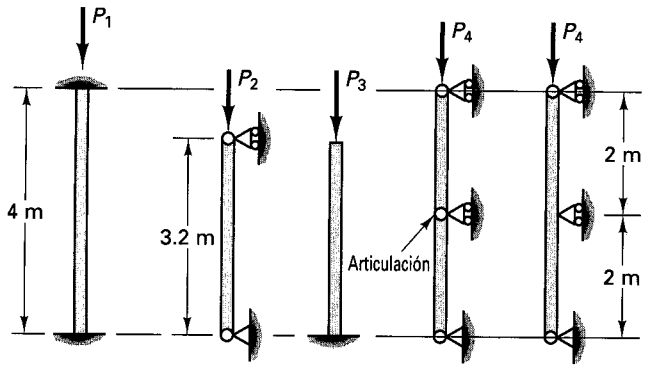


Fig. P16-24

16-25. Considere las cinco columnas con diferentes condiciones de frontera en el problema 16-24. Las cinco columnas están hechas con el mismo material elástico lineal. Usando la fórmula de Euler para diferentes condiciones de frontera, determine las longitudes de las columnas para que tomen la misma carga que la columna de 4 m con extremos empotrados.

16-26. Una parte de máquina de acero va a construirse como se muestra en la figura. El miembro a compresión AB está dispuesto de manera que puede pandearse como columna doblemente articulada en el plano ABC, pero como una columna doblemente empotrada en la dirección perpendicular a este plano. (a) Si el espesor del miembro es de $\frac{1}{2}$ in, ¿cuál debe ser su altura h para tener igual probabilidad de pandearse en las dos direcciones mutuamente perpendiculares? Si $E = 28 \times 10^6$ psi y el factor de seguridad por inestabilidad es de 2, ¿qué fuerza F puede aplicarse al miembro? Suponga que la barra diseñada en (a) controla la capacidad del conjunto.

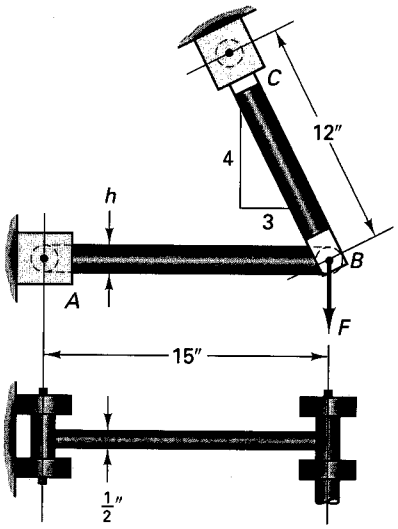


Fig. P16-26

16-27. Una pieza de equipo mecánico va a ser soportada en la parte superior de un tubo estándar de acero de diámetro nominal de 127 mm, como se muestra en la figura. La masa del equipo y de la plataforma soportante es de 2500 kg. La base del tubo estará anclada en una zapata de concreto y su extremo superior no estará soportado. Si el factor de seguridad requerido contra pandeo es de 2.5, ¿cuál es la altura máxima de la columna en que puede soportarse el equipo? $E = 200$ GPa. (*Nota*: La solución se vuelve inexacta si la altura de la masa rígida es considerable respecto a la altura de la columna.)

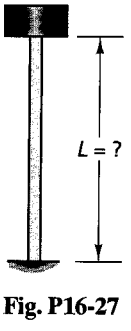


Fig. P16-27

Secciones 16-6 a la 16-8

16-28. Encuentre las longitudes más cortas para columnas con extremos articulados tales que sea aplicable la fórmula de pandeo elástico de Euler. Considere tres casos diferentes: (a) un puntal de madera de 2×4 in de tamaño nominal (véase la Tabla 9 del apéndice) con $E = 1.8 \times 10^6$ psi y esfuerzo máximo de compresión = 1500 psi, (b) una flecha maciza de aleación de aluminio de 50 mm de diámetro con $E = 70$ GPa y $\sigma_{yp} = 360$ MPa, y un perfil W14 $\times$ 193 (véase la Tabla 4A del apéndice) con $E = 29 \times 10^3$ ksi y $\sigma_{yp} = 36$ ksi.

16-29. Dos grados de acero son de uso común para columnas de edificios: acero A36 con $\sigma_{yp} = 36$ ksi y acero A572 con $\sigma_{yp} = 50$ ksi. Para cada acero, determine las relaciones de esbeltez más pequeñas para las cuales es aplicable la fórmula de Euler para pandeo elástico cuando la columna está articulada en ambos extremos y cuando está empotrada en ambos extremos.

16-30. La curva esfuerzo-deformación unitaria en tensión simple para una aleación de aluminio se muestra en la figura, donde, por conveniencia, $\varepsilon \times 10^3 = e$. La aleación es linealmente elástica para esfuerzos de hasta 280 MPa; el esfuerzo último es de 350 MPa. (a) Idealice la relación esfuerzo-deformación unitaria ajustando una parábola a la curva tal que σ y $d\sigma/de = E_t$ sean continuos en el límite proporcional y que la línea de $\sigma = 350$ MPa sea tangente a la parábola. (b) Grafique $E_t(\sigma)/E$ *versus* $\sigma/\sigma_{últ}$, donde E es el módulo elástico, $\sigma_{últ}$ es el esfuerzo último y E_t es el módulo tangente en el esfuerzo σ. (c) Dibuje en una gráfica σ_{cr} *versus* L/r para columnas doblemente empotradas y doblemente articuladas, donde σ_{cr} se basa en el E_t.

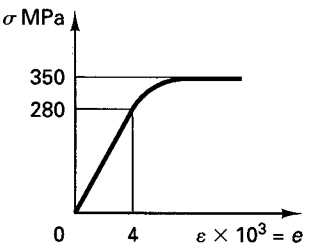


Fig. P16-30

16-31. Para algunos materiales, la relación esfuerzo-deformación unitaria en forma normalizada puede expresarse[1] como $\sigma = 1 - \exp(-c\varepsilon)$, donde c es una constante arbitraria. Haciendo $c = 500$, grafique el diagrama esfuerzo-deformación unitaria para ϵ de 0 a 0.01 y la relación normalizada esfuerzo *versus* relación de esbeltez L_e/r de 0 a 200. [*Nota*: $\exp(x) = e^x$.]

16-32. Usando la ecuación 16-24, obtenga el esfuerzo promedio P/A para $L/r = 0$ y 75. Suponga $ec/r^2 = 0.05$.

Sección 16-9

16-33. Un tubo de acero de alta resistencia de pared delgada de 1250 mm de longitud está cargado como se muestra en la figura 16-25. La fuerza axial $P = 25$ kN y la fuerza transversal $F = 500$ N. El diámetro exterior del tubo es de 37 mm y el área de su sección transversal es de 223 mm^2. Para este tubo, $I = 34.2 \times 10^3$ mm^4 y $E = 200$ GPa. (a) Determine la deflexión y el momento flexionante máximos usando las ecuaciones 16-33 y 16-34. (b) Compare los resultados en (a) con los resultados que se obtienen usando las ecuaciones aproximadas 16-41 y 16-42. (c) Calcule los esfuerzos combinados debido a la fuerza axial y al momento flexionante máximo. Desprecie las concentraciones locales de esfuerzos.

16-34. Demuestre que para una viga-columna cargada por un momento extremo M_B, como se muestra en la figura, la deflexión es

$$v = \frac{M_B \operatorname{sen} \lambda x}{p \operatorname{sen} \lambda L} - \frac{M_B x}{PL}$$

y el momento flexionante es

$$M = -\frac{M_B \operatorname{sen} \lambda x}{\operatorname{sen} \lambda L}$$

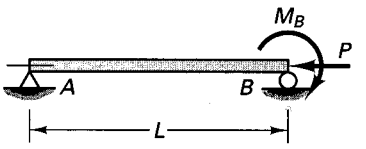


Fig. P16-34

[1]Cortesía de F. C. Filippou.

16-35. Considere el tubo de pared delgada con las propiedades mecánicas dadas en el problema 16-33, sometido a un momento extremo $M_o = 250$ N·m y a una fuerza axial $P = 30$ kN, como se muestra en la figura. (a) Determine la deflexión máxima y luego el momento flexionante máximo usando un método aproximado. Use la Tabla 10 del apéndice para la deflexión de una viga debida a un momento extremo. (b) Compare los resultados en (a) con aquellos obtenidos usando las expresiones exactas del ejemplo precedente. Note que el momento máximo ocurre en $dM/dx = 0$. (c) Calcule los esfuerzos máximos en el claro debido a la fuerza axial y a la flexión.

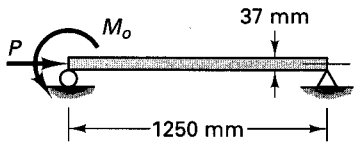


Fig. P16-35

16-36. Si una barra elástica es inicialmente curva tal como se muestra en la figura, demuestre que su deflexión total está dada por

$$v = v_o + v_1 = \left(\frac{1}{1 - P/P_{cr}}\right) a \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

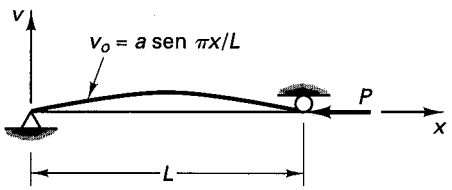


Fig. P16-36

Sección 16-10

16-37. Demuestre que como el carácter de las ecuaciones 16-45 y 16-46 cambia si es aplicada, en vez de una fuerza axial de compresión, una fuerza de tensión, la solución homogénea de la ecuación diferencial para la deflexión es

$$v = C_1 \operatorname{senh} \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + C_3 x + C_4$$

donde las constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 son determinadas de las condiciones de frontera.

16-38. Demuestre que si, en el ejemplo 16-3, la fuerza axial P es de tensión, la deflexión está dada por

$$v = \frac{F}{2P\lambda} \operatorname{sech} \frac{\lambda L}{2} \operatorname{senh} \lambda x - \frac{Fx}{2P}$$

16-39. Verifique la ecuación 16-48 superponiendo las deflexiones debidas a los momentos aplicados en cada extremo usando la expresión para la deflexión encontrada en el problema 16-34. Este caso especial demuestra que las soluciones para la deflexiones de vigas-columnas pueden encontrarse por superposición para miembros idénticos sometidos a la *misma* fuerza axial.

16-40. Demuestre que la ecuación de la curva elástica para una viga-columna elástica de *EI* constante sometida a una carga senoidal, como la mostrada en la figura, es

$$v = \frac{1}{1 - P/P_{cr}} \frac{q_o L^4}{\pi^4 EI} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L}$$

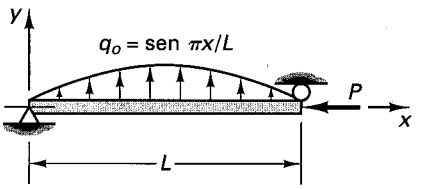


Fig. P16-40

16-41. Usando la ecuación 16-45, demuestre que la ecuación para el momento flexionante para una viga-columna elástica sometida a una carga variable uniformemente creciente hacia la derecha está dada por

$$M = -\frac{q_o \operatorname{sen} \lambda x}{\lambda^2 \operatorname{sen} \lambda L}$$

donde $q = q_o x/L$.

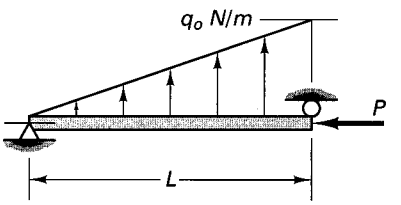


Fig. P16-41

16-42. (a) Usando la ecuación 16-45, demuestre que la ecuación para el momento flexionante para una viga-columna elástica cargada uniformemente está dada por

$$M = -\frac{q_o}{\lambda^2}\left(\frac{\cos \lambda L - 1}{\operatorname{sen} \lambda L} \operatorname{sen} \lambda x - \cos \lambda x + 1\right)$$

(b) ¿Cómo puede encontrarse fácilmente la ecuación de la curva elástica a partir del resultado anterior? (*Sugerencia*: Véase la ecuación 16-50.)

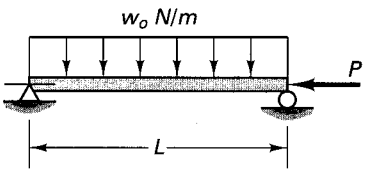


Fig. P16-42

16-43. Resuelva el ejemplo 16-4 usando la ecuación 16-45 y demuestre que para $P = 0$, la ecuación 16-49 se reduce a $v_{máx} = M_o L^2/8EI$.

16-44. Usando la ecuación 16-55, obtenga de nuevo la ecuación 16-16.

16-45. Usando la ecuación homogénea 16-45, determine la carga crítica de pandeo para la columna de rigidez variable mostrada en la figura. (*Sugerencia*: Fuerce la condición de continuidad en donde cambia la *EI*.)

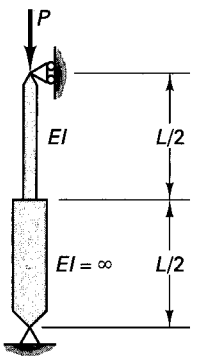


Fig. P16-45

16-46. Una barra articulada en sus extremos de *EI* constante está soportada a lo largo de su longitud por una cimentación elástica, como se muestra en la figura. El módulo de la cimentación es k lb/in^2 y es tal que cuando la barra se deflexiona una cantidad v, una fuerza restitutiva kv lb/in es ejercida por la cimentación normalmente a la barra. Primero, compruebe que la ecuación diferencial homogénea que gobierna en este problema es

$$EIv^{iv} + Pv'' + kv = 0$$

Luego demuestre que el valor propio requerido de la ecuación diferencial es

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\left[n^2 + \frac{1}{n^2}\left(\frac{kL^4}{\pi^4 EI}\right)\right]$$

Note que si $k = 0$, el valor mínimo de P_{cr} es el dado por la carga de pandeo clásica de Euler.

Fig. P16-46

Secciones 16-11 y 16-12

16-47. (a) Si una flecha circular maciza articulada en sus extremos tiene 1.5 m de longitud y un diámetro de 50 mm, ¿cuál es la relación de esbeltez de ella? (b) Si la misma cantidad de material que en (a) se reforma en una barra cuadrada de la misma longitud, ¿cuál es la relación de esbeltez de la barra.?

16-48. La sección transversal de un miembro a compresión para un pequeño puente está hecha como se muestra en la figura 16-28(a). La cubreplaca superior es de $\frac{1}{2} \times 18$ in y los dos canales C12 × 20.7 están colocados a 10 in espalda con espalda. Si el miembro tiene 20 ft de longitud, ¿cuál es su relación de esbeltez? (Compruebe L/r en dos direcciones.)

16-49. Considere dos columnas cargadas axialmente hechas con perfiles W10 × 112 de acero grado 50 con $\sigma_{yp} = 50$ ksi. Una de las columnas tiene 12 ft de longitud y la otra tiene 40 ft. Ambas columnas están arriostradas en sus extremos articulados. Usando el ASD del AISC, determine las cargas permisibles de esas columnas.

16-50. Una columna W14 × 193 de acero de grado 50 ($\sigma_{yp} = 50$ ksi) está lateralmente arriostrada a cada 12 ft en la dirección débil de pandeo y a 24 ft en la dirección fuerte, como se muestra en la figura. (a) Determine la carga axial permisible para esta columna según el ASD del AISC. (b) ¿Es éste un diseño bien balanceado?

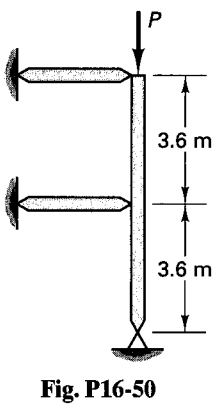


Fig. P16-50

16-51. Un tubo estándar de acero de diámetro nominal de 12 in (véase la Tabla 7 del apéndice) soporta un tanque de agua, como se muestra en la figura. Suponiendo que la longitud efectiva de la columna es de 30 ft, ¿qué peso de agua puede soportar de acuerdo con el ASD del AISC? Considere $\sigma_{cr} = 50$ ksi. (*Nota*: En un diseño completo debe también considerarse la carga del viento.)

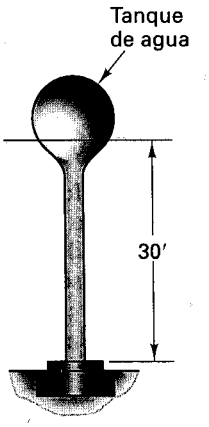


Fig. P16-51

16-52. Para acero grado 50, $\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^3$ ksi. (a) Determine la relación L_e/r para el punto de transición entre las ecuaciones 16-56 y 16-57 para las fórmulas ASD del AISC. [Esas fórmulas se establecen usando el concepto mostrado en la figura 16-31.] (b) Demuestre que la ecuación 16-58 del LRFD del AISC se reduce a $L_e/r = 75.66\lambda_c$, y luego determine la relación L_e/r para el punto de transición entre las ecuaciones 16-59 y 16-60.

16-53. (a) Usando el método LRFD del AISC, determine las resistencias nominales de columna axial (cargas factorizadas) $P_n = \phi_c A\sigma_{cr}$, donde A es el área de la sección transversal para las dos columnas del problema 16-49. (b) Determine las relaciones entre las cargas axiales factorizadas y las permisibles para las correspondientes columnas en el problema 16-49. Tales cargas axiales permisibles son de 593 k y de 153 k, respectivamente, para las columnas corta y larga.

16-54. Usando las fórmulas LRFD del AISC, resuelva el problema 16-50 y establezca la relación entre las cargas axiales factorizadas y las permisibles.

16-55. Usando las fórmulas LRFD del AISC, resuelva el problema 16-51.

16-56. Dos canales C10 × 15.3 de acero de grado 50 forman un miembro a compresión cuadrado de 24 ft de longitud; los patines de los canales no se tocan pero están adecuadamente unidos entre sí por medio de celosía. Usando las fórmulas del ASD del AISC, ¿cuál es la fuerza axial permisible en este miembro? $\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^3$ ksi.

16-57. Un miembro a compresión formado de dos canales C8 × 11.5 de acero grado 50 tiene la forma mostrada en la figura 16-28(b). (a) Determine la distancia entre los canales espalda con espalda de manera que los momentos de inercia para la sección respecto a los dos ejes principales sean iguales. (b) Si el miembro tiene 32 ft de longitud, ¿cuál es la resistencia a compresión nominal axial del miembro de acuerdo con las especificaciones LRFD del AISC? $\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^3$ ksi.

16-58. Una pluma de una máquina excavadora está hecha con cuatro ángulos de acero de $2\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ in, como se muestra en la figura 16-28(c). La dimensión de extremo a extremo de la columna cuadrada, excluyendo las barras de celosía, es de 14 in. De acuerdo con las fórmulas ASD del AISC, ¿qué fuerza axial puede aplicarse a este miembro si tiene 52 ft de longitud? $\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^3$ ksi.

16-59. Una cuerda a compresión de una pequeña armadura consiste en dos ángulos de acero de $4 \times 4 \times \frac{3}{8}$ in arreglados como se muestra en la figura 16-28(d). Los lados verticales de los ángulos están separados por separadores una distancia de $\frac{1}{2}$ in. Si la longitud de este miembro entre puntos arriostrados es de 8 ft, ¿qué carga axial puede aplicársele de acuerdo con el ASD del AISC? $\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^3$ ksi.

16-60. Usando las fórmulas de la Aluminum Association, determine las cargas axiales permisibles para dos columnas articuladas en sus extremos de 8 in × 8 in × 10.72 lb/ft de aleación de aluminio 6061-T6 que tienen 10 y 30 ft de longitud. Para las propiedades de las secciones transversales de las columnas, use la Tabla 4 del apéndice para la sección de acero W8 × 31.

16-61. Usando las fórmulas NFPA, determine las cargas axiales permisibles para tres columnas de pino Douglas de 6 × 6 in de longitudes diferentes: 5, 12 y 20 ft. Cada columna está arriostrada en ambos extremos y $F_c = 1000$ psi y $E = 1.6 \times 10^6$ psi.

Secciones 16-13 y 16-14

16-62. Una plataforma de observación de 6 ft de diámetro está unida a la parte superior de un tubo estándar de 6 in de diámetro y 20 ft de longitud y en la parte inferior está soportada por una zapata. ¿Qué peso, incluyendo una persona o personas pueden situarse sobre la plataforma, si la resistencia del tubo gobierna el resultado? Localice la carga viva a 3 ft del eje del tubo. Desprecie el peso de la construcción. Use la ecuación 16-68, con el esfuerzo permisible dado por la fórmula de Euler con F.S. = 3. $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_{yp} = 50$ ksi.

16-63. Una columna W10 × 60 de 20 ft de longitud está sometida a una carga excéntrica de 180 k localizada como se muestra en la figura. Usando la fórmula de interacción del método ASD del AISC, determine si esta columna es adecuada. Use acero grado 50 y los mismos esfuerzos permisibles que en el ejemplo 16-11.

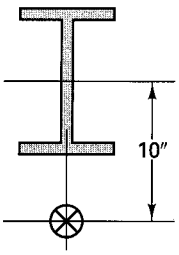


Fig. P16-63

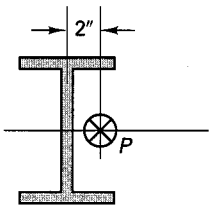


Fig. P16-64

16-64. Una columna W14 × 90 de acero grado 50 ($\sigma_{yp} = 50$ ksi) tiene 20 ft de longitud y está cargada excéntricamente como se muestra en la figura. Determine la carga P permisible usando las fórmulas del método ASD del AISC. Considere condiciones de extremos articulados. Sea $F_b = 37$ ksi.

16-65. Una columna W10 × 60 tiene una longitud efectiva de 20 ft. Usando las fórmulas del ASD del AISC, determine la magnitud de la carga excéntrica que puede aplicarse a esta columna en A, como se muestra en la figura, además de una carga concéntrica de 20 k. La columna está arriostrada arriba y en su base. El esfuerzo de flexión permisible es $F_b = 24$ ksi. Use acero grado 50.

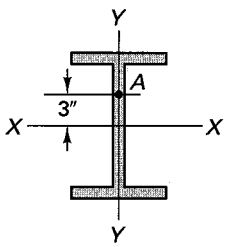


Fig. P16-65

16-66. ¿Cuál es la magnitud de la máxima reacción de viga que puede soportar una columna W10 × 49 de 14 ft de longitud efectiva, de acuerdo con la fórmula de interacción del ASD del AISC? Suponga que la viga entrega la reacción en el patín exterior de la columna, como se muestra en la figura y que es concéntrica con el alma de la columna. Las partes superior e inferior de la columna están soportadas lateralmente. Considere $F_y = 50$ ksi y $F_b = 30$ ksi.

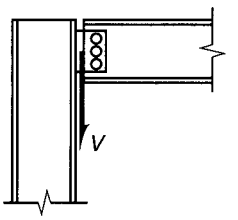


Fig. P16-66

16-67. Usando el código ASD del AISC, seleccione un perfil W para una columna que debe soportar una carga axial de 60 k y una carga excéntrica de 25 k aplicada sobre el eje *Y-Y* a una distancia de 6 in del eje *X-X*. La columna está soportada lateralmente arriba y abajo y tiene 14 ft de longitud. El esfuerzo de flexión permisible es de 30 ksi y $\sigma_{yp} = 50$ ksi.

16-68. Una viga rectangular estrecha, como la mostrada en la figura, puede fallar bajo carga por inestabilidad lateral debido a torsión y desplazarse lateralmente. Puede demostrarse[2] que para este caso, la carga crítica que puede aplicarse en el extremo es

$$P_{cr} = 4.013\sqrt{B_1 C}/L^2$$

donde $B_1 = hb^3E/12$ es la rigidez por flexión de la viga respecto a su eje vertical y $C = \beta hb^3G$ es la rigidez torsionante. (Para secciones rectangulares, el coeficiente β está dado en una tabla en la sección 6-14.)

Una viga en voladizo rectangular estrecha de $5 \times \frac{1}{2}$ in está hecha de acero ($\sigma_{yp} = 50$ ksi y $E = 30 \times 10^3$ ksi) y está cargada como se muestra en la figura. (a) Determine la carga crítica P_{cr} y la longitud crítica L_{cr}, para las que los criterios de resistencia y estabilidad son igualmente aplicables. (b) Grafique *P versus L* en la vecindad de P_{cr} y L_{cr} para los dos criterios. (Note que el menor de los valores de *P* gobierna el diseño.)

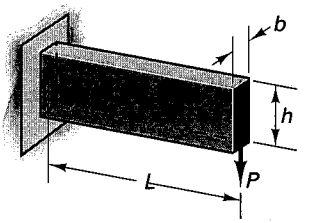


Fig. P16-68

[2]Véase S. P. Timoshenko y J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability* (*Teoría de la estabilidad elástica*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1961.

17

Energía y trabajo virtual

17-1. Introducción

En algunos cuantos casos en los capítulos anteriores, la deflexión de miembros se obtuvo usando la ley de conservación de la energía, es decir, igualando la energía de deformación interna al trabajo externo. Este enfoque lagrangiano de emplear *funciones escalares* puede ser ampliado y obtenerse algunos de los procedimientos más efectivos para el análisis de cuerpos deformables. En la parte A, el concepto antes visto de la energía de deformación elástica se analiza desde un punto de vista algo más general. A esto sigue un enunciado especializado de la ley de conservación de la energía para cuerpos deformables y se indica por qué es necesario desarrollar métodos adicionales basados en los conceptos de trabajo y energía para resolver problemas de deflexiones.

La parte B sirve como introducción a los dos métodos de trabajo virtual para cuerpos deformables. Uno de ellos, el método de las *fuerzas virtuales*, es muy útil para determinar las deflexiones causadas por cualquier tipo de deformación y no está limitado al comportamiento elástico. Este método es uno de los mejores para calcular deflexiones de miembros. El método conjugado de los *desplazamientos virtuales*, de la mayor importancia en el análisis matri-

cial de estructuras y en el método del elemento finito, será también analizado. La dualidad de esos dos métodos es ilustrada considerando sistemas estructurales discretos.

Parte A ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA Y TRABAJO EXTERNO

17-2. Energía de deformación elástica

Consideremos un estado general de esfuerzo actuando sobre un elemento cúbico con todas sus aristas de longitud unitaria. Este elemento, similar al de la figura 1-3(a), se muestra en la figura 17-1. Las fuerzas que actúan sobre las superficies de este elemento son numéricamente iguales a los esfuerzos y los desplazamientos son numéricamente iguales a los desplazamientos debidos al cortante [véase la figura 5-6(b)] o debidos a esfuerzos normales (véase la figura 5-10). Por tanto, una aplicación gradual (creciente) de las fuerzas (esfuerzos) aplicadas actuando a través de sus desplazamientos (deformaciones unitarias) respectivos, efectúan *trabajo* igual a la mitad del producto de las cantidades correspondientes. Considerando el concepto de conservación de la energía, la *densidad de la energía de deformación elástica* U_o almacenada por volumen unitario puede expresarse como

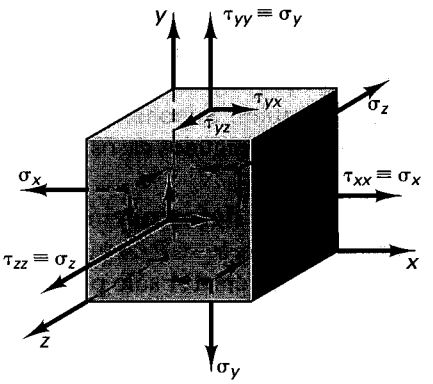


Fig. 17-1 Cubo unitario con varios esfuerzos uniformes sobre cada una de sus caras.

$$U_o = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} \quad (17\text{-}1)$$

Según esto, la expresión general para la energía de deformación *interna* total en un cuerpo *elástico lineal* es

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})\,dx\,dy\,dz \quad (17\text{-}2)$$

La integración se extiende sobre el volumen de un cuerpo. Tal expresión general se usa en la teoría de la elasticidad. En la mecánica de sólidos se considera una clase de problemas menos generales y la ecuación 17-2 se simplifica. La expresión

$$U = \frac{1}{2}\iiint_V (\sigma_x\varepsilon_x + \tau_{xy}\gamma_{xy})\,dx\,dy\,dz \quad (17\text{-}3)$$

es suficiente para determinar la energía de deformación en barras cargadas axialmente, así como en vigas sometidas a flexión y cortante. Además, el último término de la ecuación 17-3 escrito en las coordenadas apropiadas es todo lo que se necesita en el problema de torsión de una flecha circular y

de tubos de pared delgada. Esos casos incluyen los principales tipos de problemas tratados en este texto.

Para material elástico lineal, en esfuerzo uniaxial, $\varepsilon_x = \sigma_x/E$, y en cortante puro, $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$. La ecuación 17-3 puede entonces reescribirse en la forma:

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dx\,dy\,dz}_{\text{para carga axial y flexión de vigas;}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G}\,dx\,dy\,dz}_{\text{para cortante en vigas}} \qquad (17\text{-}4)$$

o

$$U = \iiint_V \frac{E\varepsilon_x^2}{2}\,dx\,dy\,dz + \iiint_V \frac{G\gamma_{xy}^2}{2}\,dx\,dy\,dz \qquad (17\text{-}5)$$

Esas ecuaciones pueden especializarse para las soluciones encontradas en la mecánica de sólidos, donde es usual trabajar con las resultantes de esfuerzos P, V, M y T. De esta manera, las integrales triples se reducen a integrales simples. Suponiendo que E y G son constantes, se presentan a continuación algunos casos especiales de las dos últimas ecuaciones.

Energía de deformación para barras cargadas axialmente En este problema, $\sigma_x = P/A$ y $A = \iint dy\,dz$. Por tanto, como la fuerza axial P y el área transversal A sólo pueden ser funciones de x,

$$\boxed{U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \int_L \frac{P^2}{2AE}\,dx} \qquad (17\text{-}6)$$

donde una integración a lo largo de la longitud L de la barra da la cantidad requerida.

Si P, A y E son constantes, y, como para tales casos, por la ecuación 3-4, el alargamiento de la barra es $\Delta = PL/AE$, se tiene alternativamente,

$$\boxed{U = \frac{P^2L}{2AE} = \frac{AE\Delta^2}{2L}} \qquad (17\text{-}7)$$

Energía de deformación para vigas en flexión De acuerdo con la ecuación 8-24, la energía de deformación elástica en flexión pura de una viga respecto a uno de sus ejes principales se reduce a una integral a lo largo de la longitud L de la viga; es decir,

$$\boxed{U = \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E}\,dV = \int_L \frac{M^2}{2EI}\,dx} \qquad (17\text{-}8)$$

donde M es el momento flexionante e I es el momento de inercia de la sección transversal.

Energía de deformación para vigas en cortante La expresión dada por la ecuación 14-34 para una viga rectangular sometida a un cortante constante puede generalizarse usando el último término en la ecuación 17-4 y se obtiene entonces

$$U = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dx\,dy\,dz = \alpha \int_L \frac{V^2}{2GA}\,dx \tag{17-9a}$$

donde el factor α depende del área transversal de una viga y se vió en el ejemplo 14-12 que es igual a 6/5 para una viga rectangular.[1] En esta ecuación, tanto la fuerza cortante V como el área A pueden variar a lo largo del claro de longitud L.

Energía de deformación para tubos circulares en torsión Para este caso, la expresión básica para la energía de deformación unitaria cortante es análoga al último término de la ecuación 17-4. Una expresión tal ha sido usada previamente en el ejemplo 6-11. Sustituyendo $\tau = T\rho/I_p$, ecuación 6-4, después de algunas simplificaciones, se obtiene

$$U = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G}\,dV = \int_L \frac{T^2}{2GI_p}\,dx \tag{17-9b}$$

17-3. Desplazamiento por conservación de la energía

La ley de conservación de la energía, que establece que la energía no puede ser creada ni destruida, puede adoptarse para determinar los desplazamientos de sistemas elásticos debido a las fuerzas aplicadas. La primera ley de la termodinámica expresa este principio como

$$\text{trabajo hecho} = \text{cambio en energía} \tag{17-10}$$

Para un proceso adiabático[2] y cuando no se genera calor en el sistema, con las fuerzas aplicadas de manera casi estática,[3] la forma especial de esta ley para sistemas conservativos[4] se reduce a

$$W_e = U \tag{17-11}$$

[1]Para una sección transversal circular, $\alpha = 10/9$, y para vigas I y secciones en caja, $\alpha = 1$, siempre que sólo el área del alma A_{alma} se use en la ecuación 17-9a.

[2]Ningún calor se agrega o sustrae del sistema.

[3]Esas fuerzas son aplicadas al cuerpo tan lentamente que la energía cinética puede despreciarse.

[4]En un sistema conservativo no hay fuerzas disipativas como las debidas a la fricción. Más generalmente, en un sistema conservativo no se efectúa ningún trabajo al mover el sistema alrededor de cualquier trayectoria cerrada.

donde W_e es el trabajo total hecho por las fuerzas externamente aplicadas durante el proceso de carga y U es la energía de deformación total almacenada en el sistema.

Es importante notar que el trabajo total W debe ser cero, y

$$W = W_e + W_i = 0 \tag{17-12}$$

donde W_e es el trabajo externo y W_i es el trabajo interno. Por tanto, de las ecuaciones 17-11 y 17-12, se tiene

$$U = -W_i \tag{17-13}$$

donde W_i tiene un signo negativo debido a que las deformaciones son opuestas por las fuerzas internas. (Véase el análisis en conexión con la figura 17-2.)

En la sección anterior fueron dadas algunas formulaciones para determinar la energía U de deformación elástica interna. Para sistemas elásticos lineales, cuando una fuerza o un par son gradualmente aplicados, el trabajo externo W_e es igual a un medio de la fuerza total multiplicada por el desplazamiento en la dirección de su acción. La posibilidad de formular W_e y U proporciona la base para aplicar la ecuación 17-11 para determinar desplazamientos.

Este procedimiento fue usado en el ejemplo 3-9 para encontrar la deflexión de una barra cargada axialmente y también en el ejemplo 6-11 para determinar el giro de una flecha circular. Una relación general, ecuación 6-37, fue deducida usando este procedimiento para el giro de un miembro hueco de pared delgada sometido a un par de torsión. Finalmente, este método fue aplicado en el ejemplo 14-12 para encontrar la deflexión causada por flexión y cortante en un voladizo cargado por una fuerza concentrada en el extremo libre. En todos esos casos, el procedimiento se limitó a la determinación de deflexiones elásticas causadas por una sola fuerza concentrada en el punto de su aplicación. De otra manera se obtienen ecuaciones difíciles de tratar. Por ejemplo, para dos fuerzas P_1 y P_2, $P_1 \Delta_1/2 + P_2 \Delta_2/2 = U$, donde Δ_1 y Δ_2 son, respectivamente, las deflexiones desconocidas de las dos fuerzas. No se dispone de una relación adicional entre Δ_1 y Δ_2, excepto en casos de simetría. Esto requiere el desarrollo de métodos más generales que se verán en el resto de este capítulo.

Parte B MÉTODOS DE TRABAJO VIRTUAL

17-4. Principio del trabajo virtual

El uso directo del trabajo externo y de la energía de deformación interna para determinar deflexiones falla si varias deflexiones y/o rotaciones son buscadas en puntos diferentes en un cuerpo deformado sometido a una o más fuerzas. Sin embargo, es posible recurrir a medios extraordinariamente efectivos para resolver tales problemas reemplazando el trabajo real y la

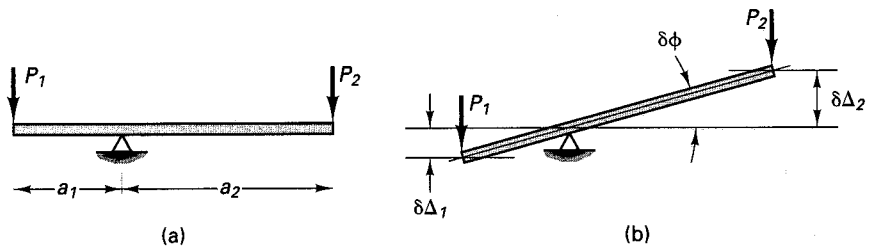


Fig. 17-2 Medios alternativos para determinar el equilibrio estático.

energía de deformación por trabajo externo y trabajo virtual (imaginario) interno. Se describirán dos procedimientos diferentes para aplicar el principio del trabajo virtual que son el método del desplazamiento virtual y el método de la fuerza virtual.

Método del desplazamiento virtual La solución convencional de los problemas de equilibrio estático sigue usualmente los conceptos introducidos por Arquímedes en sus estudios sobre palancas. Según esto, las fuerzas que se muestran en la figura 17-2(a) están relacionadas por

$$P_1 a_1 = P_2 a_2 \tag{17-14}$$

Un método alternativo[5] consiste en girar la palanca a través de un *ángulo imaginario* o *virtual* $\delta\phi$. Aquí, como en el resto del texto, todas las cantidades virtuales son expresadas, por énfasis, por $\delta\phi$ en vez de $d\phi$ que se emplea en la notación diferencial usual. La rotación mostrada causa *desplazamientos virtuales* $\delta\Delta_1$ y $\delta\Delta_2$ en los puntos de aplicación de las cargas. Luego, suponiendo que el sistema es conservativo, el *trabajo virtual* δW hecho por fuerzas reales moviéndose a través de desplazamientos virtuales en el sentido de las fuerzas aplicadas es cero. Tal trabajo es positivo cuando coinciden los sentidos de las fuerzas y de los desplazamientos. Aplicando este principio a la barra rígida mostrada en la figura 17-2(b).

$$\delta W = P_1 \delta\Delta_1 - P_2 \delta\Delta_2 = 0 \tag{17-15}$$

Sin embargo, como $\delta\Delta_1 = a_1 \delta\phi$ y $\delta\Delta_2 = a_2 \delta\phi$, y P_1 y P_2 *no cambian* durante la aplicación de $\delta\phi$,

$$(P_1 a_1 - P_2 a_2)\delta\phi = 0 \tag{17-16}$$

Como $\delta\phi$ es *perfectamente arbitrario*, sin relación con las fuerzas aplicadas, la expresión en paréntesis debe ser cero, tal como en la ecuación 17-14. Dicho de otra manera, para un sistema en equilibrio, la ecuación del desplazamiento virtual conduce simplemente a una *ecuación de estática* multiplicada por una función arbitraria $\delta\phi$.

Para cuerpos deformables, la ecuación del desplazamiento virtual debe ser generalizada. Para tales sistemas, el trabajo total virtual δW, que consis-

[5]Este enfoque aparentemente fue considerado por Leonardo da Vinci (1452–1519), Stevinus (1548–1620), Galileo (1564–1642) y Johann Bernoulli, quien en 1717 introdujo la noción de los desplazamientos (velocidades) virtuales en su carta a Varignon.

te en el trabajo virtual externo δW_e y el trabajo virtual interno δW_i, es cero. En forma de ecuación,

$$\delta W = \delta W_e + \delta W_i = 0 \tag{17-17}$$

Esta ecuación puede interpretarse haciendo referencia a la figura 17-3, donde un resorte sin peso soporta una masa rígida. Esta masa aplica una fuerza P al resorte y *el sistema está en equilibrio*. Se impone luego al sistema un *desplazamiento virtual* $\delta\Delta$, como se muestra en la figura 17-3(a). Durante este desplazamiento la fuerza P y las fuerzas internas F, mostradas en partes aisladas en la figura 17-3(b), *permanecen constantes*.

Como puede verse en la masa aislada en la figura 17-3(b), el trabajo virtual *externo* δW_e hecho por la fuerza P es $P\,\delta\Delta$. Por otra parte, el trabajo virtual *interno* δW_i, hecho por F es $-F\,\delta\Delta$. Por tanto, este trabajo virtual interno es negativo.

Sin embargo, puede notarse que el trabajo hecho por F al actuar sobre el resorte, mostrado en el diagrama superior de la figura 17-3(b), tiene signo opuesto. Por tanto, llamando δW_{ie} a este trabajo virtual *interno* causado por la fuerza *externa*, se infiere que

$$\delta W_i = -\delta W_{ie} \tag{17-18}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación 17-17,

$$\boxed{\delta W_e = \delta W_{ie}} \tag{17-19}$$

Aplicando la ecuación 17-19 al sistema simple en la figura 17-3

$$P\,\delta\Delta = F\,\delta\Delta \quad \text{o} \quad (P - F)\delta\Delta = 0$$

Esta relación es análoga a la ecuación 17-14. Aquí, $\delta\Delta$ es arbitraria, por lo que $P - F = 0$, que es una ecuación de equilibrio.

El *método del desplazamiento virtual* para sistemas deformables expresado por la ecuación 17-19 establece las *ecuaciones para equilibrio estático*.

Es esencial notar que durante un desplazamiento virtual, las magnitudes y las direcciones de las fuerzas aplicadas no cambian. Debe recalcarse que relaciones constitutivas no entran en la deducción de las ecuaciones del trabajo virtual.

Método de la fuerza virtual Para los cuerpos deformables, el trabajo virtual puede formularse de dos maneras alternativas. En el análisis previo, el trabajo virtual fue determinado multiplicando fuerzas reales por desplazamientos virtuales. Aquí, el trabajo virtual se obtiene como un producto de fuerzas virtuales y desplazamientos reales. Este enfoque conduce al *método de la fuerza virtual*. En este método tampoco se ponen restricciones en relaciones constitutivas y pueden analizarse con él problemas sobre deformaciones térmicas, asentamientos de los soportes y falta de ajuste entre miembros.

En el método de la fuerza virtual, el trabajo virtual total δW^*, que consiste en el trabajo virtual *externo* δW_e^* y en el trabajo virtual *interno* δW_i^*,

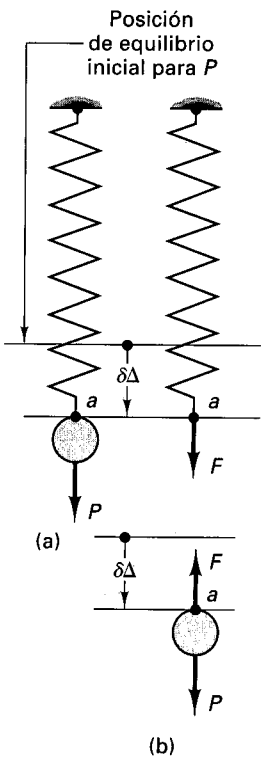


Fig. 17-3 Desplazamiento virtual en un modelo masa-resorte.

es cero. Para distinguir entre el trabajo virtual en este método y en el del método del desplazamiento virtual, las cantidades de trabajo son identificadas por asteriscos. Para este caso, análogamente a la ecuación 17-17,

$$\delta W^* = \delta W_e^* + \delta W_i^* = 0 \tag{17-20}$$

Esta ecuación puede aclararse con ayuda de la figura 17-4, donde un resorte sin peso soporta una masa rígida. Sin embargo, a diferencia del caso previo, la fuerza virtual δP se coloca primero sobre el sistema y está en equilibrio con fuerzas internas $\delta F = \delta P$, como se muestra sobre partes aisladas en la figura 17-4(b). Se permite que la deformación del sistema tenga lugar *después* de aplicada la fuerza δP. Después de esto, δP permanece *constante*.

En el paso siguiente, se permite que ocurra un *desplazamiento real* Δ donde la fuerza δP efectúa el trabajo virtual *externo*:

$$\delta W_e^* = \delta P\ \Delta$$

Durante el mismo proceso puede verse de la masa aislada en la figura 17-4(b), que el trabajo virtual *interno* δW_i^* hecho por δF es $-\delta F\Delta$. Entonces, aquí también, el trabajo virtual interno es negativo. Sin embargo, este signo puede ser cambiado considerando el trabajo virtual *interno* δW_{ie}^* causado por la fuerza *externa* $\delta P = \delta F$; es decir,

$$\delta W_i^* = -\delta W_{ie}^* \tag{17-21}$$

Por tanto, como de la ecuación 17-20,

$$\delta W_e^* = -\delta W_i^*$$

la ecuación básica del trabajo virtual para el *método de la fuerza virtual* es

$$\boxed{\delta W_e^* = \delta W_{ie}^*} \tag{17-22}$$

donde δW_e^* es el trabajo virtual *externo* y δW_{ie}^* es el trabajo virtual *interno* calculado en el sentido descrito antes.

Al aplicar la ecuación 17-22 al sistema simple de la figura 17-4, se sabe *a priori* que $\delta F = \delta P$. Entonces, como la ecuación del trabajo virtual es $\delta P\ \Delta = \delta F\ \Delta_{spr}$, $\Delta = \Delta_{spr}$, que es una *ecuación de compatibilidad*.

Es importante reconocer que sólo un elemento deformable se considera en cada uno de los sistemas simples en las figuras 17-2 y 17-3. Típicamente, hay varios elementos y los cálculos para el trabajo virtual interno deben extenderse sobre todos ellos.

Para resumir, en el método del *desplazamiento virtual*, el uso de desplazamientos cinemáticos admisibles garantiza la compatibilidad y las soluciones conducen a ecuaciones de equilibrio estático. En contraste, en el método de la *fuerza virtual*, los requisitos de estática son satisfechos suponiendo el sistema de fuerza virtual en equilibrio y las soluciones conducen a condiciones de compatibilidad para los sistemas.

Al aplicar las ecuaciones 17-19 y 17-22, los términos δW_{ie} y δW_{ie}^* se llamarán simplemente el trabajo virtual *interno*. Sin embargo, debe ser claro

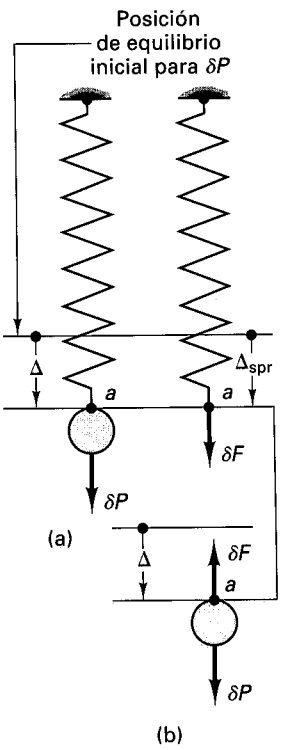


Fig. 17-4 Fuerza virtual en un modelo masa-resorte.

que esos términos son calculados de acuerdo con la definición dada en conexión con las ecuaciones 17-18 y 17-21.

En las próximas cinco secciones se da un desarrollo autocontenido de los dos métodos del trabajo virtual a un nivel introductorio. Para un tratamiento más avanzado de este importante tema se recomienda al lector consultar otros textos.[6] En este texto, las aplicaciones se limitan a deformaciones pequeñas.

17-5. Fuerzas virtuales para deflexiones

El principio del trabajo virtual puede enunciarse simplemente como

$$\boxed{\text{trabajo virtual externo} = \text{trabajo virtual interno}} \quad (17\text{-}23)$$

Para el método de la fuerza virtual, el trabajo virtual se obtiene multiplicando *fuerzas virtuales* por *desplazamientos reales*. Una implementación algebraica de esta ecuación permite calcular la deflexión (o la rotación) de cualquier punto (o elemento) sobre un cuerpo deformado. Las deformaciones pueden deberse a cualquier causa, como un cambio de temperatura, desajuste de partes o fuerzas externas que deforman un cuerpo. *El método no está limitado a la solución de problemas elásticos.* Por esta razón, este método tiene un rango excepcionalmente amplio de aplicaciones. Confinando el análisis a problemas típicos de mecánica de sólidos que implican resultantes de esfuerzos, puede duducirse fácilmente la ecuación básica de trabajo virtual, correspondiente a la ecuación general 17-23. Para este fin, considere, por ejemplo, un cuerpo como el mostrado en la figura 17-5 en el que se busca la deflexión de algún punto A en la dirección AB causada por deformación o distorsión del cuerpo. Para esto, la ecuación del trabajo virtual puede formularse empleando la siguiente secuencia de razonamientos.

Primero aplique una fuerza imaginaria o virtual δP en A actuando en la dirección deseada AB al cuerpo descargado. Esta fuerza genera fuerzas internas en todo el cuerpo. Esas fuerzas internas, designadas por δF, figura 17-5(a), pueden encontrarse en cualquier sistema estáticamente determinado.

A continuación, con la fuerza virtual mantenida en el cuerpo, aplique las fuerzas reales, figura 17-5(b), o introduzca las deformaciones especificadas, como las debidas a un cambio de temperatura. Esto genera deformaciones internas reales u que pueden calcularse. Debido a esas deformaciones, el sistema de fuerza virtual efectúa trabajo externo e interno.

Por tanto, como el trabajo externo hecho por la fuerza virtual δP al moverse una cantidad real Δ en la dirección de esta fuerza es igual al trabajo total hecho sobre los elementos internos por las fuerzas virtuales δF al moverse a lo largo de sus respectivas cantidades reales u, la forma especial de la ecuación del trabajo virtual es

[6]Para un tratamiento matemático riguroso del trabajo virtual en problemas elásticos tridimensionales que requieren el uso del teorema de la divergencia (Teorema de Green), véase J. T. Oden y E. A. Ripperger, *Mechanics of Elastic Structures* (*Mecánica de las estructuras elásticas*), 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1981. Para una amplia exposición del trabajo virtual, véase G. A. O. Davies, *Virtual Work in Structural Analysis* (*Trabajo virtual en el análisis estructural*), Chichester, Wiley, 1982; y J. Lubliner, *Plasticity Theory* (*Teoría de la plasticidad*), Nueva York, Macmillan, 1990.

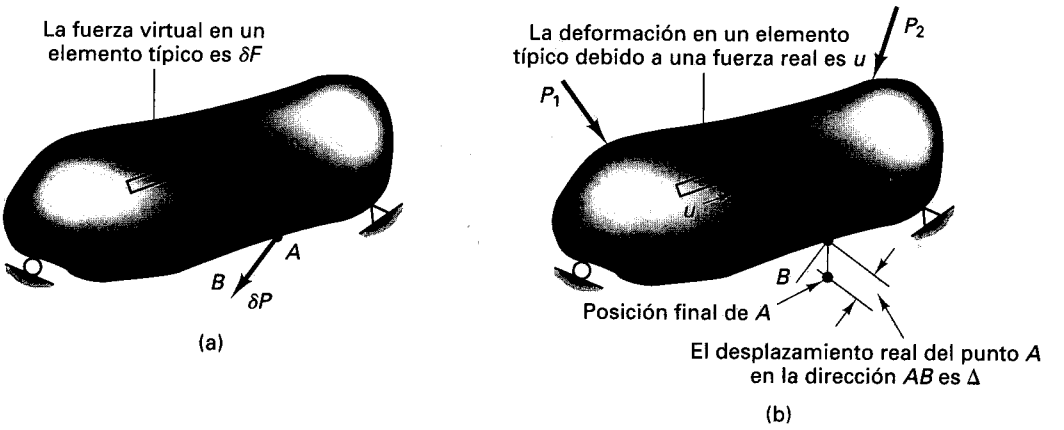


Fig. 17-5 Fuerzas virtuales y desplazamientos reales.

$$\delta P \cdot \Delta = \sum_{\text{virtual}} \delta F \cdot \overbrace{u}^{\text{real}} \tag{17-24}$$

Como todas las fuerzas virtuales alcanzan sus valores plenos antes que las deformaciones reales sean impuestas, el trabajo virtual es un producto de esas cantidades. La suma, o integración en el caso general, del lado derecho de la ecuación indica que *todo* el trabajo virtual *interno* debe ser incluido.

Note que en la ecuación 17-24, las razones entre δF y δP permanecen constantes independientemente del valor de δP; por tanto esas cantidades virtuales no tienen que ser infinitesimales. Por tanto, es particularmente conveniente en aplicaciones escoger la fuerza virtual δP aplicada igual a la unidad y reformular la ecuación 17-24 como

$$\bar{1} \cdot \Delta = \sum_{\text{virtual}} \bar{p} \cdot \overbrace{u}^{\text{real}} \tag{17-25}$$

donde

$\bar{1}$ = fuerza virtual unitaria

Δ = desplazamiento real de un punto en la dirección de la fuerza virtual unitaria aplicada

$\bar{p}$ = fuerzas virtuales internas en equilibrio con la fuerza virtual unitaria

u = desplazamientos reales internos de un cuerpo

Por simplicidad, los símbolos que designan cantidades virtuales son redefinidos y se les pone una barra encima como se muestra, en vez de ser identificados por δ. Las deformaciones reales pueden ser debidas a cualquier causa; las elásticas son sólo un caso especial. Las fuerzas de tensión y los alargamientos de los miembros se consideran positivos. Un resultado positivo indica que la deflexión ocurre en el mismo sentido que el de la fuerza virtual aplicada.

Al determinar las rotaciones de un miembro, se usa un par unitario en vez de una fuerza unitaria. En la práctica, el procedimiento de usar una fuerza virtual unitaria o un par virtual unitario junto con el trabajo virtual se denomina *método de la carga virtual unitaria.*

17-6. Ecuaciones de fuerza virtual para sistemas elásticos

La ecuación 17-25 puede especializarse para sistemas lineales elásticos para facilitar la solución de problemas. Esto se hace aquí para miembros cargados axialmente y a flexión. Siguen ejemplos de aplicación.

Armaduras Una fuerza virtual unitaria debe aplicarse en un punto en la dirección de la deflexión por determinar.

Para barras lineales elásticas de sección transversal A constante sometidas a fuerzas reales F, de acuerdo con la ecuación 3-4, las deformaciones axiales reales son $u = FL/AE$. Por tanto, la ecuación 17-25 toma la forma

$$\bar{1} \times \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{p}_i F_i L_i}{A_i E_i} \tag{17-26}$$

donde $\bar{p}_i$ es la fuerza axial en un miembro debida a la fuerza virtual unitaria y F_i es la fuerza en el mismo miembro debida a las cargas reales. La suma se extiende sobre todos los miembros de una armadura.

Vigas Si se quiere obtener por el método del trabajo virtual la deflexión de un punto sobre una viga elástica, una fuerza virtual unitaria debe aplicarse primero en la dirección en que se busca la deflexión. Esta fuerza virtual generará momentos flexionantes internos en varias secciones de la viga designados por $\bar{m}$, como se muestra en la figura 17-6(a). Luego, cuando las fuerzas reales son aplicadas a la viga, los momentos flexionantes M harán girar las "secciones planas" de la viga $M\,dx/EI$ radianes, ecuación 15-1. Por consiguiente, el trabajo virtual hecho sobre un elemento de una viga por los momentos virtuales $\bar{m}$ es $\bar{m}M\,dx/EI$. Integrando esto sobre la longitud de la viga da el trabajo interno sobre los elementos. Por tanto, la forma especial de la ecuación 17-25 para vigas es

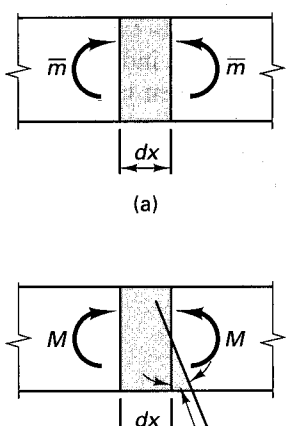


Fig. 17-6 Elementos de viga. (a) Momentos flexionantes virtuales. (b) Momentos flexionantes M reales y las rotaciones de las secciones que ellos generan.

$$\bar{1} \times \Delta = \int_0^L \frac{\bar{m}M\,dx}{EI} \tag{17-27}$$

Una expresión análoga puede usarse para encontrar la rotación angular de una sección particular en una viga. Para este caso, en vez de aplicar una fuerza virtual unitaria, se aplica un par virtual unitario a la viga en la sección investigada. Este par virtual genera momentos internos $\bar{m}$ a lo largo de la viga. Entonces, cuando las fuerzas reales son aplicadas, causan rotaciones $M\,dx/EI$ de las secciones transversales. Por tanto, la misma expresión integral que en la ecuación 17-27 se aplica aquí. El trabajo externo hecho por el par virtual unitario se obtiene multiplicando éste por la rotación real θ de la viga en la posición de este par. Por consiguiente,

$$\bar{1} \times \theta = \int_0^L \frac{\bar{m}M\,dx}{EI} \tag{17-28}$$

En las ecuaciones 17-27 y 17-28, $\bar{m}$ es el momento flexionante debido a la carga virtual y M es el momento flexionante debido a las cargas reales. Como $\bar{m}$ y M usualmente varían a lo largo de la longitud de la viga, ambos deben expresarse por medio de funciones apropiadas.

Ejemplo 17-1

Encuentre la deflexión vertical del punto B en la armadura de acero articulada mostrada en la figura 17-7(a) debida a las siguientes causas: (a) deformación elástica de los miembros, (b) acortamiento de 0.125 in del miembro AB por medio de un templador, y (c) descenso de temperatura de 120°F en el miembro BC. El coeficiente de dilatación térmica del acero es de 6.5×10^{-6} in/in/°F. Ignore la posibilidad del pandeo lateral del miembro a compresión. Sea $E = 30 \times 10^6$ psi.

SOLUCIÓN

(a) Una fuerza virtual unitaria se aplica verticalmente hacia arriba, como se muestra en la figura 17-7(b), y las fuerzas resultantes $\bar{p}$ se determinan y registran sobre el mismo diagrama. Luego las fuerzas en cada miembro debido a la fuerza real son también determinadas y registradas, figura 17-7(c). La solución se obtiene por medio de la ecuación 17-26. El trabajo se lleva a cabo en forma tabular.

Miembro	$\bar{p}$, lb	F, lb	L, in	A, in^2	$\bar{p}FL/A$
AB	−0.833	+2500	60	0.15	−833,000
BC	+0.833	−2500	60	0.25	−500,000

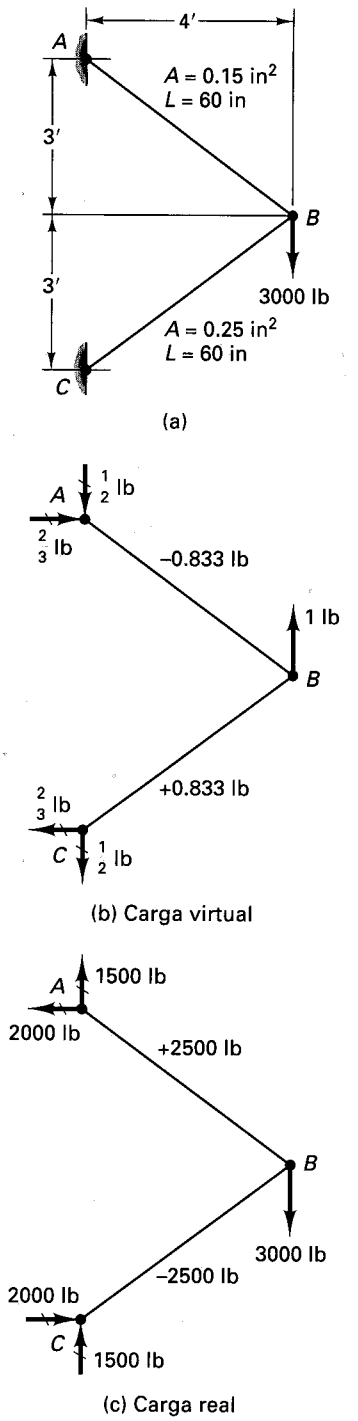


Fig. 17-7

De esta Tabla, $\sum \bar{p}FL/A = -1{,}333{,}000$. Por consiguiente,

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \frac{\bar{p}FL}{AE} = \frac{-1{,}333{,}000}{30 \times 10^6} = -0.0444 \text{ lb-in}$$

y

$$\Delta = -0.0444 \text{ in}$$

El signo negativo significa que el punto B se deflexiona hacia abajo. En este caso, se efectúa "trabajo negativo" por la fuerza virtual actuando hacia arriba cuando se desplaza hacia abajo. Note particularmente las unidades y signos de todas las cantidades. Las fuerzas de tensión en los miembros se toman positivas y viceversa.

(b) La ecuación 17-25 se usa para encontrar la deflexión vertical del punto B debido al acortamiento del miembro AB en 0.125 in. Las fuerzas generadas en las barras por la fuerza virtual actuando en la dirección de la deflexión buscada se muestran en la figura 17-7(b). Entonces, como $u = -0.125$ in (acortamiento) para el miembro AB y es cero para el miembro BC,

$$\bar{1} \times \Delta = (-0.833)(-0.125) + (+0.833)(0) = +0.1042 \text{ lb-in}$$

y

$$\Delta = +0.1042 \text{ in hacia arriba}$$

(c) De nuevo, usando la ecuación 17-25, y notando que debido al descenso de temperatura, ecuación 2-11, $\Delta_T = -6.5 \times 10^{-6} \times 120 \times 60 = -0.0468$ in en el miembro BC,

$$\bar{1} \times \Delta = (+0.833)(-0.0468) = -0.0390 \text{ lb-in}$$

y

$$\Delta = -0.0390 \text{ in hacia abajo}$$

Por superposición, la deflexión neta del punto B debida a las tres causas es $-0.0444 + 0.1042 - 0.0390 = +0.0208$ in hacia arriba. Para encontrar esta cantidad, los tres efectos podrían haberse considerado simultáneamente en la ecuación del trabajo virtual.

Ejemplo 17-2

Encuentre la deflexión y la rotación a la mitad de la viga en voladizo cargada como se muestra en la figura 17-8. EI es constante para la viga.

SOLUCIÓN

La fuerza virtual hacia abajo se aplica en el punto A cuya deflexión se busca, figura 17-8(b). El diagrama $\bar{m}$ y el diagrama M se muestran en las figuras 17-8(c) y (d), respectivamente. Para esas funciones, se toma el mismo

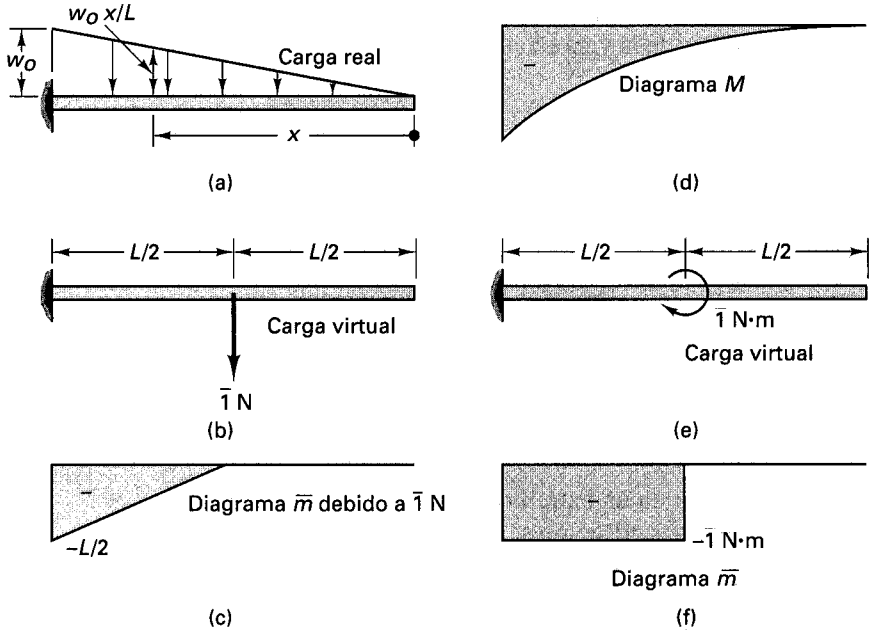


Fig. 17-8

origen para x en el extremo libre del voladizo. Después de determinar esos momentos se aplica la ecuación 17-27 para encontrar la deflexión.

$$M = -\frac{x}{2}\frac{w_o x}{L}\frac{x}{3} = -\frac{w_o x^3}{6L} \qquad 0 \le x \le L$$

$$\overline{m} = 0 \qquad 0 \le x \le L/2$$

$$\overline{m} = -1(x - L/2) \qquad L/2 \le x \le L$$

$$\overline{1} \times \Delta = \int_0^L \frac{\overline{m}M\,dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2} (0)\left(-\frac{w_o x^3}{6L}\right) dx + \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(-x + \frac{L}{2}\right)\left(-\frac{w_o x^3}{6L}\right) dx$$

$$= \frac{49 w_o L^4}{3840EI}\, N \cdot m$$

La deflexión del punto A es numéricamente igual a esta cantidad. La deflexión debido al cortante ha sido ignorada.

Para encontrar la rotación de la viga en el centro de ésta, se aplica un par virtual unitario en A, figura 17-8(e). El diagrama $\overline{m}$ correspondiente se muestra en la figura 17-8(f). El momento flexionante real M es el mismo que en la parte previa del problema. El momento virtual $\overline{m} = 0$ para x en-

tre 0 y $L/2$, y $\overline{m} = -1$ para el resto de la viga. Usando esos momentos y aplicando la ecuación 17-28, se determina la rotación de la viga en A.

$$M = -\frac{w_o x^3}{6L} \qquad y \qquad \overline{m} = -1 \qquad L/2 \le x \le L$$

$$1 \times \theta = \int_0^L \frac{\overline{m}M\,dx}{EI} = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L} (-1)\left(-\frac{w_o x^3}{6L}\right) dx = \frac{15 w_o L^3}{384EI}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

La rotación de la viga en A es numéricamente igual a este resultado.

Ejemplo 17-3

Una barra de aluminio está soportada por un pasador en un extremo y por una barra inclinada de aluminio en el tercio de su longitud, como se muestra en la figura 17-9(a). Encuentre la deflexión en C causada por la aplicación de la fuerza hacia abajo de 2 kN en ese punto. La sección transversal de la viga es de 5000 mm^2 ($50 \times 10^{-4}\ m^2$), y la de la barra es de 500 mm^2 ($5 \times 10^{-4}\ m^2$). El momento de inercia para la viga respecto al eje horizontal es de $60 \times 10^6\ mm^4$ ($60 \times 10^{-6}\ m^4$). Ignore la deflexión causada por el cortante. Sea $E = 70$ GPa.

SOLUCIÓN

Una fuerza virtual unitaria de 1 kN se aplica verticalmente hacia abajo en C. Esta fuerza causa una fuerza axial en el miembro DB y en la parte AB de la viga, figura 17-9(b). Debido a esta fuerza, momentos flexionantes son también causados en la viga AC, figura 17-9(c). Cálculos similares se hacen y se muestran en las figuras 17-9(d) y (e) para la fuerza real aplicada. La deflexión del punto C depende de la deformación causada por las fuerzas axiales, así como por la flexión; por tanto, la ecuación del trabajo virtual es

$$\overline{1} \times \Delta = \sum \frac{\overline{p}FL}{AE} + \int_0^L \frac{\overline{m}M\,dx}{EI}$$

El primer término en el lado derecho de esta ecuación se calcula en la Tabla. Entonces se encuentra la integral para el trabajo virtual interno debido a flexión. Para las diferentes partes de la viga se usan dos orígenes para las x al escribir las expresiones para $\overline{m}$ y M; véanse las figuras 17-9(c) y (e), respectivamente.

Miembro	$\overline{p}$, kN	F, kN	L, m	A, m^2	$\overline{p}FL/A$
DB	+5	+10	2.5	5×10^{-4}	+250,000
AB	−4	−8	2.0	50×10^{-4}	+12,800

De la Tabla, $\sum \overline{p}FL/A = +262{,}800$, o

$$\sum \overline{p}FL/AE = 3.75 \times 10^{-3}\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

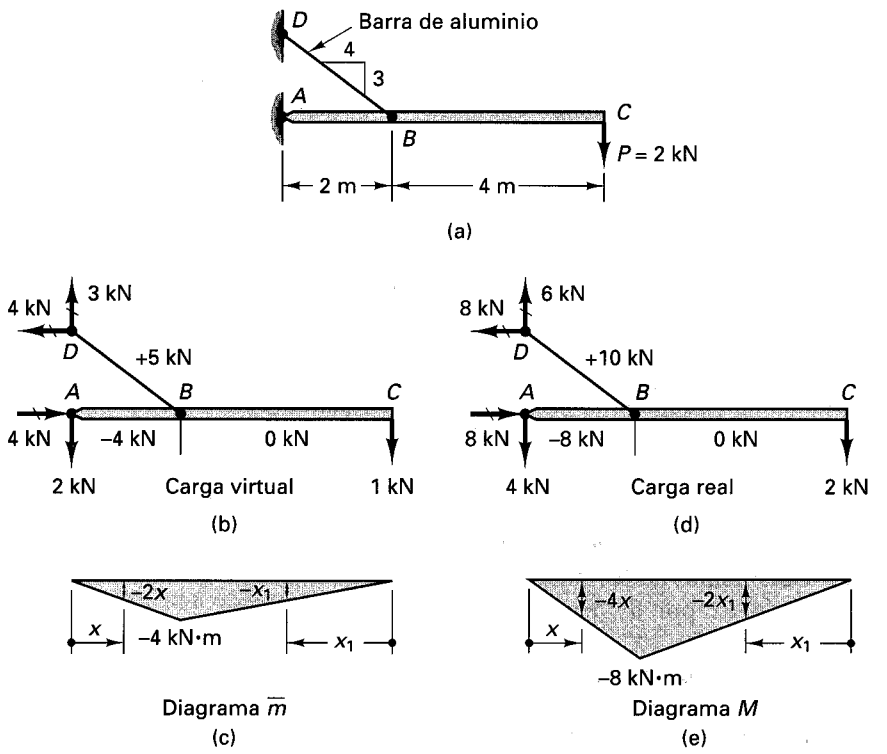


Fig. 17-9

$$\int_0^L \frac{\bar{m}M\,dx}{EI} = \int_0^2 \frac{(-2x)(-4x)\,dx}{EI} + \int_0^4 \frac{(-x_1)(-2x_1)dx_1}{EI}$$

$$= +15.25 \times 10^{-3}\,\text{kN} \cdot \text{m}$$

Por tanto, $\bar{1} \times \Delta = (3.75 + 15.25)10^{-3} = 19 \times 10^{-3}$ kN · m y el punto C se deflexiona 19×10^{-3} m = 19 mm hacia abajo.

Note que el trabajo debido a los dos tipos de acciones fue superpuesto. Note también que los orígenes para el sistema coordenado para momentos puede escogerse como convenga; sin embargo, el mismo origen debe usarse para las correspondientes $\bar{m}$ y M.

Ejemplo 17-4

Encuentre la deflexión horizontal causada por una fuerza concentrada P, del extremo de la barra curva mostrada en la figura 17-10(a). La rigidez flexionante EI de la barra es constante. Ignore el efecto de la fuerza axial y de la fuerza cortante sobre la deflexión.

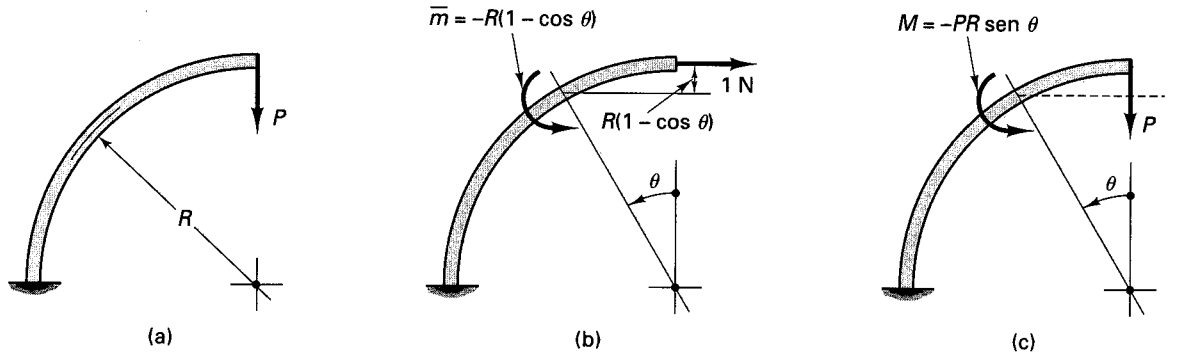


Fig. 17-10

SOLUCIÓN

Si el radio de curvatura de una barra es grande en comparación con las dimensiones transversales (sección 10-9), pueden usarse las fórmulas ordinarias para deflexiones en vigas, reemplazando dx por ds. En este caso, $ds = R\,d\theta$.

Aplicando una fuerza virtual horizontal en el extremo en dirección de la deflexión buscada, figura 17-10(b), se ve que $\overline{m} = -R(1 - \cos\theta)$. Similarmente, para la carga real, de la figura 17-10(c), $M = -PR\operatorname{sen}\theta$. Por tanto,

$$\overline{1} \times \Delta = \int_0^L \frac{\overline{m}M\,ds}{EI}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{-R(1 - \cos\theta)(-PR\operatorname{sen}\theta)R\,d\theta}{EI} = +\frac{PR^3}{2EI}\ \mathrm{N \cdot m}$$

La deflexión del extremo a la derecha es numéricamente igual a esta expresión.

17-7. Fuerzas virtuales para problemas indeterminados

El método de la carga virtual unitaria deducido usando el concepto de fuerza virtual puede usarse convenientemente para la solución de problemas estáticamente indeterminados. El procedimiento es ilustrado aquí en un problema estáticamente indeterminado de primer grado. El procedimiento básico es esencialmente el mismo que el descrito en la sección 4-3 para el método de las *fuerzas* de análisis para sistemas estáticamente indeterminados de barras cargadas axialmente (véase la figura 4-2). Las aplicaciones del método de las *fuerzas* (o *flexibilidades*) a problemas de mayor indeterminación estática se analizan en las secciones 19-2 y 19-3. En general, este método es muy adecuado para problemas elástico lineales, donde la superposición es válida.

Ejemplo 17-5

(a) Encuentre las fuerzas en las barras de la estructura de acero articulada mostrada en la figura 17-11. (b) Determine la deflexión de la junta (punto nodal o nodo) B. Sea $E = 30 \times 10^6$ psi.

SOLUCIÓN

(a) La estructura puede convertirse en estáticamente determinada cortando la barra DB en D. Las fuerzas en los miembros son entonces como se muestran en la figura 17-11(b). En esta estructura determinada debe encontrarse la deflexión del punto D. Esto puede hacerse aplicando una fuerza virtual vertical en D, figura 17-11(c) y usando el método de la fuerza virtual. Sin embargo, como el término $\bar{f}FL/AE$ para el miembro BD es cero, la deflexión vertical del punto D es la misma que la del B. En el ejemplo 17-1 se encontró que la última cantidad es de 44.4×10^{-3} in hacia abajo, lo que se muestra en la figura 17-11(b).

La deflexión del punto D, mostrada en la figura 17-11(b), viola una condición de frontera del problema y una fuerza vertical debe aplicarse en D para arreglarla. Si f_{DD} es la deflexión del punto D debida a una fuerza unitaria (real) en D, ella define la flexibilidad de este sistema. Es necesario multiplicar f_{DD} por un factor X_D para cerrar la abertura $\Delta_{DP} = 44.4 \times 10^{-3}$ in en D causada por la fuerza P en el sistema determinado. Esto significa meramente que la deflexión Δ_D en D se vuelve cero. Expresado algebraicamente,

$$\Delta_D = f_{DD}X_D + \Delta_{DP} = 0$$

Por consiguiente, el problema se reduce a encontrar f_{DD}. Esto puede hacerse aplicando una fuerza virtual de 1 lb en D, aplicando luego una fuerza real de 1 lb en el mismo punto y usando la ecuación 17-26. Las fuerzas generadas en la estructura estáticamente determinada por las fuerzas virtuales y reales son numéricamente iguales, figura 17-11(c). Para diferenciar entre las dos, las fuerzas en los miembros causadas por una fuerza virtual son designadas por $\bar{p}$ y las fuerzas causadas por una fuerza real por p. La solución se lleva a cabo en la siguiente tabla:

Miembro	$\bar{p}$, lb	p, lb	L, in	A, in^2	$\bar{p}pL/A$
AB	−0.833	−0.833	60	0.15	+278
BC	+0.833	+0.833	60	0.25	+167
BD	+1.000	+1.000	40	0.10	+400

De la tabla, $\sum \bar{p}pL/A = +845$. Por tanto, como

$$\bar{1} \times \Delta = \sum \frac{\bar{p}pL}{AE} = \frac{+845}{30 \times 10^6} = 28.1 \times 10^{-6} \text{ lb-in}$$

$$f_{DD} = 28.1 \times 10^{-6} \text{ in} \quad y \quad 28.1 \times 10^{-6}X_D - 44.4 \times 10^{-3} = 0$$

Para cerrar la abertura de 44.4×10^{-3} in, la fuerza real de 1 lb en D debe incrementarse $0.0444/0.0000281 = 1580$ veces. Por tanto, la fuerza real en el miembro DB es de 1580 lb. Las fuerzas en los otros dos miembros pueden

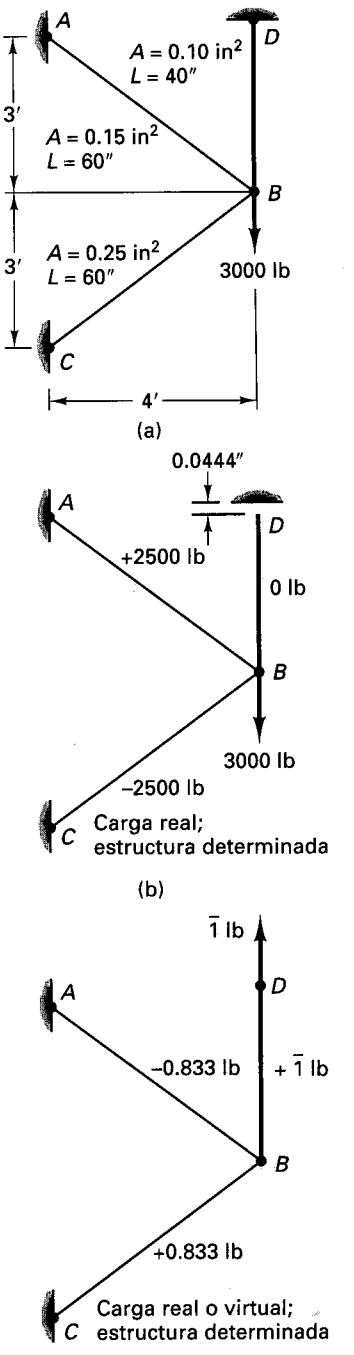


Fig. 17-11

determinarse ahora por estática o por superposición de las fuerzas mostradas en la figura 17-11(b) con X_D veces las fuerzas p mostradas en la figura 17-11(c). Por cualquiera de los dos métodos, se encuentra que la fuerza en AB es de +1180 lb (tensión), y en BC, es de −1180 lb (compresión).

(b) Tres sistemas virtuales diferentes se usan para determinar la deflexión del punto nodal B causada por la fuerza aplicada. El más simple de los tres consiste en reconocer que como la fuerza en el miembro vertical BD es conocida e igual a 1580 lb, la deflexión en B es

$$\Delta_B = \frac{FL}{AE} = \frac{1580 \times 40}{0.10 \times 30 \times 10^6} = 21 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Esta solución desde el punto de vista de un sistema de fuerza virtual significa que la fuerza virtual en el miembro DB es la unidad y cero en los otros miembros.

Alternativamente, el sistema de fuerza virtual puede consistir en los miembros activos AB y BC, con una fuerza virtual cero en el miembro BD. Entonces, suponiendo que la fuerza unitaria virtual actúa hacia arriba en B, las fuerzas virtuales en los miembros AB y BC son las mostradas en la figura 17-11(c) [o figura 17.7(b)]. (Recuerde que la fuerza en el miembro BD se supone nula.) De la solución para (a), se sabe que las fuerzas reales en los miembros AB, BC y BD son, respectivamente, +1180 lb, −1180 lb y +1580 lb. La solución de la ecuación 17-26 para obtener la deflexión en B se lleva a cabo en la siguiente tabla.

Miembro	$\bar{p}$, lb	F, lb	L, in	A, in^2	$\bar{p}FL/A$
AB	−0.833	+1180	60	0.15	−393,000
BC	+0.833	−1180	60	0.25	−236,000
BD	0	+1580	40	0.10	0

Por consiguiente,

$$\Delta_B = \frac{\sum \bar{p}FL/A}{E} = -\frac{629{,}000}{30 \times 10^6} = -21 \times 10^{-3} \text{ in}$$

El signo negativo indica que la deflexión es hacia abajo.

Finalmente, consideremos que el sistema de fuerza virtual consiste en las tres barras. Las fuerzas virtuales en las barras debido a una fuerza unitaria hacia abajo pueden encontrarse dividiendo las fuerzas en las barras debido a las fuerzas aplicadas entre 3000; por ejemplo, para el miembro AB, tal fuerza virtual es 1180/3000 = 0.393 lb. De nuevo, la solución se lleva a cabo en forma tabular.

Miembro	$\bar{p}$, lb	F, lb	L, in	A, in^2	$\bar{p}FL/A$
AB	+0.393	+1180	60	0.15	+185,000
BC	−0.393	−1180	60	0.25	+111,000
BD	+0.527	+1580	40	0.10	+333,000

Por consiguiente,

$$\Delta_B = \frac{\sum \bar{p}FL/A}{E} = \frac{629{,}000}{30 \times 10^6} = 21 \times 10^{-3}\,\text{in}$$

Los resultados son los mismos con los tres sistemas enteramente distintos de fuerza virtual que están en equilibrio estático. Esto es cierto en general. *Cualquier* sistema virtual autoequilibrante puede usarse siempre que sus desplazamientos pasen por los desplazamientos reales prescritos.

En cualquier caso dado, para garantizar que el análisis elástico es aplicable deben determinarse los esfuerzos máximos. Para que la solución sea correcta, deben estar en el rango elástico lineal del material usado.

17-8. Desplazamientos virtuales para equilibrio

El principio del trabajo virtual puede adaptarse para desarrollar el método del desplazamiento virtual del análisis estructural. La deducción de este método puede comenzarse enunciando el principio del trabajo virtual:

$$\text{trabajo virtual externo} = \text{trabajo virtual interno} \qquad (17\text{-}23)$$

El trabajo virtual para el método del desplazamiento virtual se determina multiplicando los desplazamientos virtuales por fuerzas reales. Recuerde que en el método de la fuerza virtual el trabajo virtual se encuentra multiplicando las fuerzas virtuales por desplazamientos reales. Debido a esto, surgen varias diferencias en las ecuaciones del trabajo virtual.

En el método del desplazamiento virtual, los desplazamientos tanto virtuales como reales deben ser compatibles con los requisitos especiales de un problema. Esto significa que los desplazamientos de un miembro deben conformarse a las condiciones de frontera y a los desplazamientos de los puntos de carga. Como las condiciones de frontera son más fáciles de satisfacer en barras articuladas con sus extremos cargados axialmente, sólo tales problemas serán considerados aquí. Además, el análisis se limitará a ensambles de barras que se encuentran en un solo nudo articulado donde se aplica una fuerza externa. Tal nudo de llama *punto nodal.* Aunque el análisis se limita a la clase más simple de problemas, el procedimiento descrito proporciona una introducción al método más ampliamente usado en el análisis matricial de estructuras y en el método del elemento finito, donde es indispensable.

En el método del desplazamiento virtual, además de una definición exacta de los desplazamientos reales y virtuales, las fuerzas en los miembros deben definirse como funciones de los desplazamientos nodales. Esto se logra con ayuda de las relaciones constitutivas. Aquí, tales relaciones están *estrictamente limitadas al comportamiento elástico lineal.*

Como con la palanca de Arquímedes, las ecuaciones del trabajo virtual proporcionan las ecuaciones de equilibrio. De esta manera, los tres requisitos básicos de equilibrio, compatibilidad y relaciones constitutivas quedan satisfechos.

Para construir la ecuación básica del trabajo virtual, por analogía con la ecuación 17-25, puede formularse directamente con el *método de los desplazamientos de la carga virtual unitaria*. Aquí, la fuerza externa real con su valor pleno se mueve a través de un desplazamiento virtual unitario en el sentido de la fuerza. Simultáneamente, las fuerzas reales internas con sus valores plenos se mueven a través de los desplazamientos virtuales causados por el desplazamiento virtual unitario. Esto da la siguiente ecuación de trabajo virtual:

$$\overbrace{\bar{1} \cdot P}^{\text{real}} = \underbrace{\sum \bar{u} \cdot F}_{\text{virtual}} \qquad (17\text{-}29)$$

donde

$\bar{1}$ = desplazamiento virtual unitario en un punto nodal en el sentido de P

P = fuerza (nodal) real externa

$\bar{u}$ = desplazamientos virtuales internos compatibles con el desplazamiento virtual unitario

F = fuerzas internas reales en equilibrio con P

Las deformaciones de miembros en flexión así como las de elementos finitos requieren generalmente más de un punto nodal para sus definiciones. Por tanto, los ejemplos que siguen consideran sólo barras articuladas axialmente cargadas en sus extremos.

Ejemplo 17-6

Usando el método del desplazamiento virtual, determine las fuerzas en las barras de la armadura lineal elástica de acero del ejemplo 17-1; véase la figura 17-12. $E = 30 \times 10^3$ ksi.

SOLUCIÓN

En esta armadura, la barra AB tiene el área transversal $A_1 = 0.15$ in^2 y la barra BC tiene un área $A_2 = 0.25$ in^2. Debido a esta falta de simetría en las barras, durante un proceso de carga, el nodo B puede moverse tanto horizontal como verticalmente, figuras 17-12(b) y (c). Por consiguiente, este sistema tiene dos grados de libertad o dos grados de indeterminación cinemática (véase la Sección 4-5). Esas componentes de desplazamiento para el nodo B se designan por Δ_1 y Δ_2, respectivamente, con sus sentidos positivos mostrados en la figura 17-12(a).

Los requisitos de compatibilidad para el problema se satisfacen permitiendo que el nodo B se mueva como se muestra en las figuras 17-12(b) y (c). Una combinación lineal de esos desplazamientos es apropiada.

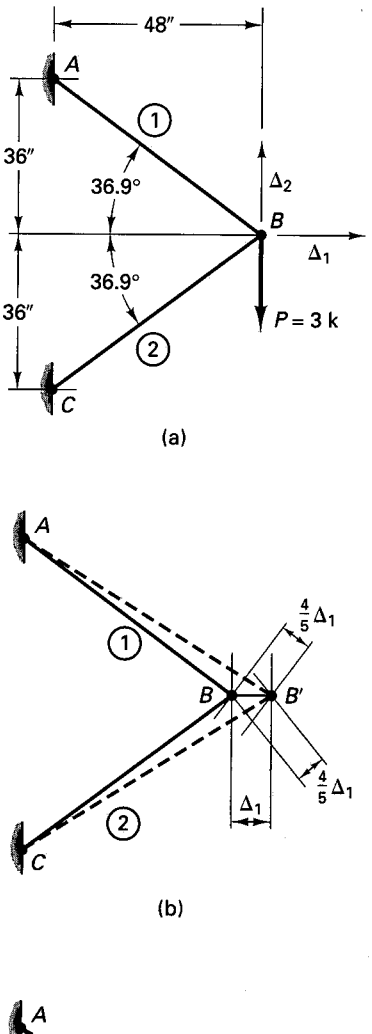


Fig. 17-12

Los requisitos constitutivos para el problema están definidos por las rigideces de las barras, ecuación 3-7, que para las barras 1 y 2, respectivamente, son

$$k_1 = \frac{A_1E}{L_1} = \frac{0.15 \times 30 \times 10^3}{60} = 75 \text{ k/in}$$

$$k_2 = \frac{A_2E}{L_2} = \frac{0.25 \times 30 \times 10^3}{60} = 125 \text{ k/in}$$

Con base en esto, las fuerzas internas F_1 y F_2 en las barras pueden determinarse como funciones de los desplazamientos Δ_1 y Δ_2 del nodo. Las deformaciones u_1 y u_2 de las barras, correspondientes a esos desplazamientos, son

$$u_1 = 0.8\Delta_1 - 0.6\Delta_2 \quad \text{y} \quad u_2 = 0.8\Delta_1 + 0.6\Delta_2$$

Por consiguiente,

$$F_1 = k_1u_1 = 75(0.8\Delta_1 - 0.6\Delta_2) = 60\Delta_1 - 45\Delta_2$$

$$F_2 = k_2u_2 = 125(0.8\Delta_1 + 0.6\Delta_2) = 100\Delta_1 + 75\Delta_2$$

Como este problema es cinemáticamente indeterminado de segundo grado, el desplazamiento virtual, ecuación 17-29, debe aplicarse dos veces. La ecuación de equilibrio para las fuerzas que actúan en la dirección horizontal se obtiene tomando $\Delta_1 = \bar{1}$, lo que ocasiona los desplazamientos virtuales $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0.8$ en las barras. Notando que ninguna fuerza horizontal se aplica en B.

$$\bar{1} \times 0 = \bar{u}_1F_1 + \bar{u}_2F_2$$

$$0.8(60\Delta_1 - 45\Delta_2) + 0.8(100\Delta_1 + 75\Delta_2) = 0$$

o

$$128\Delta_1 + 24\Delta_2 = 0$$

Similarmente, la ecuación de equilibrio para las fuerzas que actúan en la dirección vertical se obtiene haciendo $\Delta_2 = \bar{1}$, lo que da los desplazamientos $\bar{u}_1 = -0.6$ y $\bar{u}_2 = 0.6$ en las barras. De nuevo, aplicando la ecuación 17-29

$$\bar{1} \times (-3) = \bar{u}_1F_1 + \bar{u}_2F_2$$

$$-0.6(60\Delta_1 - 45\Delta_2) + 0.6(100\Delta_1 + 75\Delta_2) = -3$$

o

$$24\Delta_1 + 72\Delta_2 = -3$$

Resolviendo las dos ecuaciones reducidas simultáneamente,

$$\Delta_1 = 8.33 \times 10^{-3}\text{in} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = -44.4 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Por consiguiente,

$$F_1 = 60\Delta_1 - 45\Delta_2 = 2.5 \text{ k}$$

$$F_2 = 100\Delta_1 + 75\Delta_2 = -2.5 \text{ k}$$

Esos resultados concuerdan totalmente con los dados en el ejemplo 17-1 para las fuerzas en las barras así como para la deflexión vertical. Las ventajas de este método quedarán más claras en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17-7

Usando el método del desplazamiento virtual, determine las fuerzas en las barras de la armadura lineal elástica de acero estáticamente indeterminada del ejemplo 17-5; véase la figura 17-13. Sea $E = 30 \times 10^3$ ksi.

SOLUCIÓN

Aunque este problema es estáticamente indeterminado de primer grado, tal como en el ejemplo previo de un caso estáticamente determinado, el sistema permanece indeterminado cinemáticamente de segundo grado. En ambos casos, el punto nodal B tiene dos componentes de deflexión, una horizontal y una vertical, y ambos sistemas tienen dos grados de libertad. Por tanto, la solución resulta sólo ligeramente más complicada que en el ejemplo previo. Por consiguiente, procediendo como antes, y notando que el área transversal para la tercera barra, DB, es de 0.10 in^2,

$$k_3 = \frac{A_3 E}{L_3} = \frac{0.10 \times 30 \times 10^3}{40} = 75 \text{ k/in}$$

Del ejemplo previo, $k_1 = 75$ k/in y $k_2 = 125$ k/in.

Los desplazamientos del sistema en las direcciones horizontal y vertical se muestran en las figuras 17-13(b) y (c). Debe notarse que se considera que la longitud de la barra DB no cambia porque Δ_1 es muy pequeña (véase la figura 3-6). Las deformaciones u_1 y u_2 en las barras debidas a Δ_1 y Δ_2, respectivamente, son las mismas que en el ejemplo previo, mientras que u_3 es igual a Δ_2. Resumiendo esos resultados,

$$u_1 = 0.8\Delta_1 - 0.6\Delta_2 \qquad u_2 = 0.8\Delta_1 + 0.6\Delta_2 \qquad \text{y} \qquad u_3 = \Delta_2$$

Por tanto, recordando los resultados anteriores y agregando sólo un nuevo término para la barra DB,

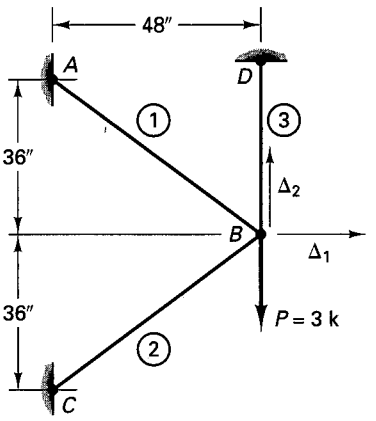
$$F_1 = 60\Delta_1 - 45\Delta_2 \qquad F_2 = 100\Delta_1 + 75\Delta_2 \qquad F_3 = k_3 u_3 = 75\Delta_2$$

Notando que para el desplazamiento virtual $\Delta_1 = \bar{1}$, $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0.8$ y $\bar{u}_3 = 0$, la ecuación de equilibrio para las fuerzas que actúan en la dirección horizontal, con base en la ecuación 17-29, toma la forma

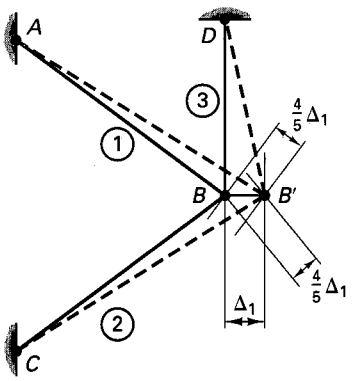
$$\bar{1} \times 0 = \bar{u}_1 F_1 + \bar{u}_2 F_2 + \bar{u}_3 F_3$$

Sin embargo, como $u_3 = 0$, esta ecuación se reduce a la dada antes, es decir

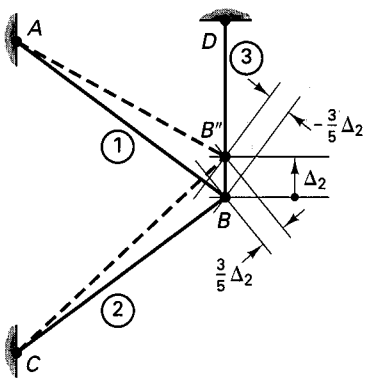
$$128\Delta_1 + 24\Delta_2 = 0$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 17-13

Como para $\Delta_2 = \overline{1}, \overline{u}_1 = -0.6, \overline{u}_2 = 0.6$, y $\overline{u}_3 = 1$, la ecuación de equilibrio para las fuerzas que actúan en dirección vertical (usando la ecuación 17-29), toma la forma

$$\overline{1} \times (-3) = \overline{u}_1 F_1 + \overline{u}_2 F_2 + \overline{u}_3 F_3$$

$$0.6(60\Delta_1 - 45\Delta_2) + 0.6(100\Delta_1 + 75\Delta_2) + 75\Delta_2 = -3$$

o

$$24\Delta_1 + 147\Delta_2 = -3$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones reducidas, obtenemos

$$\Delta_1 = 3.947 \times 10^{-3} \text{ in} \qquad \text{y} \qquad \Delta_2 = -21.05 \times 10^{-3} \text{ in}$$

Por tanto,

$$F_1 = 60\Delta_1 - 45\Delta_2 = 1.18 \text{ k}$$

$$F_2 = 100\Delta_1 + 75\Delta_2 = 1.18 \text{ k}$$

$$F_3 = 75\Delta_2 = 1.58 \text{ k}$$

Estos resultados están totalmente de acuerdo con los encontrados antes en el ejemplo 17-5.

La indeterminación cinemática de este problema sigue siendo la misma independientemente del número de barras que se encuentren en el nodo B.

Problemas de mayor grado de indeterminación estática se verán en la Sección 19-6 en conexión con el método de los *desplazamientos* de análisis.

17-9. Trabajo virtual para sistemas discretos

Los métodos de los desplazamientos virtuales y de las fuerzas virtuales se derivan ambos del mismo principio del trabajo virtual. Por tanto, es instructivo mostrar las relaciones entre los dos métodos usando sistemas estructurales discretos (es decir, sobre sistemas estructurales con un número de fuerzas aplicadas, miembros y desplazamientos nodales finitos). Esto se hace aquí empleando notación matricial. Siguen a continuación las definiciones y operaciones matriciales requeridas para este fin.

Una *matriz* es un arreglo ordenado de números como los encontrados antes en las ecuaciones 1-1a, 1-1b y 5-12. La matriz especial en la ecuación 1-1a se llama *vector columna*. Las matrices en las ecuaciones 1-1b y 5-12 se conocen como *matrices cuadradas*. Aquí las matrices están identificadas por llaves para los vectores columnas y por corchetes para las matrices cuadradas, o se muestran en caracteres tipográficos conocidos como negritas.

Un *producto matricial* de una matriz cuadrada de 2×2 por un vector columna de 2×1 resulta en un vector columna de 2×1:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{bmatrix}$$

En la ecuación 4-13 se muestra un producto de una matriz cuadrada simétrica de 4×4 por un vector columna de 4×1.

La *transpuesta* de un vector columna $\mathbf{P}$ se denota por $\mathbf{P}^T$ y se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de $\mathbf{P}$. Por tanto, si

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{P}^T = [P_1\ P_2\ P_3 \cdots P_n] \quad \text{y} \quad \Delta^T = [\Delta_1\ \Delta_2\ \Delta_3 \cdots \Delta_n]$$

Los siguientes productos de esas dos funciones conducen a la misma *función escalar:*

$$\mathbf{P}^T\mathbf{\Delta} = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3 + \cdots + P_n\Delta_n$$
$$\mathbf{\Delta}^T\mathbf{P} = \Delta_1P_1 + \Delta_2P_2 + \Delta_3P_3 + \cdots + \Delta_nP_n$$

Esas funciones escalares están asociadas con el término de trabajo en el análisis que sigue.

La *transpuesta del producto* de las dos matrices necesaria en el desarrollo subsecuente se define[7] como el producto de las matrices transpuestas tomadas en orden inverso. Es decir, si $\mathbf{F} = \mathbf{bP}$,

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{P}^T\mathbf{b}^T$$

La *dualidad* de los métodos de la fuerza virtual y del desplazamiento virtual puede mostrarse fácilmente con ayuda de esta notación matricial. Recordando primero la ecuación 17-23 en palabras, se da un desarrollo paralelo empleando el trabajo virtual. Para el método de la fuerza virtual, las fuerzas son virtuales y los desplazamientos son reales; mientras que para el método del desplazamiento virtual, las fuerzas son reales y los desplazamientos son virtuales. Excepto por la formación del trabajo virtual en una manera diferente, las operaciones matriciales en los dos métodos son idénticas. A continuación se delínean los dos métodos.

[7]Para una prueba, véase cualquier texto sobre álgebra lineal, como el B. Noble, *Applied Linear Algebra* (*Álgebra lineal aplicada*), 3a. ed. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1988.

Trabajo virtual externo = Trabajo virtual interno (17-23)

Método de la fuerza virtual	**Método del desplazamiento virtual**
$\delta W_e^* = \delta W_{ie}^*$ (17-22)	$\delta W_e = \delta W_{ie}$ (17-19)
Estática:	*Cinemática*
$\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{b}\overline{\mathbf{P}}$ (17-30a)	$\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{a}\overline{\boldsymbol{\Delta}}$ (17-30b)
$\{\mathbf{F}\}$ = fuerzas internas en los miembros $[\mathbf{b}]$ = matriz de transformación de fuerzas $\{\mathbf{P}\}$ = fuerzas externas en nodos	$\{\mathbf{u}\}$ = distorsiones en miembros $[\mathbf{a}]$ = matriz de transformación de desplazamientos $\{\boldsymbol{\Delta}\}$ = desplazamientos nodales
$\delta W_e^* = \overline{\mathbf{P}}^T\boldsymbol{\Delta}$ y $\delta W_{ie}^* = \overline{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}$	$\delta W_e = \overline{\boldsymbol{\Delta}}^T\mathbf{P}$ y $\delta W_{ie} = \overline{\mathbf{u}}^T\mathrm{F}$
Igualando:	*Igualando:*
$\overline{\mathbf{P}}^T\boldsymbol{\Delta} = \overline{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}$	$\overline{\boldsymbol{\Delta}}^T\mathbf{P} = \overline{\mathbf{u}}^T\mathbf{F}$
De la ecuación 17-30a:	*De la ecuación 17-30b:*
$\overline{\mathbf{F}}^T = \overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{b}^T$	$\overline{\mathbf{u}}^T = \overline{\boldsymbol{\Delta}}^T\mathbf{a}^T$
Por consiguiente,	*Por consiguiente,*
$\overline{\mathbf{P}}^T\boldsymbol{\Delta} = \overline{\mathbf{P}}^T\mathbf{b}^T\mathbf{u}$ o $\overline{\mathbf{P}}^T(\boldsymbol{\Delta} - \mathbf{b}^T\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	$\overline{\boldsymbol{\Delta}}^T\mathbf{P} = \overline{\boldsymbol{\Delta}}^T\mathbf{a}^T\mathbf{F}$ o $\overline{\boldsymbol{\Delta}}^T(\mathbf{P} - \mathbf{a}^T\mathbf{F}) = \mathbf{0}$
y	y
$\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{b}^T\mathbf{u}$ (17-31a)	$\mathbf{P} = \mathbf{a}^T\mathbf{F}$ (17-31b)

Como $\overline{\mathbf{P}}^T$ y $\overline{\boldsymbol{\Delta}}^T$ son completamente arbitrarios, sin relación con las fuerzas aplicadas, las expresiones precedentes en paréntesis deben anularse y las ecuaciones 17-31a y 17-31b están en *variables reales* solamente.

En la tabla, las fuerzas internas $\{\mathbf{F}\}$ son determinadas por estática y están relacionadas con las fuerzas nodales aplicadas externamente $\{\mathbf{P}\}$ por medio de la matriz $[\mathbf{b}]$. Similarmente, las distorsiones en los miembros (deformaciones) $\{\mathbf{u}\}$ están relacionadas por cinemática con los desplazamientos nodales $\{\boldsymbol{\Delta}\}$ a través de una matriz de transformación de desplazamientos $[\mathbf{a}]$. Los símbolos que designan cantidades virtuales tienen una barra sobre ellos.

El desarrollo paralelo de los dos métodos es sorprendente, pero mientras que el método de la fuerza virtual conduce a *ecuaciones de compatibilidad*, el método del desplazamiento virtual determina las *ecuaciones de equilibrio*.

Se da a continuación un ejemplo que ilustra la aplicación de esos procedimientos. El ejemplo se confina a un problema estáticamente determinado ya que se requieren operaciones matriciales adicionales en problemas estáticamente indeterminados; tales procedimientos se estudian en textos sobre análisis por elemento finito.[8]

[8]Véase, por ejemplo, J. L. Meek, *Matrix Structural Analysis* (*Análisis estructural matricial*), Nueva York, McGraw-Hill, 1971.

Ejemplo 17-8

(a) Usando el método de la fuerza virtual en notación matricial, determine las componentes de desplazamiento para el nodo B del sistema de la armadura elástica articulada mostrada en la figura 17-14. (b) Usando el método del desplazamiento virtual en notación matricial, encuentre las fuerzas nodales P_1 y P_2 por equilibrio estático del mismo sistema si el alargamiento *elástico* de la barra AB es $5L/AE$ y el de la barra BC es $25L/AE$. Para ambas barras, las longitudes L y las áreas transversales son las mismas y E es constante.

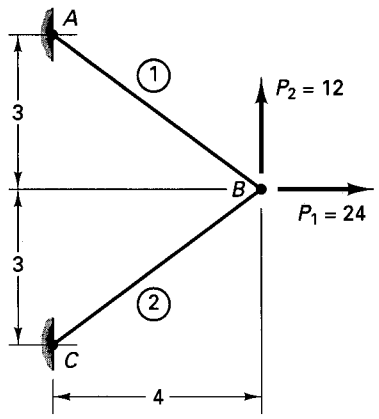


Fig. 17-14

SOLUCIÓN

(a) Por estática,

$$F_{AB} = F_1 = \frac{5}{8}P_1 - \frac{5}{6}P_2 \qquad \text{y} \qquad F_{BC} = F_2 = \frac{5}{8}P_1 + \frac{5}{6}P_2$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{bP} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{5}{6} \\ \frac{5}{8} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

Usando la ecuación 3-4, las relaciones constitutivas de las barras son

$$u_1 = \frac{F_1 L}{AE} = \left(\frac{5}{8} \times 24 - \frac{5}{6} \times 12\right)\frac{L}{AE} = \frac{5L}{AE}$$

$$u_2 = \frac{F_2 L}{AE} = \left(\frac{5}{8} \times 24 + \frac{5}{6} \times 12\right)\frac{L}{AE} = \frac{25L}{AE}$$

Por tanto,

$$\mathrm{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 25 \end{Bmatrix}\frac{L}{AE}$$

Usando la ecuación 17-31a, para la compatibilidad del sistema,

$$\mathbf{\Delta} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{b}^T\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ -\frac{5}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 25 \end{Bmatrix}\frac{L}{AE} = \begin{Bmatrix} 18.75 \\ 16.67 \end{Bmatrix}\frac{L}{AE}$$

(b) Las deformaciones compatibles de las barras como funciones de los desplazamientos nodales, son, con ayuda de las figuras 17-13(b) y (c),

$$u_1 = \frac{4}{5}\Delta_1 - \frac{3}{5}\Delta_2 \qquad \text{y} \qquad u_2 = \frac{4}{5}\Delta_1 + \frac{3}{5}\Delta_2$$

Por consiguiente,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{a}\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$$

Como $u_1 = 5L/AE$ y $u_2 = 25L/AE$, de las relaciones constitutivas para barras *linealmente elásticas*, se tiene

$$F_1 = \frac{AE}{L}u_1 = 5 \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{AE}{L}u_2 = 25$$

Por tanto, usando la ecuación 17-31b, por equilibrio estático las fuerzas en los nodos son

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{a}^T\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5 \\ 25 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 24 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

Este resultado corresponde a las fuerzas en los nodos dadas para la parte (a). Esto significa que los dos procesos son completamente reversibles para sistemas *elásticos*.

En el análisis matricial de estructuras y especialmente en las aplicaciones del elemento finito, ecuaciones similares a las previas contienen un gran número de incógnitas. El uso de computadoras es esencial para la solución de tales sistemas de ecuaciones.

PROBLEMAS

Secciones 17-2 y 17-3

17-1. Una barra circular maciza doblada a 90° en dos puntos está empotrada en un extremo, como se muestra en la figura. La aplicación de la fuerza P en el extremo libre genera una fuerza axial, cortante directo, flexión y torsión en los tres segmentos de barra. (a) Usando la ecuación 17-11, obtenga la expresión para la deflexión del extremo libre. Las constantes A, I, J, E y G son dadas para la barra. (*Sugerencia*: Véanse los ejemplos 3-9 y 14-12.) (b) Si $L = 100$ mm y el diámetro $d = 40$ mm, ¿qué cantidad de deflexión, en porcentaje, es debida a cada una de las cuatro causas enumeradas antes? Suponga $E/G = 2.5$. (c) Repita la parte (b) para $L = 500$ mm y $d = 40$ mm. Ignore el efecto de las concentraciones de esfuerzos locales sobre la deflexión.

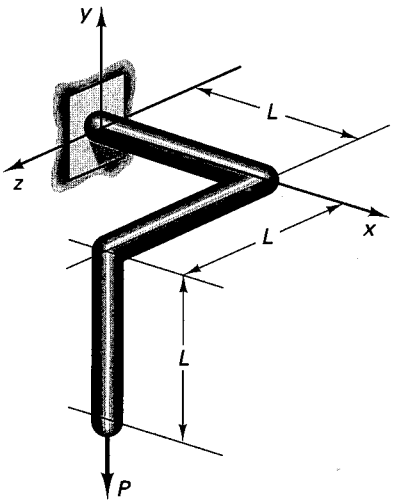


Fig. P17-1

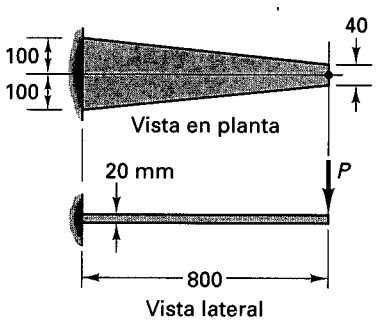


Fig. P17-2

17-2. Usando la ecuación 17-11, determine la deflexión vertical, en mm, del extremo libre del voladizo mostrado en la figura debido a la aplicación de la fuerza $P = 500$ N. Considere sólo deformación por flexión. $E = 200$ GPa.

17-3. Usando la ecuación 17-11 y aprovechando la simetría, determine las deflexiones por flexión en los puntos de carga debido a la aplicación de ambas fuerzas P en la viga elástica mostrada en la figura.

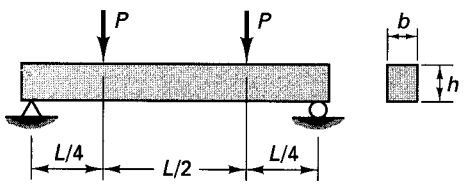


Fig. P17-3

17-4. Usando la ecuación 17-11 y aprovechando la simetría, determine las deflexiones por flexión en los puntos de carga debido a la aplicación de ambas fuerzas P en la viga elástica mostrada en la figura. El momento de inercia de la sección transversal a la mitad de la viga es I_o.

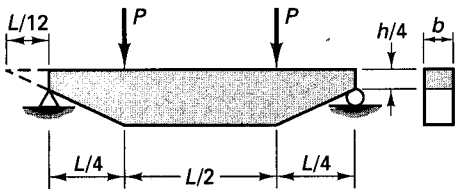


Fig. P17-4

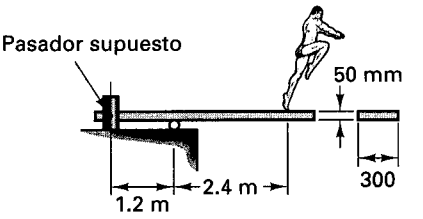


Fig. P17-5

17-5. Un hombre con peso de 80 kg salta de un trampolín, como se muestra en la figura, desde una altura de 0.6 m. ¿Qué esfuerzo de flexión máximo generará esto en el tablón? El tablón tiene una sección transversal de 50 × 300 mm y un $E = 12$ GPa. Use la ecuación 17-11 para determinar las características de deflexión del tablón.

Secciones 17-5 y 17-6

Todos los problemas de estas dos secciones deben resolverse usando el método de la fuerza virtual. Para los problemas planos, la siguiente notación es aplicable: Δ_V y Δ_H *son, respectivamente, las deflexiones vertical y horizontal y* θ *es la rotación de un elemento en un punto específico.* En cada caso, indique claramente la *dirección* y el *sentido* de la cantidad calculada.

Armaduras. *Considere sólo deformaciones axiales.*

17-6. En el ejemplo 17-1, determine Δ_H para el punto B debido a las tres causas enumeradas.

17-7. Para el arreglo plano de mástil y pescante mostrado en la figura, (a) determine la Δ_V de la carga W causada por un alargamiento de 0.5 in de la barra AB. (b) ¿Cuánto debe acortarse la barra BC para llevar el peso W a su posición original?

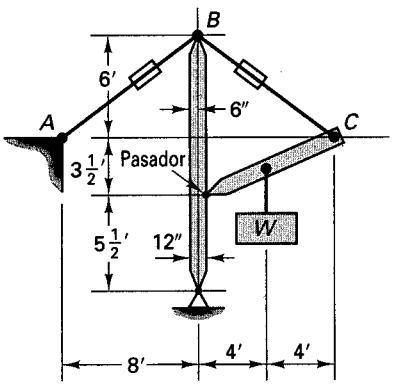


Fig. P17-7

17-8. Un sistema de tres barras articuladas, cada una con la misma área A de sección transversal, está cargado como se muestra en la figura. (a) Determine Δ_V y Δ_H del nodo B debido a la fuerza aplicada P. (b) Si por medio de un templador la longitud del miembro AC es acortada 12 mm, ¿qué Δ_V y Δ_H tiene lugar en el punto B?

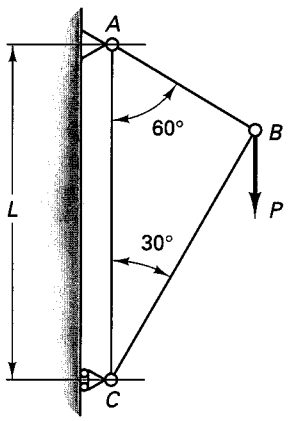


Fig. P17-8

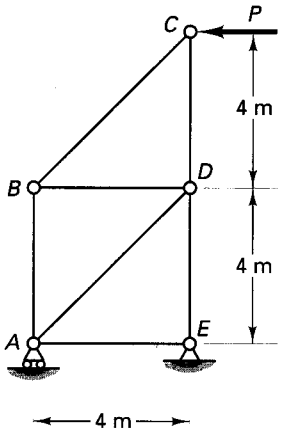


Fig. P17-9

17-9. Para la armadura plana mostrada en la figura, determine Δ_V y Δ_H del nodo C debido a la fuerza aplicada $P = 10$ kN. Por simplicidad, suponga $AE = 1$ para todos los miembros.

17-10. Para la armadura en el problema 17-9, determine la deflexión relativa entre los nodos B y E causada por la fuerza aplicada $P = 10$ kN. (*Sugerencia*: Coloque fuerzas unitarias iguales y opuestas, una en el nodo B y la otra en el nodo E, a lo largo de una línea que los conecte.)

17-11. Para la armadura mostrada en la figura, determine D_V en el nodo B debido a la fuerza vertical aplicada $P = 9$ k en B. Por simplicidad, suponga que L/AE es la unidad para todos los miembros.

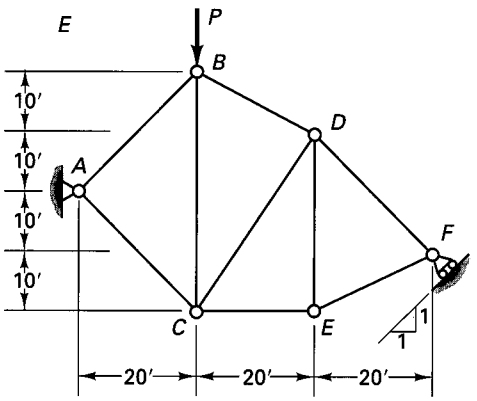


Fig. P17-11

Vigas. *Considere sólo deformaciones por flexión.*

17-12. Una viga simplemente apoyada de longitud L y EI constante soporta una carga uniformemente distribuida hacia abajo w_o. Encuentre la Δ_V máxima debido a w_o.

17-13. Para la viga en el problema 17-3, encuentre la Δ_V máxima debido a las dos fuerzas aplicadas.

17-14. Para la viga en el problema 17-3, encuentre la Δ_V y/o θ, según se requiera, en la fuerza izquierda P debido a ambas fuerzas aplicadas.

17-15. Una viga simplemente apoyada de longitud L y EI constante soporta una carga uniformemente distribuida hacia abajo w_o. Determine Δ_V y/o θ, según se requiera, debido a w_o a una distancia $L/3$ del soporte izquierdo.

17-16 y 17-17. Determine Δ_V y/o θ, según se requiera, en el centro del claro, debido a las cargas aplicadas mostradas en las figuras. EI es constante.

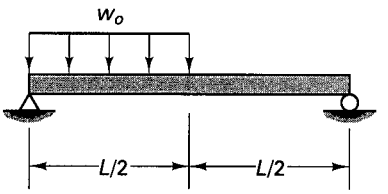


Fig. P17-16

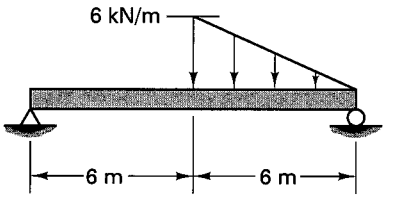


Fig. P17-17

17-18. Encuentre Δ_V y/o θ, según se requiera, en el punto de aplicación de la fuerza P para la viga de sección transversal variable mostrada en la figura.

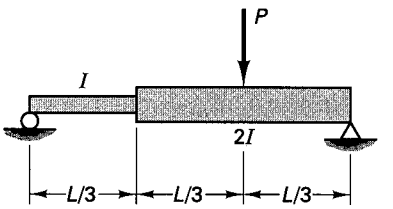


Fig. P17-18

17-19. Para la viga en voladizo mostrada en la figura, determine (a) Δ_V bajo la fuerza aplicada y (b) Δ_V bajo el extremo libre. EI es constante.

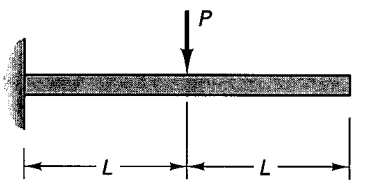


Fig. P17-19

17-20. Encuentre la deflexión en el punto de aplicación de la fuerza P. EI es constante.

17-21. Para la viga con voladizo mostrada en la figura, encuentre Δ_V y/o θ, según se requiera, en el punto de aplicación del par M_o. EI es constante.

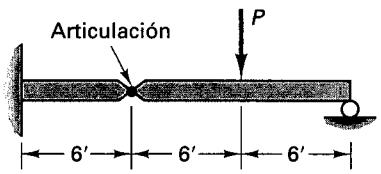


Fig. P17-20

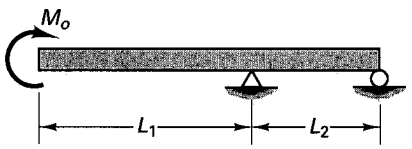


Fig. P17-21

Marcos rígidos. *Considere sólo deformaciones por flexión.*

17-22. Una barra plana doblada de EI constante tiene las dimensiones mostradas en la figura. Determine Δ_V, Δ_H, o θ, según se requiera, en el extremo libre debido a la aplicación de la fuerza P. Comente sobre el método de la fuerza virtual en comparación con el enfoque geométrico basado en las ecuaciones diferenciales y superposición visto en el capítulo 14.

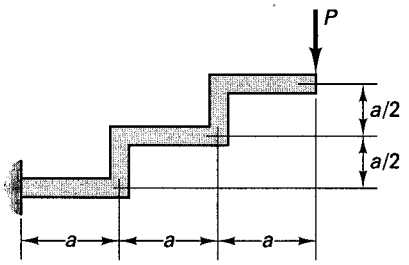


Fig. P17-22

17-23 al 17-29. Para los marcos planos mostrados en las figuras, determine Δ_V, Δ_H, o θ para el punto A, debido a la carga aplicada. En todos los casos, suponga EI constante. [*Sugerencia*: Para facilitar la solución, para cada segmento de marco, sitúe el origen de x de manera que se obtengan las expresiones más simples para $m(x)$ y $M(x)$.]

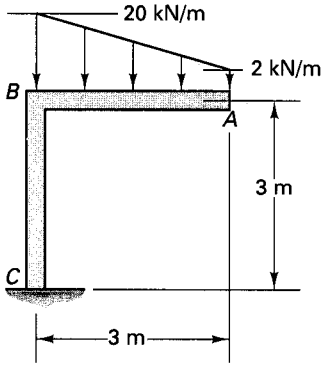


Fig. P17-23

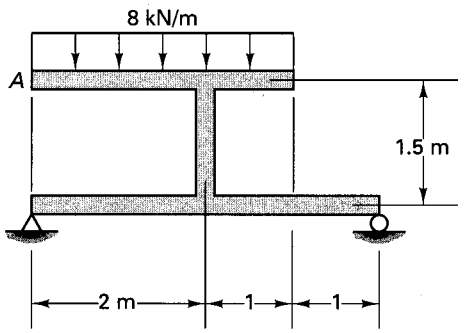


Fig. P17-24

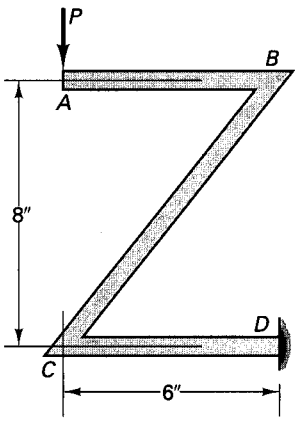


Fig. P17-25

17-20. Encuentre la deflexión en el punto de aplicación de la fuerza P. EI es constante.

17-21. Para la viga con voladizo mostrada en la figura, encuentre Δ_V y/o θ, según se requiera, en el punto de aplicación del par M_o. EI es constante.

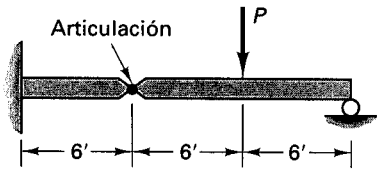


Fig. P17-20

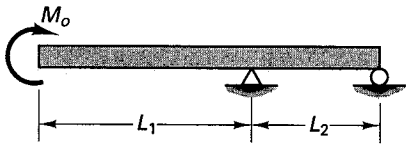


Fig. P17-21

Marcos rígidos. *Considere sólo deformaciones por flexión.*

17-22. Una barra plana doblada de EI constante tiene las dimensiones mostradas en la figura. Determine Δ_V, Δ_H, o θ, según se requiera, en el extremo libre debido a la aplicación de la fuerza P. Comente sobre el método de la fuerza virtual en comparación con el enfoque geométrico basado en las ecuaciones diferenciales y superposición visto en el capítulo 14.

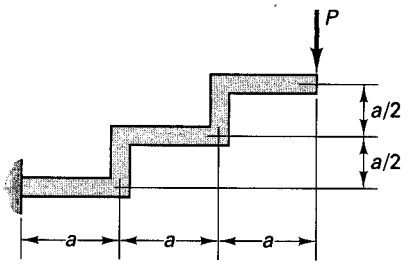


Fig. P17-22

17-23 al 17-29. Para los marcos planos mostrados en las figuras, determine Δ_V, Δ_H, o θ para el punto A, debido a la carga aplicada. En todos los casos, suponga EI constante. [*Sugerencia*: Para facilitar la solución, para cada segmento de marco, sitúe el origen de x de manera que se obtengan las expresiones más simples para $m(x)$ y $M(x)$.]

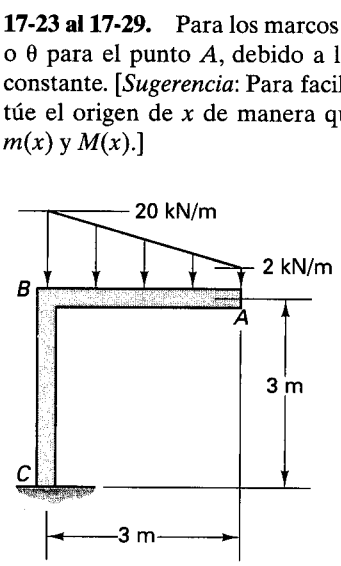


Fig. P17-23

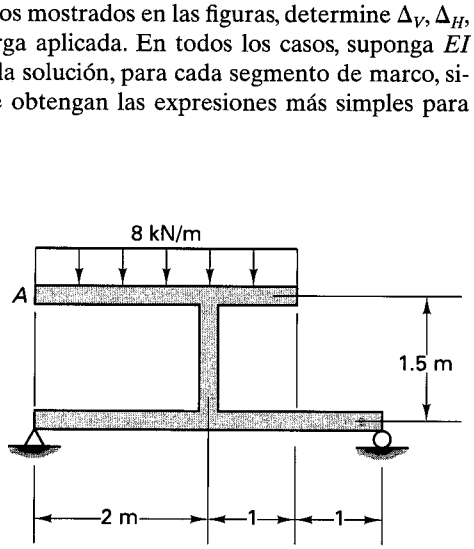


Fig. P17-24

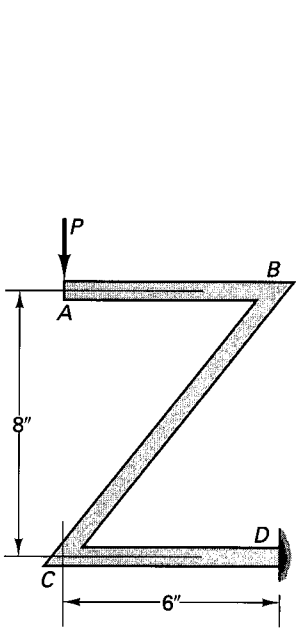


Fig. P17-25

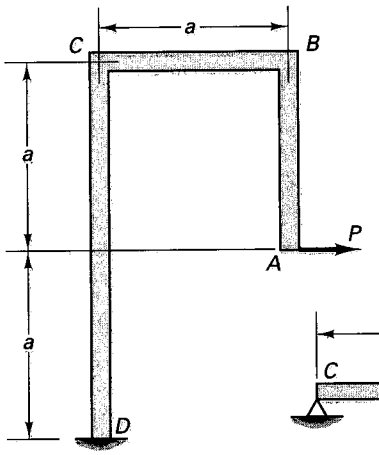


Fig. P17-26

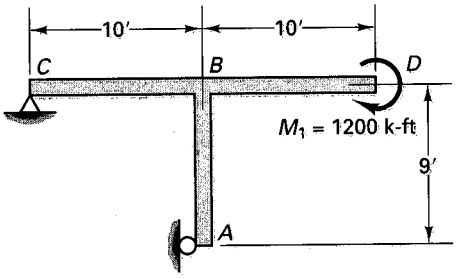


Fig. P17-27

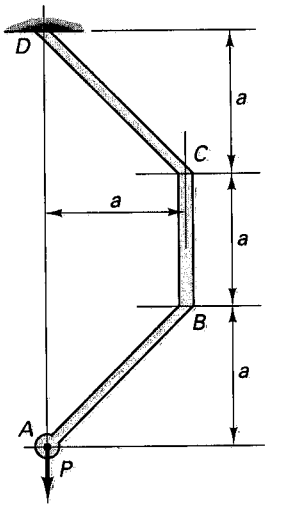


Fig. P17-28

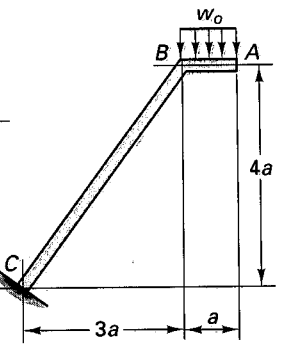


Fig. P17-29

17-30 al 17-33. Para los marcos planos mostrados en las figuras, determine Δ_V, Δ_H, o θ según se requiera, para los puntos A y B, debido a la carga aplicada. En todos los casos, EI es constante.

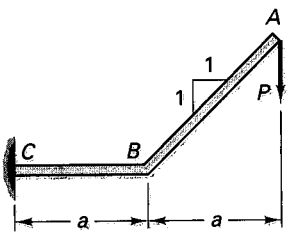


Fig. P17-30

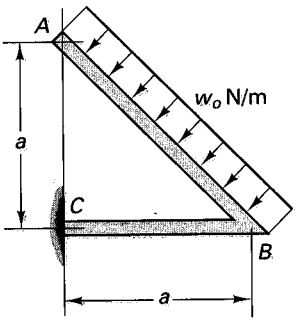


Fig. P17-31

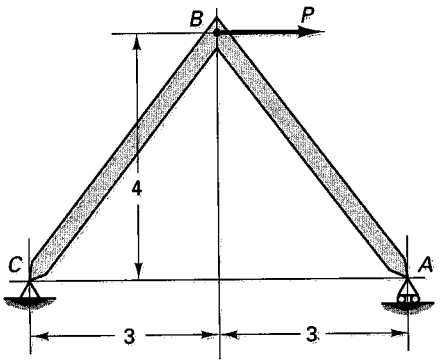


Fig. P17-32

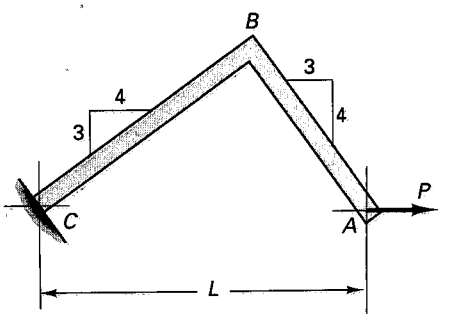


Fig. P17-33

Marcos. *Considere deformaciones axiales y por flexión.*

17-34. Dos alambres de acero BC y CD ($A = 0.10$ in^2 cada uno) están dispuestos como se muestra en la figura. En D, el alambre CD está unido a un soporte rígido; en B, el alambre CB está unido a un voladizo vertical AB ($A = 2$ in^2, $I = 6$ in^4). Determine la deflexión vertical en C causada al aplicar la fuerza $P = 1600$ lb. Ignore la contribución de la deformación cortante.

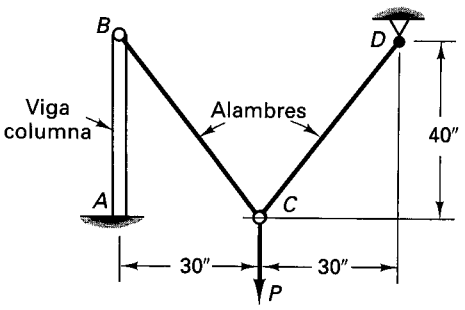


Fig. P17-34

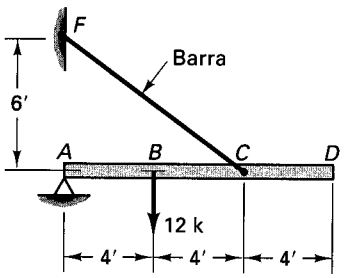


Fig. P17-35

17-35. Para el sistema estructural plano de aluminio mostrado en la figura, determine la deflexión vertical de D debido a la fuerza aplicada de 12 k. Para la barra, $A = 0.5$ in^2; para la viga, $A = 4$ in^2 e $I = 15$ in^4. Sea $E = 10 \times 10^3$ ksi.

17-36. En el problema anterior se determinó que debido a la fuerza aplicada de 12 k, el extremo D se mueve 1.57 in hacia arriba. Suponiendo que, sin retirar esta fuerza, es necesario regresar el punto D a su posición inicial para hacer una conexión, ¿qué cambio se requiere en la longitud de la barra CF? Este cambio en longitud puede lograrse por medio de un templador.

17-37. Una barra inclinada de acero de 2 m de longitud que tiene una sección transversal de 4000 mm^2 y un I de 8.53×10^6 mm^4, está soportada como se muestra en la figura. La barra DB de acero tiene una sección transversal de 600 mm^2. Determine la deflexión hacia abajo del punto C debido a la aplicación de la fuerza vertical de $2\sqrt{2}$ kN. Sea $E = 200$ GPa.

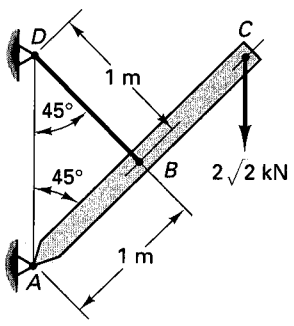


Fig. P17-37

17-38. Un sistema plano consiste en un voladizo inclinado y en las barras BC y CD, como se muestra en la figura. Determine Δ_V y/o Δ_H, según se requiera, del nodo C debido a la aplicación de la fuerza $P = 300$ N. El área transversal de cada barra es de 10 mm^2 y la del voladizo es de 400 mm^2. Para el voladizo, $I = 10^4$ mm^4. Para cada miembro, $E = 200$ GPa.

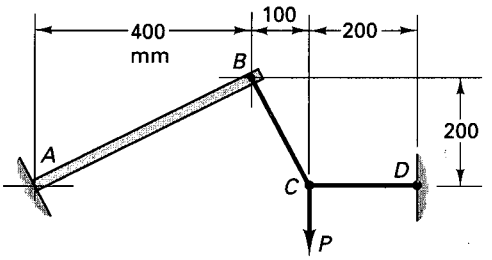


Fig. P17-38

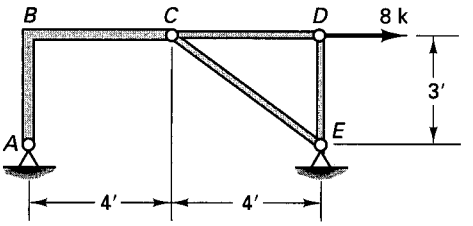


Fig. P17-39

17-39. Una estructura plana consiste en un marco ABC resistente a momentos y en una armadura CDE con nodos articulados. Determine Δ_V y/o Δ_H en C, según se requiera, debido a la fuerza horizontal de 8k en D. Para todos los miembros, $EI = 800$ k-ft^2 y $EA = 500$ k. Resuelva el problema usando unidades de k y ft.

17-40. Para los datos dados en el problema 17-39, determine la rotación del miembro CD debido a la fuerza aplicada en D. (*Sugerencia*: Aplique fuerzas iguales y opuestas en C y D, generando un par unitario.)

Miembros curvos. *Ignore las deformaciones debidas al cortante directo.*

17-41. Un miembro en forma de U con EI constante tiene las dimensiones mostradas en la figura. Determine la deflexión de las fuerzas aplicadas al alejarse una de otra debido sólo a flexión.

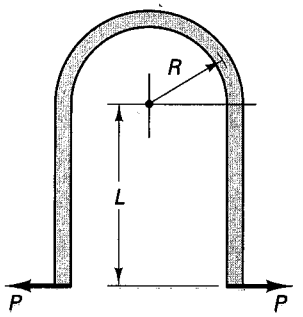


Fig. P17-41

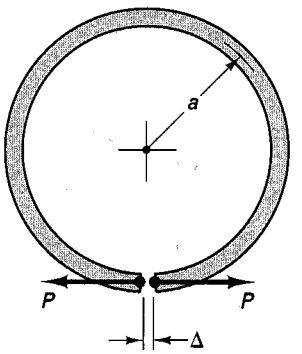


Fig. P17-42

17-42. Para instalar un anillo escindido usado como retén sobre una flecha mecánica, es necesario abrir un espacio de tamaño Δ aplicando fuerzas P, como se muestra en la figura. Si la EI de la sección transversal del anillo es constante, determine la magnitud requerida de las fuerzas P. Considere sólo efectos de flexión.

Deformaciones en tres dimensiones. *Ignore las deformaciones debidas al cortante directo.*

17-43. Una barra con sección transversal circular es doblada para darle la forma de un semicírculo que se empotra en un extremo, como se muestra en la figura. Determine la deflexión del extremo libre causada por la aplicación de la fuerza P actuando normalmente al plano del semicírculo. Ignore la contribución de la deformación por cortante.

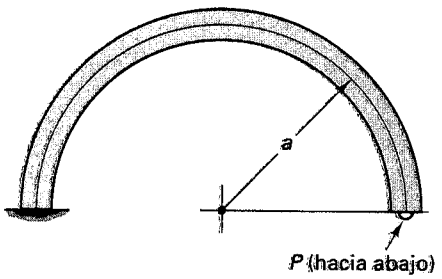


Fig. P17-43

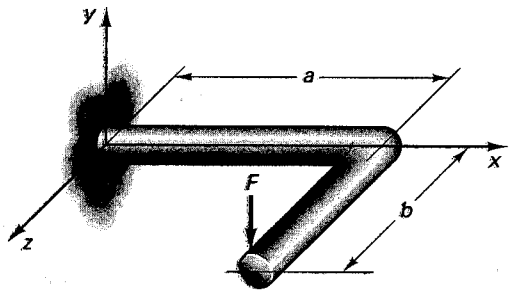


Fig. P17-44

17-44. A una barra circular maciza se le da la forma mostrada en la figura y se empotra en un extremo. Determine las tres traslaciones Δ_x, Δ_y y Δ_z, y las tres rotaciones θ_{xy}, θ_{yz} y θ_{zx}, del extremo libre debido a la fuerza aplicada P. Las constantes A, I, J, E y G para la barra son dadas.

Sección 17-7

17-45. Un sistema de barras de acero, cada una con área transversal de 130 mm^2, está dispuesto como se muestra en la figura. A 10°C, el nodo D está a 3 mm de su soporte. (a) ¿A qué temperatura puede hacerse la conexión sin someter a esfuerzo ninguno de los miembros? Sea $E = 200$ GPa y $\alpha = 12 \times 10^{-6}$/°C. (b) ¿Qué esfuerzos se desarrollarán en los miembros si después de hacer la conexión en D la temperatura cae a -10°C?

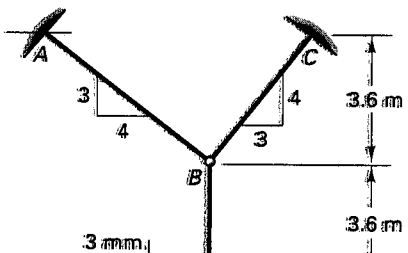


Fig. P17-45

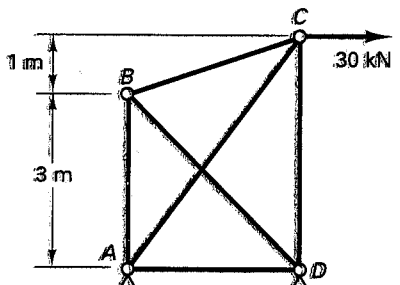


Fig. P17-46

17-46. Encuentre la fuerza en la barra AC de la armadura plana en la figura debido a la fuerza horizontal de 30 kN en C. Para el miembro AC, sea la relación $L/AE = 0.50$, y para todos los otros miembros igual a la unidad.

17-47. (a) Para la armadura plana mostrada en la figura, determine las fuerzas axiales en todos los miembros debido a la fuerza vertical de 18 kN en B. (b) Usando por lo menos dos sistemas virtuales diferentes, encuentre la deflexión vertical en B causada por la fuerza aplicada en B. Sean los valores relativos de L/A los siguientes: 1 para AB, 2 para DB y 3 para CB. Considere como redundante el miembro BC.

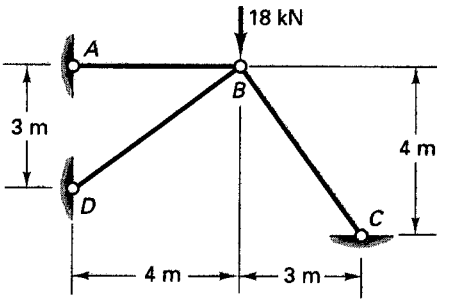


Fig. P17-47

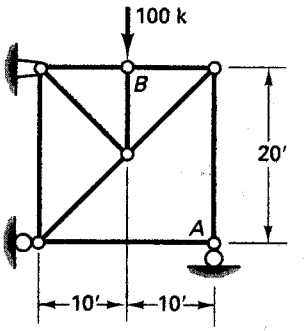


Fig. P17-48

17-48. Para la armadura plana mostrada en la figura, determine la reacción en A, tratándola como redundante, debido a la fuerza vertical en B. Para todos los miembros, L/A es igual a la unidad.

17-49. Para la viga mostrada en la figura, (a) determine la reacción en A, tratándola como redundante. (b) Determine el momento en B, tratándolo como redundante. (*Sugerencia*: Use la solución dada al problema 14-51.)

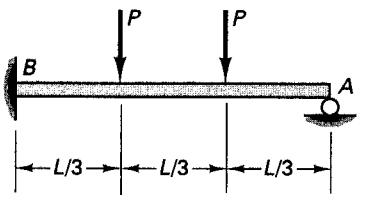


Fig. P17-49

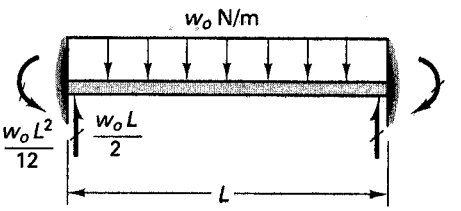


Fig. P17-50

17-50. Una viga uniformemente cargada y empotrada en ambos extremos tiene las reacciones mostradas en la figura. Usando una viga simplemente apoyada con una carga unitaria en el centro como sistema virtual, determine la deflexión máxima para la viga real.

17-51. Una pequeña junta de expansión de un tubo en un plano puede idealizarse como se muestra en la figura. Las articulaciones A y B son fijas. Obtenga una expresión para las reacciones horizontales R causadas por el cambio de temperatura ΔT en el tubo. El coeficiente de expansión térmica para el tubo es α y su rigidez por flexión es EI. Considere sólo deformaciones por flexión.

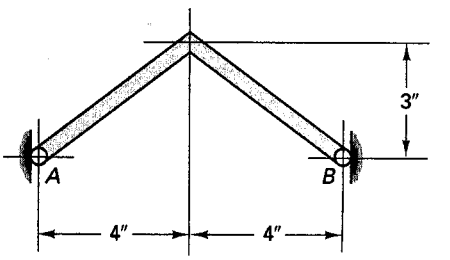


Fig. P17-51

17-52. Un anillo circular de material lineal elástico está cargado por dos fuerzas iguales y opuestas P, como se muestra en la figura. Para este anillo, A e I son constantes. (a) Determine el momento flexionante máximo causado por las fuerzas aplicadas y dibuje el diagrama completo de momento flexionante. (b) Encuentre la disminución del diámetro AB causada por las fuerzas aplicadas. Considere sólo deformaciones por flexión. (*Sugerencia*: Aproveche la simetría y considere el momento en A como redundante.)

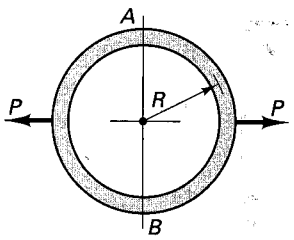


Fig. P17-52

Sección 17-8

17-53. Usando el método del desplazamiento virtual, (a) determine las fuerzas en los miembros BD y BC en el problema 17-47 suponiendo que el miembro BA es retirado del sistema, y (b) encuentre las fuerzas en los tres miembros en la estructura completa.

17-54. Para la armadura elástica mostrada en la figura y usando el método del desplazamiento virtual, (a) determine las fuerzas en los miembros AC, AD y AE suponiendo que AB está inactiva debido a la fuerza aplicada en A, y (b) encuentre las fuerzas en los cuatro miembros en la estructura completa. Los valores relativos L/A son los siguientes: 0.40 para AB y AD, 0.20 para AC y 0.80 para AE.

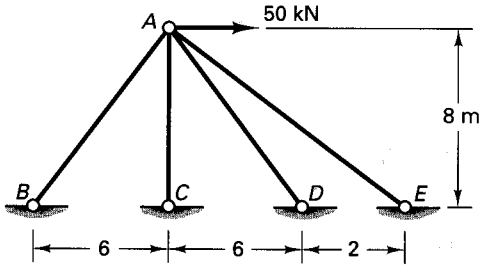


Fig. P17-54

18

Métodos clásicos de energía

18-1. Introducción

Este capítulo analiza los métodos clásicos de energía para resolver problemas similares a los resueltos usando los métodos del trabajo virtual que fueron analizados en el capítulo anterior. Esos métodos se basan en considerar la energía interna de deformación o la energía de deformación complementaria y el trabajo externo correspondiente. Las ecuaciones que se deducen se especializan para *sistemas elásticos lineales* y se conocen como teoremas de Castigliano. Se presentan ejemplos ilustrativos para casos estáticamente determinados e indeterminados. En muchos casos las soluciones numéricas son idénticas a las de los métodos del trabajo virtual. El último enfoque, debido a su amplio uso en las formulaciones del elemento finito, es el que se prefiere actualmente.

El capítulo concluye con un breve análisis de los conceptos de la energía elástica para determinar las cargas de pandeo en columnas.

18-2. Observaciones generales

Las ecuaciones de la energía de deformación elástica para aplicaciones en la mecánica de sólidos se resumieron en la sección 17-2. El uso directo de esas ecuaciones, para determinar deflexiones junto con la ley de conservación de la energía e igualar la energía total clásica del sistema al trabajo total hecho por las fuerzas externamente aplicadas, es muy limitado. Esto ya se señaló en la Sección 17-3. Un enfoque efectivo para ampliar el alcance de las posibles aplicaciones fue analizado en la parte B del capítulo anterior. Aquí se considerará un enfoque clásico alternativo basado en la energía de deformación elástica y en la energía complementaria de deformación. Esto requiere la deducción de teoremas apropiados.

18-3. Teoremas de la energía de deformación y de la energía de deformación complementaria

En la Sección 2-5 se indicó que algunos materiales, durante la carga y la descarga, responden de manera no lineal a lo largo de la misma curva esfuerzo-deformación unitaria, figura 2-13(b). Tales materiales son elásticos aunque no obedecen la ley de Hooke. Es conveniente considerar tales materiales *elásticos no lineales* al deducir los dos teoremas basados en conceptos de la energía de deformación. De esta manera, la distinción entre energía de deformación elástica y energía de deformación complementaria es claramente evidente. La deducción de los dos teoremas básicos para sistemas no lineales y lineales es esencialmente la misma. Esos teoremas se especializan en la próxima sección para la solución de los problemas elásticos lineales considerados en este texto.

Como ejemplo rudimentario de la deducción de los teoremas, consideramos la barra axialmente cargada mostrada en la figura 18-1(a). El diagrama esfuerzo-deformación unitaria elástico no lineal para el material de esta barra se muestra en la figura 18-1(b). Multiplicando el esfuerzo normal σ en la barra por el área transversal A de la barra, se obtiene la fuerza axial P. Similarmente, el producto de la deformación unitaria axial ε por la longitud L de la barra da el alargamiento Δ de ésta. El diagrama P-Δ en la figura 18-1(c), excepto por la escala, corresponde en detalle al diagrama σ-ε. Como en la mecánica de sólidos de la ingeniería es costumbre trabajar con *resultantes de esfuerzos*, sólo el diagrama P-Δ será considerado en el siguiente análisis.

De acuerdo con el diagrama en la figura 18-1(c), cuando la fuerza P_1 es incrementada por dP_1, la barra se alarga $d\Delta_1$. Por tanto, despreciando infinitesimales de orden superior, el incremento del trabajo externo $dW_e = P_1\, d\Delta_1$. De acuerdo con la ecuación 17-11, este incremento en el trabajo externo debe ser igual al incremento en la energía de deformación unitaria del sistema, ya que $dW_e = dU$. La franja vertical estrecha en la figura 18-1(c) corresponde a $P_1\, d\Delta_1$, y el área bajo la curva es la energía de deformación total U, que es igual a W_e. Formulado esto matemáticamente,

$$W_e = U = \int_0^{\Delta} P_1\, d\Delta_1 \qquad (18\text{-}1)$$

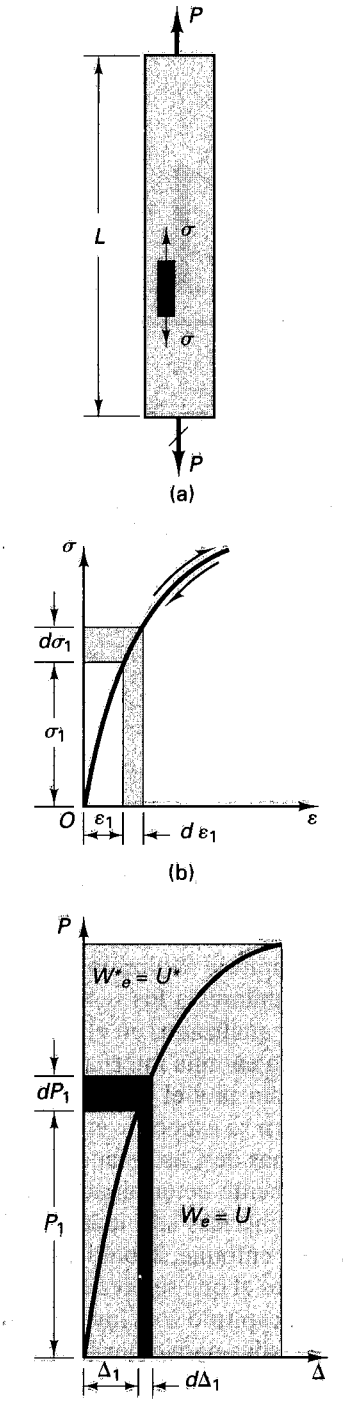


Fig. 18-1 Trabajo y trabajo complementario; energía de deformación unitaria y energía de deformación unitaria complementaria.

La derivada de esta relación con respecto al límite superior da

$$\frac{dU}{d\Delta} = P \tag{18-2}$$

Una generalización de este procedimiento, que se hace a continuación, establece el primer teorema básico.

Una expresión análoga puede formularse incrementando Δ_1, en $d\Delta_1$ causando un incremento de fuerza dP_1, figura 18-1(c). Entonces, *definiendo* un incremento en el trabajo *complementario* externo $dW_e^* = \Delta_1\, dP_1$, puede notarse que esta cantidad está representada por la franja horizontal oscura en la figura. Por analogía con U, la integral de esta área infinitesimal arriba de la curva *define* la *energía de deformación complementaria* U^* y se sigue que $U^* = W_e^*$. Con base en esto, puede escribirse

$$U^* = W_e^* = \int_0^P \Delta_1\, dP_1 \tag{18-3}$$

La derivada de esta relación con respecto al límite superior da

$$\frac{dU^*}{dP} = \Delta \tag{18-4}$$

Este es el prototipo del segundo teorema básico.[1]

Para generalizar estos resultados a problemas donde varias fuerzas (y/o momentos) son aplicadas simultáneamente, consideremos el cuerpo estáticamente determinado externamente mostrado en la figura 18-2. Las resultantes de esfuerzos en tal miembro o grupo de miembros, en cualquier problema dado, deben estar relacionadas con los desplazamientos por la *misma función no lineal (o lineal)*. Con base en esto se deduce un teorema general correspondiente a la ecuación 18-4.

La energía de deformación complementaria U^* para un cuerpo estáticamente determinado, como el mostrado en la figura 18-3(a), se define como una función de las fuerzas aplicadas externamente, $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_n$; $M_1, M_2, \ldots, M_p$; es decir,

$$U^* = U^*(P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_n; M_1, M_2, \ldots, M_j, \ldots, M_p) \tag{18-5}$$

Un incremento infinitesimal en esta función δU^* está dado por la diferencial total como

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_1}\delta P_1 + \frac{\partial U^*}{\partial P_2}\delta P_2 + \cdots + \frac{\partial U^*}{\partial P_k}\delta P_k + \cdots + \frac{\partial U^*}{\partial M_j}\delta M_j + \cdots \tag{18-6}$$

En esta expresión, las δP y las δM se usan en vez de diferenciales ordinarias para enfatizar la *independencia lineal* de esas cantidades. Desde este

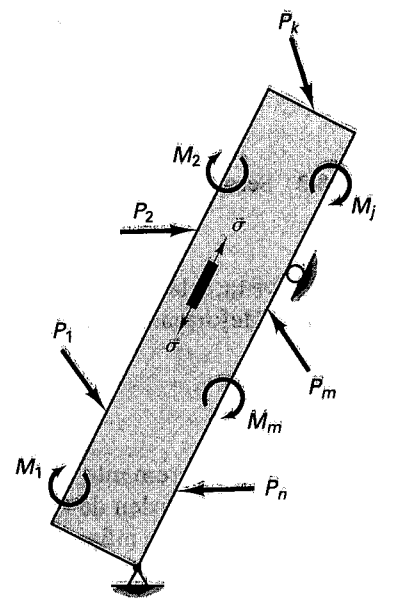


Fig. 18-2 Miembro estáticamente determinado.

[1] El concepto de energía complementaria y deducción de esta ecuación es generalmente atribuido a F. Engesser, quien lo publicó en un artículo en 1889. Véase S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials* (Historia de la resistencia de materiales), Nueva York, McGraw-Hill, 1953, p. 292.

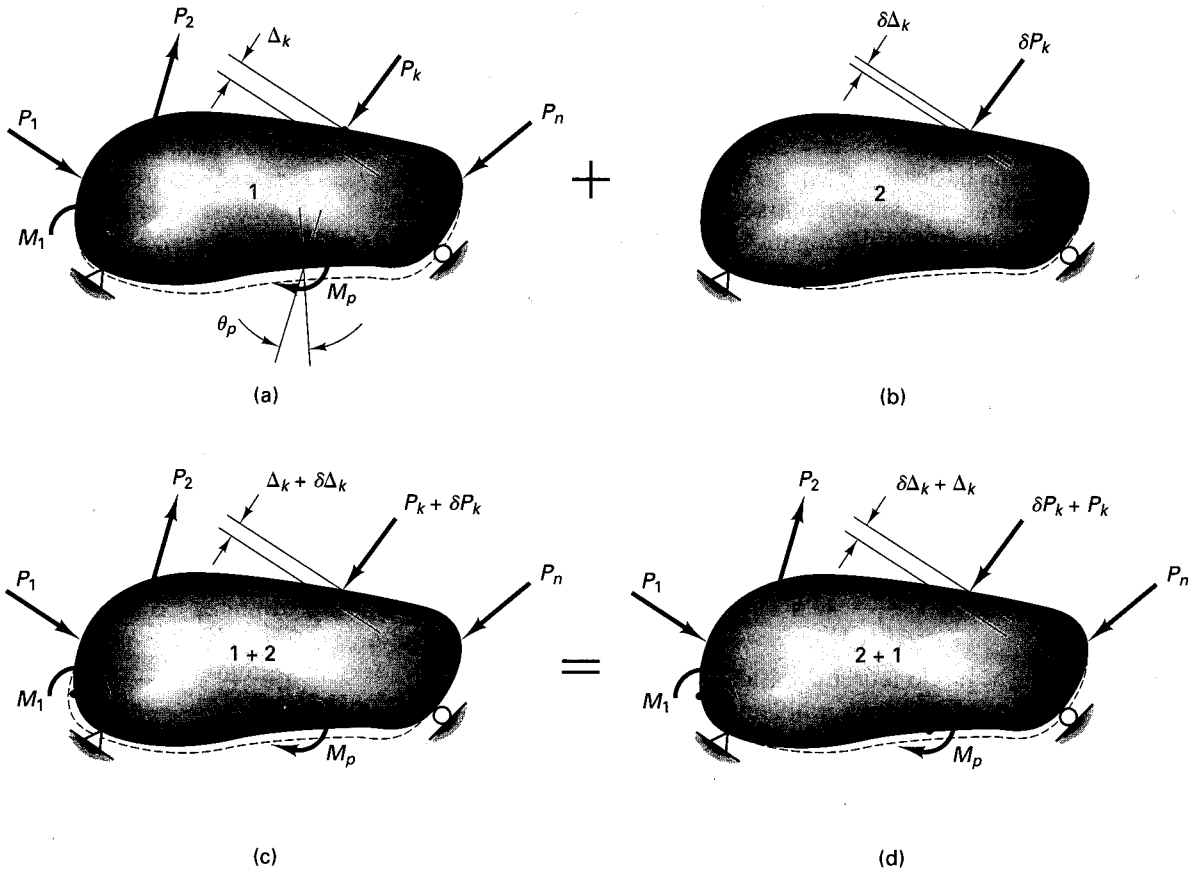


Fig. 18-3 Secuencias alternativas de carga para un sistema elástico.

punto de vista, si la fuerza P_k fuese incrementada por δP_k, el incremento de energía de deformación complementaria sería

$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_k}\delta P_k \tag{18-7}$$

La adición del incremento de fuerza δP_k está ilustrada en la figura 18-3(c). Si se invirtiese el orden de aplicación de la carga, figura 18-3(d), se aplicaría primero la fuerza infinitesimal δP_k al sistema, figura 18-3(b). Entonces, ya aplicada al sistema, no trabajaría al moverse a través de una deflexión Δ_k causada por la aplicación de las cargas mostradas en la figura 18-3(a). Este trabajo puede ser igualado a la franja horizontal en la figura 18-1(c) y, por definición, es un incremento en el *trabajo complementario* δW_e^*. Por consiguiente,

$$\delta W_e^* = \Delta_k\,\delta P_k \tag{18-8}$$

Sin embargo, como $W_e^* = U_e^*$, igualando las ecuaciones 18-7 y 18-8 y cancelando δP_k,

$$\Delta_k = \frac{\partial U^*}{\partial P_k} \tag{18-9}$$

que es la generalización de la ecuación 18-4 y da la deflexión Δ_k en la dirección de la fuerza P_k.

Reteniendo una derivada con respecto a M_j en la ecuación 18-6 y procediendo como antes,

$$\theta_j = \frac{\partial U^*}{\partial M_j} \tag{18-10}$$

donde θ_j es el giro en la dirección de M_j.

De manera análoga a la deducción previa, la energía de deformación U puede definirse como función del desplazamiento Δ_k y/o rotación θ_j, así como de las relaciones constitutivas conocidas del miembro, (véase la ecuación 17-7). Con base en esto,

$$U = U(\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots, \Delta_n; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_j, \ldots, \theta_m) \tag{18-11}$$

La diferencial total para este caso es

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Delta_1}\delta\Delta_1 + \frac{\partial U}{\partial \Delta_2}\delta\Delta_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \Delta_k}\delta\Delta_k + \cdots + \frac{\partial U}{\delta\theta_j}\delta\theta_j + \cdots \tag{18-12}$$

Si se permitiese que sólo un desplazamiento ocurriese con el otro fijo, la última relación se reduciría a

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial \Delta_k}\delta\Delta_k \tag{18-13}$$

Para este caso, el trabajo externo $\delta W_e = P_k\,\delta\Delta_k$ y corresponde a la franja vertical estrecha en la figura 18-1(c). Por tanto, como $\delta W_e = \delta U$, después de sustituir las cantidades previas en esta relación y simplificar,

$$P_k = \frac{\partial U}{\partial \Delta_\kappa} \tag{18-14}$$

Esta relación es una generalización de la ecuación 18-2 y da la fuerza externa que actúa en el punto k si U se expresa como una función continua de desplazamientos y rotaciones. Una expresión similar puede escribirse para un momento externo actuando en un punto tomando la derivada de U con respecto al ángulo de rotación tal como el θ_j.

En la próxima sección, las expresiones generales son especializadas para materiales elásticos lineales.

18-4. Teoremas de Castigliano

Los teoremas[2] de Castigliano son aplicables a *sistemas linealmente elásticos con deformaciones pequeñas*. Los enunciados matemáticos de esos teoremas son los mismos que los obtenidos en la sección previa para materiales elásticos no lineales. Sin embargo, como se muestra en la figura 18-4, para material linealmente elástico, la energía de deformación elástica U es igual a la energía complementaria de deformación U^*; es decir,

$$U = U^* \tag{18-15}$$

El trabajo externo W_e es también igual al trabajo complementario externo W_e^*. Por tanto, usando las ecuaciones 18-9 y 18-10, debido a la ecuación 18-15, puede expresarse el *segundo* teorema de Castigliano para material linealmente elástico como

$$\Delta_k = \frac{\partial U^*}{\partial P_k} = \frac{\partial U}{\partial P_k} \tag{18-16}$$

$$\theta_j = \frac{\partial U^*}{\partial M_j} = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{18-17}$$

En ambas ecuaciones, si U se expresa como función de fuerzas externamente aplicadas, Δ_k (o θ_j) es la deflexión (o rotación) en el sentido de la fuerza (o momento) P_k (o M_j).

La expresión para el *primer* teorema de Castigliano sigue siendo la misma que antes para materiales elásticos no lineales y la ecuación 18-14 se repite aquí para referencia:

$$P_k = \frac{\partial U}{\partial \Delta_k} \tag{18-18}$$

donde, si U se expresa como función de desplazamientos, P_k es la fuerza (o momento) en el sentido de la deflexión (o rotación) Δ_k (o θ_k).

Debe observarse en las ecuaciones 17-5 a la 17-9 que la energía de deformación U para materiales linealmente elásticos es de forma cuadrática. Por tanto, al aplicar los teoremas de Castigliano, es conveniente formar las derivadas de U antes de llevar a cabo una solución completa del problema.

Es también importante notar que si una deflexión (rotación) se requiere donde ninguna fuerza (momento) está actuando, una fuerza (momento) *ficticia* debe aplicarse en el punto en consideración. Luego, después de aplicar la ecuación 18-16 o la 18-17, la fuerza ficticia se hace igual a cero para obtener los resultados deseados.

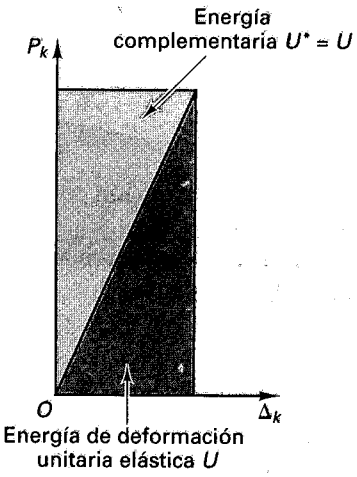


Fig. 18-4 Energías en materiales linealmente elásticos.

[2]Esos teoremas fueron obtenidos primero por el ingeniero italiano C. A. Castigliano en 1879. La extensión de los teoremas a los casos elásticos no lineales desarrollados en la sección precedente, como se indicó antes, es generalmente atribuida a F. Engesser de Karlsruhe. Los desarrollos adicionales de este enfoque se deben a H. M. Westergaard y J. H. Argyris. Véase J. H. Argyris, "Energy theorems and structural analysis," ("Teoremas de energía y análisis estructural"), *Aircraft Engineering*, **26**, (1954), y **27**, (1955). Esos artículos junto con otros por S. Kelsey, fueron publicados en forma de libro por Butterworth & Co., en 1960.

Se presentan a continuación varios ejemplos que ilustran la aplicación del segundo teorema de Castigliano a problemas elásticos lineales estáticamente determinados. En el ejemplo 18-8 se da una aplicación del primer teorema de Castigliano para un caso estáticamente indeterminado, donde el uso del teorema es más apropiado.

Ejemplo 18-1

Aplicando el segundo teorema de Castigliano, verifique los resultados de los ejemplos 3-9, 6-11 y 14-12.

SOLUCIÓN

En todos esos ejemplos han sido formuladas las expresiones para la energía de deformación interna U. Por tanto, una aplicación directa de la ecuación 18-16 o la 18-17 es todo lo que se necesita para obtener los resultados requeridos. En todos los casos, el material obedece la ley de Hooke.

Deflexión de una barra cargada axialmente (P = constante):

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \qquad \text{por consiguiente,} \qquad \Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL}{AE}$$

Rotación de una flecha circular (T = constante):

$$U = \frac{T^2L}{2I_PG} \qquad \text{por consiguiente,} \qquad \varphi \equiv \theta = \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{TL}{I_PG}$$

Deflexión de un voladizo rectangular debido a una carga P en el extremo libre:

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5AG} \qquad \text{por consiguiente,} \qquad \Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{6PL}{5AG}$$

Ejemplo 18-2

La ménsula del ejemplo 1-3 se muestra esquemáticamente en la figura 18-5. Compare la deflexión del punto B causada por la fuerza aplicada $P = 3$ kips usando el segundo teorema de Castigliano con el resultado encontrado en el ejemplo 3-4. Suponga que cada barra tiene área transversal constante, con $A_{AB} = A_1 = 0.125$ in^2 y $A_{BC} = A_2 = 0.219$ in^2. Considere, igual que antes, $E = 10.6 \times 10^3$ ksi.

SOLUCIÓN

De la ecuación 17-7, la energía de deformación elástica es

$$U = U^* = \sum_{k=1}^{2} \frac{P_k^2L_k}{2A_kE_k} = \frac{P_1^2L_1}{2A_1E} + \frac{P_2^2L_2}{2A_2E} \qquad (18\text{-}19a)$$

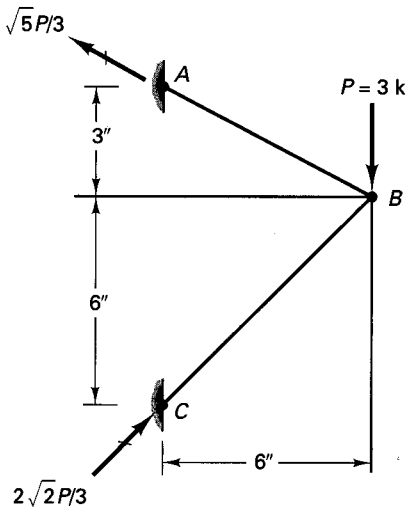


Fig. 18-5

Diferenciando con respecto a P se obtiene una expresión para la deflexión vertical Δ en B.

$$\Delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E}\frac{\partial P_1}{\partial P} + \frac{P_2 L_1}{A_2 E}\frac{\partial P_2}{\partial P} \qquad (18\text{-}19b)$$

Por estática, las fuerzas en las barras como *funciones* de la fuerza aplicada P son

$$P_{AB} = P_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}P \qquad \text{y} \qquad P_{BC} = P_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}P$$

Aquí, $A_1 = 0.125\ \text{in}^2$, $A_2 = 0.219\ \text{in}^2$, $L_1 = 3\sqrt{5}$ in y $L_2 = 6\sqrt{2}$.

Sustituyendo las cantidades anteriores en la ecuación 18-18b y efectuando las operaciones necesarias, se encuentra la deflexión Δ para $P = 3$ kips.

$$\Delta = \frac{(\sqrt{5}P/3) \times (3\sqrt{5})}{0.125 \times 10.6 \times 10^3}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{(-2\sqrt{2}P/3) \times (6\sqrt{2})}{0.219 \times 10.6 \times 10^3}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$= 0.002813P + 0.003249P = 0.006062P = 18.2 \times 10^{-3}\,\text{in}$$

Este resultado muy fácilmente obtenido, excepto por una pequeña discrepancia debida a errores de redondeo, concuerda con el encontrado por un método enteramente diferente en el ejemplo 3-4.[3]

---

[3]Una solución de este problema por el método de la fuerza virtual requiere el uso de la ecuación 17-26. Para una fuerza virtual unitaria hacia abajo aplicada en B, $\bar{P}_1 = \sqrt{5}/3$ y $\bar{P}_2 = -2\sqrt{2}/3$, lo que da una expresión idéntica para Δ.

Ejemplo 18-3

Una viga prismática elástica lineal está cargada como se muestra en la figura 18-6. Usando el segundo teorema de Castigliano, encuentre la deflexión debida a la flexión causada por la fuerza P aplicada en el centro de su claro.

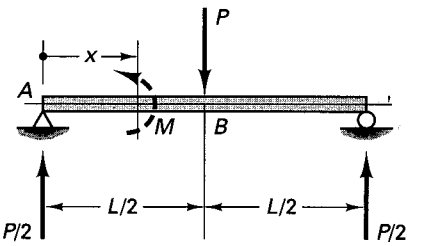


Fig. 18-6

SOLUCIÓN

La expresión para la energía interna de deformación por flexión está dada por la ecuación 17-8. Como, de acuerdo con el teorema de Castigliano, la deflexión requerida es una derivada de esta función, es conveniente diferenciar la expresión respecto a U antes de integrar. En problemas donde M es una función compleja, este esquema es particularmente útil. Para este fin, la siguiente relación es aplicable:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx \tag{18-20}$$

Procediendo según esta base, se tiene, de A a B:

$$M = +\frac{P}{2}x \qquad y \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{x}{2}$$

Sustituyendo esas relaciones[4] en la ecuación 18-20 y observando la simetría del problema,

$$\Delta = 2\int_0^{L/2} \frac{Px^2}{4EI}\,dx = +\frac{PL^3}{48EI}$$

El signo positivo indica que la deflexión tiene lugar en el sentido de la fuerza P aplicada.

[4]Note de nuevo que para una fuerza virtual unitaria hacia abajo en el centro del claro, $\overline{m} = x/2$, correspondiente a $\partial M/\partial P$.

Ejemplo 18-4

Usando el segundo teorema de Castigliano, determine la deflexión y el giro en el extremo de un voladizo cargado uniformemente, figura 18-7(a). EI es constante.

SOLUCIÓN

Ninguna fuerza está aplicada en el extremo del voladizo donde se buscan los desplazamientos. Por tanto, para poder aplicar el teorema de Castigliano, debe agregarse una fuerza ficticia[5] correspondiente al desplazamiento buscado. Entonces, como se muestra en la figura 18-7(b), además de la carga especificada se ha introducido la fuerza R_A. Esto permite determinar $\partial U/\partial R_A$, que con $R_A = 0$ da la deflexión vertical del punto A. Aplicando la ecuación 18-20 de esta manera, se tiene

$$M = -\frac{w_o x^2}{2} + R_A x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = +x$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{w_o x^2}{2} + R_A x\right)^0 (+x)\, dx = -\frac{w_o L^4}{8EI}$$

donde el signo negativo muestra que la deflexión es en sentido opuesto al de la fuerza R_A. Si R_A en la integración no se hiciese igual a cero, se encontraría la deflexión del extremo debida a w_o y a R_A.

El giro de la viga en A puede encontrarse de manera análoga. Se aplica un momento ficticio M_A en el extremo, figura 18-7(c) y los cálculos se hacen de la misma manera que antes:

$$M = -\frac{w_o x^2}{2} - M_A \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{w_o x^2}{2} - M_A\right)^0 (-1)\, dx = +\frac{w_o L^3}{6EI}$$

donde el signo indica que el sentido del giro del extremo coincide con el sentido supuesto para el momento ficticio M_A.

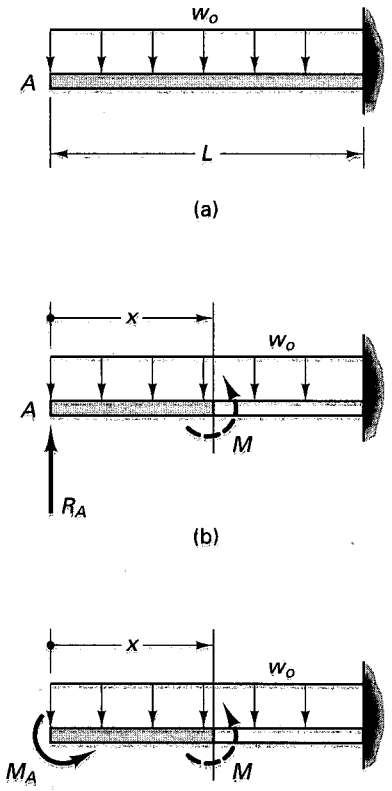


Fig. 18-7

[5]La aplicación de una fuerza ficticia o un par ficticio en A corresponde, respectivamente, a la aplicación de una fuerza virtual unitaria o de un par virtual unitario en A en el método de la fuerza virtual.

Ejemplo 18-5

Usando el segundo teorema de Castigliano, determine la deflexión horizontal para el marco elástico mostrado en la figura 18-8(a). Considere sólo la deflexión causada por flexión. La rigidez flexionante *EI* de ambos miembros es igual y constante.

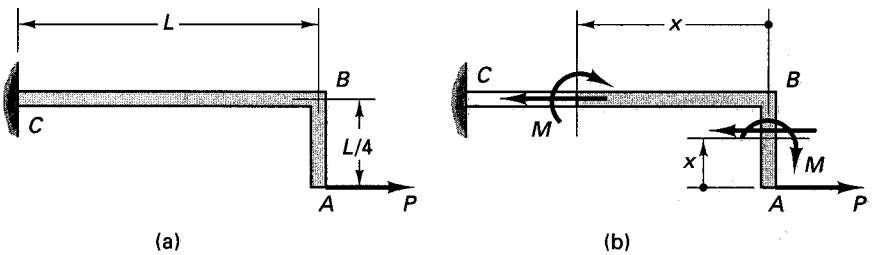


Fig. 18-8

SOLUCIÓN

La función de la energía de deformación es un escalar. Por tanto, las energías de deformación separadas para los diferentes elementos de un sistema elástico pueden sumarse algebraicamente. Después de determinada la energía total de deformación, su derivada parcial con respecto a una fuerza da el desplazamiento de esa fuerza. Para los problemas disponibles, la ecuación 18-20 es apropiada.

De A a B:

$$M = +Px \qquad \text{y} \qquad \partial M/\partial P = +x$$

De B a C:[6]

$$M = +\frac{PL}{4} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial P} = +\frac{L}{4}$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI}\int_0^{L/4} (+Px)(+x)dx$$

$$+ \frac{1}{EI}\int_0^{L}\left(+\frac{PL}{4}\right)\left(+\frac{L}{4}\right)dx = +\frac{13PL^3}{192EI}$$

Note la libre opción que se tiene para situar los ejes x coordenados y la convención de signos para los momentos flexionantes. Si la energía de deformación elástica incluyese la energía debida a la fuerza axial en el miembro BC y la energía por cortante del miembro AB, se encontraría también la deflexión causada por esos efectos. Sin embargo, la deflexión Δ_A debida a la flexión es generalmente dominante.

[6]El lector debería verificar la correspondencia de los términos $\partial M/\partial P$ con los causados por una fuerza virtual unitaria horizontal aplicada en A.

Si se requiere conocer la deflexión vertical del punto A, se aplica entonces una fuerza vertical ficticia F en A. Luego, igual que en el ejemplo anterior, $\partial U/\partial F$, con $F = 0$, da el resultado deseado. La rotación de cualquier sección normal para esta viga puede obtenerse de manera similar.

18-5. Sistemas estáticamente indeterminados

El segundo teorema de Castigliano puede ser generalizado para sistemas elásticos lineales estáticamente indeterminados. Las modificaciones necesarias consisten en expresar la energía de deformación no sólo como función de n fuerzas (y/o momentos) externamente aplicadas $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$, sino también de p *fuerzas redundantes* (y/o momentos) estáticamente indeterminadas $X_1, X_2, ..., X_p$. Un posible sistema de tales fuerzas se muestra en la figura 18-9. El número necesario de soportes seleccionados para mantener el equilibrio estático de la sección primaria (Sección 4-3) es excluido de la enumeración de las fuerzas redundantes. Con base en esto, la energía de deformación U para un sistema indeterminado puede definirse como

$$U^* = U = U(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n; X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_p) \qquad (18\text{-}21)$$

Usando esta función y el segundo teorema de Castigliano pueden encontrarse los desplazamientos p (y/o las rotaciones) en los puntos de aplicación de las fuerzas (y/o pares) redundantes X_j en el sentido de esas fuerzas. Si esos desplazamientos son cero,

$$\frac{\partial U}{\partial X_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots, p) \qquad (18\text{-}22)$$

Esas p ecuaciones son iguales en número al grado de indeterminación estática del sistema.[7] Resolviendo esas ecuaciones simultáneamente se obtienen las magnitudes de las fuerzas redundantes.

El primer teorema de Castigliano puede ser usado directamente para la solución de problemas estáticamente indeterminados.

Siguen varios ejemplos que ilustran esos procedimientos.

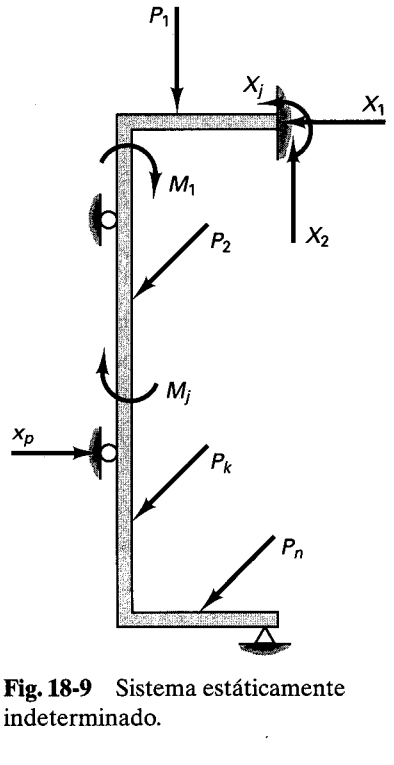


Fig. 18-9 Sistema estáticamente indeterminado.

Ejemplo 18-6

Usando el segundo teorema de Castigliano, verifique las fuerzas en las barras encontradas en el ejemplo 4-3 causadas por la fuerza P aplicada. El sistema plano de tres barras elásticas se repite en la figura 18-10(a). El área transversal de cada barra es la misma y su módulo elástico es E.

[7]El matemático italiano L. F. Menabrea (1809-1896) probó que el trabajo total en un problema resuelto de esta manera es un mínimo. Su teorema se conoce como el *principio del trabajo mínimo*. Castigliano empleó este principio en la solución de problemas estáticamente indeterminados.

SOLUCIÓN

Es conveniente visualizar el sistema como cortado en B y designar la fuerza desconocida en la barra BC por X. Por estática, las fuerzas en las barras inclinadas tienen entonces las magnitudes mostradas en la figura 18-10(b). Por consiguiente, usando la ecuación 18-19a con un cambio apropiado, la energía complementaria de deformación es

$$U^* = U = \frac{X^2 L}{2AE} + 2\left[\frac{(P - X)^2 L}{2 \times 2^2 AE \cos^3\alpha}\right]$$

Como la deflexión del sistema en el punto B es cero, aplicando la ecuación 18-22 se obtiene

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{XL}{AE} \times 1 + \frac{(P - X)L}{2AE \cos^3\alpha} \times (-1) = 0$$

$$X = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

La expresión es idéntica a la dada para F_1 en la ecuación 4-5. Aquí, el procedimiento para obtener el resultado es más directo.

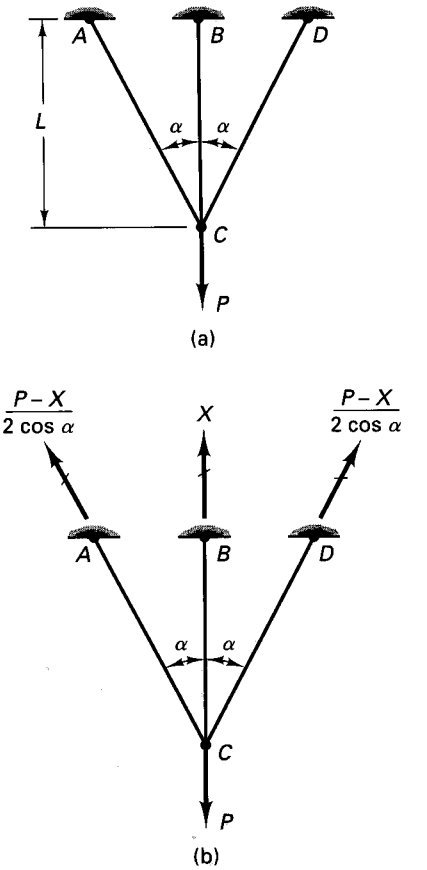


Fig. 18-10

Ejemplo 18-7

Considere una viga elástica uniformemente cargada, empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, como se representa en la figura 18-7(b). Determine la reacción en A. Use la ecuación 18-22.

SOLUCIÓN

La solución es análoga a la del ejemplo 18-4 excepto que R_A debe tratarse como la incógnita y no debe permitirse que sea nula. La condición cinemática clave, dada por la ecuación 18-22 es

$$\Delta_A = \partial U/\partial R_A = 0$$

que establece que ninguna deflexión ocurre en A debido a la carga aplicada w_o y R_A.

$$M = -\frac{w_o x^2}{2} + R_A x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial M}{\partial R_A} = +x$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{p_o x^2}{2} + R_A x\right)(+x)\,dx = -\frac{w_o L^4}{8EI} + \frac{R_A L^3}{3EI} = 0$$

Por tanto, $R_A = +3w_o L/8$, resultado encontrado también en el ejemplo 14-5.

Ejemplo 18-8

Considere una viga elástica doblemente empotrada y sometida a una carga triangular distribuida, como se muestra en la figura 18-11. Determine las reacciones en el extremo A usando la ecuación 18-22. EI para la viga es constante.

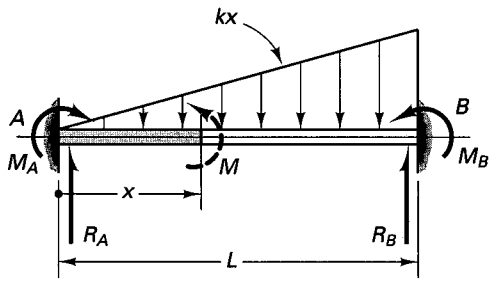


Fig. 18-11

SOLUCIÓN

Este problema es estáticamente indeterminado de segundo grado. Es conveniente considerar las reacciones R_A y M_A como fuerzas redundantes y expresar M en función de esas fuerzas así como de la carga aplicada. Las condiciones cinemáticas requieren que el desplazamiento vertical y el giro en A sean cero. Esas dos condiciones pueden ser satisfechas aplicando la ecuación 18-22 dos veces y haciendo la deflexión Δ_A y la rotación θ_A y A iguales a cero. Esto proporciona dos ecuaciones simultáneas para determinar R_A y M_A. Procediendo de esta manera,

$$M = M_A + R_A x - kx^3/6$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(M_A + R_A x - \frac{1}{6}kx^3\right)x\,dx = 0$$

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(M_A + R_A x - \frac{1}{6}kx^3\right)(1)\,dx = 0$$

Llevando a cabo las operaciones indicadas y simplificando,

$$M_A/2 + R_A L/3 = kL^3/30$$

$$M_A + R_A L/2 = kL^3/24$$

Resolviendo esas dos ecuaciones simultáneamente,

$$R_A = 3kL^2/20 \quad \text{y} \quad M_A = -kL^3/30 \tag{18-23}$$

donde el signo negativo de M_A muestra que este momento de extremo tiene sentido antihorario.

Ejemplo 18-9

Resuelva el ejemplo 18-6 usando el primer teorema de Castigliano. Véase la figura 18-12.

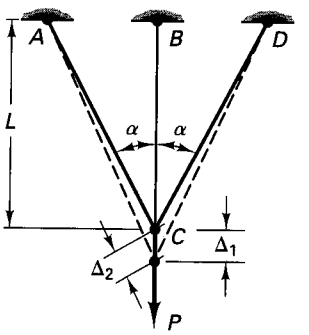


Fig. 18-12

SOLUCIÓN

Al aplicar el primer teorema de Castigliano, la energía elástica de deformación en las tres barras debe expresarse en términos del alargamiento vertical Δ_1 de la barra central. Para deflexiones pequeñas,

$$\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha$$

Usando la ecuación 17-7 expresada como función del desplazamiento Δ_1 y notando que $L_{AC} = L_{DC} = L/\cos \alpha$

$$U = \sum_{k=1}^{3} \frac{A_k E_k \Delta_k^2}{2L_k} = \frac{AE\Delta_1^2}{2L} + 2\frac{AE\,\Delta_1^2 \cos^3\alpha}{2L} \tag{18-24}$$

y

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_1} = \frac{AE}{L}\Delta_1 + 2\frac{AE}{L}\cos^3\alpha\,\Delta_1 = P$$

Por consiguiente,

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE}\frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

Entonces, la fuerza en la barra vertical, usando la ecuación 3-5, es

$$X = k\Delta_1 = \frac{AE}{L}\Delta_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}$$

Este resultado concuerda con el encontrado en el ejemplo 18-6.

Este tipo de solución es fácilmente ampliado a cualquier número de barras simétricamente inclinadas con Δ_1 como la única incógnita, independientemente del grado de indeterminación.

Si las barras no están inclinadas simétricamente o las fuerzas aplicadas forman un ángulo con la vertical, el problema es más complejo. En tales casos, el alargamiento en cada barra se determina a partir de dos desplazamientos separados en el punto de carga. Este procedimiento es análogo al mostrado en el ejemplo 17-7 e ilustrado en la figura 17-13. Un análisis más amplio de este enfoque puede encontrarse en la Sección 20-2, donde el método de los *desplazamientos* de análisis será considerado.

18-6. Energía elástica para cargas de pandeo

Los problemas de estabilidad pueden tratarse de una manera muy general usando los métodos de energía o del trabajo virtual. Como introducción a tales métodos, los criterios básicos para determinar la estabilidad del equilibrio se deducen en este capítulo para sistemas elásticos lineales conservativos usando un método de energía.

Para establecer los criterios de estabilidad, debe formularse una función Π llamada *potencial total* del sistema. Esta función se expresa como la suma de la energía interna U (energía de deformación) y la energía potencial Ω de las fuerzas externas que actúan sobre un sistema; es decir,

$$\Pi = U + \Omega \tag{18-25}$$

Ignorando una posible constante aditiva, $\Omega = -W_e$ (es decir, la pérdida de energía potencial durante la aplicación de las fuerzas es igual al trabajo hecho sobre el sistema por las fuerzas externas.) Por consiguiente, la ecuación 18-25 puede reescribirse como

$$\Pi = U - W_e \tag{18-26}$$

Como se sabe de la mecánica clásica, para tener equilibrio, el potencial total Π debe ser estacionario,[8] por lo que su variación $\delta\Pi$ debe ser igual a cero. Es decir,

$$\boxed{\delta\Pi = \delta U - \delta W_e = 0} \tag{18-27}$$

Para sistemas elásticos conservativos, esta relación concuerda con la ecuación 17-11. Esta condición puede usarse para determinar la posición de equilibrio.

[8]En términos de funciones ordinarias, esto meramente significa que existe una condición donde la derivada de una función con respecto a una variable independiente es cero y la función misma tiene un máximo, un mínimo, un minimáx o un valor constante.

Sin embargo, la ecuación 18-27 no puede discernir el tipo de equilibrio y por tanto establecer la condición para la estabilidad del equilibrio. Sólo examinando los términos de orden superior en la expresión para el cambio $\Delta\Pi$ en el potencial total Π puede ser determinado esto. Por tanto, debe examinarse la expresión más completa para el incremento en Π, tal como es dada por la serie de Taylor. Tal expresión es

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \frac{1}{3!}\delta^3\Pi + \cdots \tag{18-28}$$

Como para cualquier tipo de equilibrio, $\partial\Pi = 0$ es el primer término que no desaparece en esta serie que determina el tipo de equilibrio. Para sistemas elásticos lineales, el segundo término es suficiente. Entonces, de la ecuación 18-28, los criterios de estabilidad son

$$\begin{array}{|l|l|}\hline \delta^2\Pi > 0 & \text{para equilibrio estable} \\ \delta^2\Pi < 0 & \text{para equilibrio inestable} \\ \delta^2\Pi = 0 & \text{para equilibrio neutro asociado con la carga crítica} \\ \hline \end{array} \tag{18-29}$$

El significado de esas expresiones puede aclararse con referencia a la figura 18-13, donde la curva representa la función de potencial Π. El origen de esta función se muestra bajo la curva, ya que el valor absoluto de Π es arbitrario. Tres posibles posiciones diferentes de equilibrio para la bola se muestran en esta figura.[9] La primera derivada de Π en puntos de equilibrio es cero para los tres casos; es la segunda derivada la que determina el tipo de equilibrio.

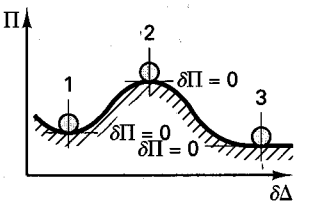


Fig. 18-13 Diferentes condiciones de equilibrio.

Para funciones simples de Π, los procedimientos para formar las derivadas, diferenciales y variaciones son iguales. Sin embargo, si la función de Π se expresa por integrales, el problema se vuelve matemáticamente mucho más complicado, requiriéndose el uso de cálculo de variaciones o bien la teoría del elemento finito. El tratamiento de tales problemas está más allá del alcance de este texto.[10]

Ejemplo 18-10

Usando el método de la energía, verifique la carga crítica encontrada antes para una barra rígida con un resorte torsionante en su base, figura 16-7(a).

[9]Un punto sobre una curva que resulta de una combinación, por ejemplo, de la curva a la izquierda de la posición 1 con la curva a la derecha de la posición 2, define un *minimáx*. En el análisis de estabilidad, tal punto corresponde a la condición de equilibrio *inestable*.

[10]H. L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics* (*Métodos de energía en mecánica aplicada*), Nueva York, Wiley, 1962; K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (*Métodos variacionales en Elasticidad y Plasticidad*), 2a. ed., Nueva York, Pergamon, 1975; J. S. Przemieniecki, "Discrete-element methods for stability analysis of complex structures" ("Métodos por elemento discreto para el análisis de la estabilidad de estructuras complejas"), *Aeron. J.* **72,** 1968, p. 1077.

SOLUCIÓN

Para una posición desplazada de la barra, la energía de deformación en el resorte es $k\theta^2/2$. Para el mismo desplazamiento, la fuerza P desciende una cantidad $L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$. Por tanto,

$$\Pi = U - W_e = \frac{1}{2}k\theta^2 - PL(1 - \cos\theta)$$

Si el estudio del problema se confina a desplazamientos pequeños (infinitesimales) y $\cos\theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! + \ldots$, el potencial total Π para un orden consistente de exactitud se simplifica a

$$\Pi = \frac{k\theta^2}{2} - \frac{PL\theta^2}{2}$$

Note especialmente que el $\frac{1}{2}$ en el último término es debido al *desarrollo del coseno en la serie*. La fuerza externa plena P actúa sobre la barra cuando se permite que θ varíe.

Conocida ya la expresión para el potencial total, deben resolverse dos problemas claramente diferentes. En el primer problema se encuentra una posición de equilibrio. Con este fin, se aplica la ecuación 18-27:

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{d\theta}\delta\theta = (k\theta - PL\theta)\delta\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad (k - PL)\theta\,\delta\theta = 0$$

En esta etapa de la solución, k, P y L deben considerarse constantes y $\delta\theta$ no puede ser cero. Por tanto, una posición de equilibrio ocurre en $\theta = 0$.

En la segunda fase de la solución, de acuerdo con la última parte de la ecuación 18-29 para el equilibrio neutro,

$$\delta^2\Pi = \frac{d^2\Pi}{d\theta^2}\delta\theta^2 + \frac{d\Pi}{d\theta}\delta^2\theta = 0$$

$$(k - PL)(\delta\theta)^2 + (k - PL)\theta\,\delta^2\theta = 0$$

Por equilibrio en $\theta = 0$, el segundo término en el lado izquierdo es cero: como $\delta^2\theta$ no puede ser cero, el primer término da $P = k/L$, que es la carga crítica de pandeo.

PROBLEMAS

Sección 18-4

18-1. Usando el segundo teorema de Castigliano, en el ejemplo 18-2, determine la deflexión horizontal de B debida a la fuerza virtual aplicada $P = 3k$.

Los problemas siguientes se resuelven con el segundo teorema de Castigliano:

18-2. Resuelva el problema 17-8.

18-3. Resuelva el problema 17-19.

18-4. Resuelva el problema 17-16.

18-5. Resuelva el problema 17-17.

18-6. Resuelva el problema 17-21.

18-7. Resuelva el problema 17-23.

18-8. Resuelva el problema 17-33.

18-9. Resuelva el problema 17-25.

18-10. Resuelva el problema 17-29.

18-11. Resuelva el problema 17-30.

18-12. Resuelva el problema 17-31.

18-13. Resuelva el problema 17-35.

18-14. Resuelva el problema 17-36.

Sección 18-5

18-15. Usando la ecuación 18-22, determine las fuerzas en el sistema de barras elásticas mostrado en la figura debido a la fuerza aplicada P. L/AE es la misma para cada barra.

18-16. Una viga continua sobre dos claros está cargada con una carga uniformemente distribuida hacia abajo w_o N/m. Si el claro izquierdo es L y el derecho es $2L$, ¿cuál es la reacción en el soporte intermedio? Use la ecuación 18-22 para obtener la solución. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante para esta viga.

18-17. Sin aprovechar la simetría y usando la ecuación 18-22, determine las componentes de reacción a la izquierda para la viga del problema 17-50 debido a la carga w_o aplicada.

18-18. Suponiendo que en el ejemplo 18-7 el extremo B está simplemente apoyado, determine la reacción con ayuda de la ecuación 18-22.

18-19. Resuelva el ejemplo 18-9 suponiendo que el área de la sección transversal de la barra BC es el doble del área transversal de la barra AC o DC.

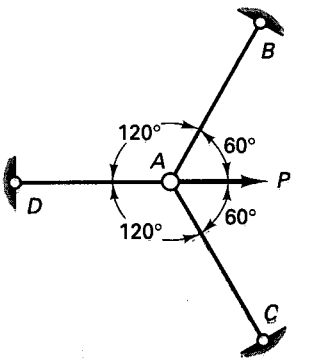


Fig. P18-15

Sección 18-6

18-20. Usando la ecuación 18-27 y la 18-29 para equilibrio neutro, determine la carga crítica de pandeo en el problema 16-1.

18-21. Usando la ecuación 18-29 para equilibrio neutro, determine la carga crítica de pandeo de Euler P_{cr} para una columna elástica de EI constante con extremos articulados, como se muestra en la figura 16-13. Suponga que la forma deflexionada para una columna ligeramente deflexionada en una posición vecina de equilibrio es $v = A \operatorname{sen} \pi x/L$, donde A es una constante arbitraria. (*Sugerencia*: El acortamiento axial de una columna debido a una deflexión lateral v está dada por

$$\Delta_v = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

y heurísticamente,[1] el trabajo externo $\delta W_e = P\,\Delta_v$. Notando de la ecuación 16-5 que $M = -Pv$, la expresión para δU se obtiene de la ecuación 17-8.)

18-22. Encuentre una solución aproximada para el problema anterior, suponiendo que la forma deflexionada de la columna es una parábola, $v = A(x^2 - xL)$, *que satisfaga las condiciones cinemáticas de frontera*. (*Nota*: Las soluciones de energía no son muy sensitivas a la forma deflexionada supuesta siempre que se tome $M = -Pv$ y ***no*** como $M = EIv''$ donde se usa la segunda derivada de una función supuesta. Numerosas soluciones aproximadas de problemas de pandeo en columnas pueden encontrarse de esta manera.)

[1]Para estudios futuros de este problema, véase K. Marguerre, *Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs* (Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer, 1980), pp.189–229.

19

Análisis elástico de sistemas

19-1. Introducción

Los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos para resolver problemas estáticamente indeterminados y linealmente elásticos vistos anteriormente, se ampliarán en este capítulo para abarcar casos más complejos. Esos dos métodos son particularmente importantes en el análisis matricial de estructuras y en las formulaciones por elemento finito. Además, son directamente aplicables a los criterios de diseño elástico que se basan a menudo en el esfuerzo permisible máximo. Tal criterio se denomina *estado límite* para el esfuerzo máximo. En otros casos, el estado límite puede ser la deflexión permisible máxima o el efecto de la rigidez de un sistema en las vibraciones. Tales criterios son estados límite de *servicio*.

Si la *resistencia* de un miembro o miembros para sobrecargas de emergencia es el único parámetro de control, el estado límite de esfuerzo elástico máximo puede conducir a un diseño indebidamente conservador. Para materiales *dúctiles*, donde no se presenta el problema de la fatiga, al alcanzarse meramente el esfuerzo máximo en un punto o en varios puntos de un miembro, no se agota necesariamente la capacidad de resistencia de un sistema. La resistencia última de tales sistemas puede aproximarse razonablemente considerando al material como rígido e idealmente plástico.

Algunos casos se trataron anteriormente. Este enfoque se analiza en el siguiente capítulo sobre vigas y marcos.

19-2. Dos métodos básicos de análisis elástico

Los sistemas estructurales que experimentan sólo deformaciones pequeñas y están compuestos de materiales linealmente elásticos, son sistemas estructurales lineales. El principio de superposición es aplicable a tales estructuras y forma la base de dos de los métodos más efectivos para el análisis de sistemas indeterminados.

En el primero de esos métodos, un sistema estáticamente indeterminado se reduce inicialmente a uno determinado retirando reacciones o fuerzas internas redundantes (superfluas) para mantener el equilibrio estático; véase la figura 4-1. Luego, esas fuerzas redundantes se consideran externamente aplicadas y sus magnitudes se ajustan para satisfacer las condiciones de deformación prescritas en sus puntos de aplicación. Una vez determinadas las reacciones redundantes, el sistema se determina estáticamente, y puede ser analizado por características de resistencia o de rigidez con los métodos presentados antes. Este método, que es usado ampliamente, se denomina *método de las fuerzas* o método de las flexibilidades; véase la Sección 4-3.

En el segundo método, llamado *método de los desplazamientos* o método de la rigidez, los desplazamientos de los nodos de una estructura son tratados como las incógnitas; véanse las Secciones 4-4 y 4-5. El sistema se reduce primero a una serie de miembros cuyos *nodos* se suponen completamente restringidos con respecto a cualquier movimiento. Los nodos luego son liberados a un grado tal que se satisfagan las condiciones de equilibrio en cada nodo. Este método se presta muy bien para ser programado, por lo que es más usado en la práctica que el método de las fuerzas, especialmente para el análisis de estructuras de gran tamaño.

Si bien algunos de los métodos clásicos continúan teniendo alguna utilidad, los métodos de las fuerzas y de los desplazamientos son los dos enfoques modernos para resolver sistemas estructurales indeterminados.

19-3. Método de las fuerzas

El primer paso en el análisis de sistemas estructurales usando el método de las fuerzas, es la determinación del grado de indeterminación estática, que es el mismo que el número de reacciones redundantes, como se vió en las Secciones 1-8 y 4-3. Las reacciones redundantes[1] son temporalmente retiradas para obtener una estructura estáticamente determinada, que se denomina estructura *primaria* o *liberada*. Entonces, como esta estructura es artificialmente reducida a una condición de determinación estática, es posible encontrar cualquier desplazamiento deseado por los métodos antes vistos. Por ejemplo, la viga mostrada en la figura 19-1(a)

[1]En el análisis de vigas y marcos, los momentos flexionantes en los soportes son a menudo tratados como redundantes. En tales casos, se consideran las rotaciones de las tangentes en los soportes en vez de las deflexiones.

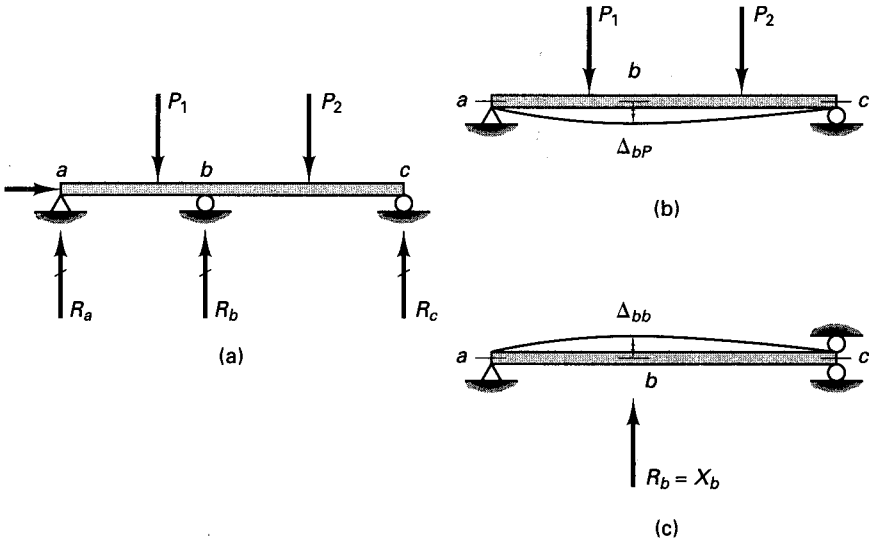


Fig. 19-1 Superposición para el método de las fuerzas.

es indeterminada de primer grado. Para que esta viga permanezca en equilibrio estático estable, sólo puede ser retirada una de las reacciones verticales. Al retirar la reacción vertical en b, figura 19-1(b), puede calcularse la deflexión Δ_{bP} en b causada por las fuerzas aplicadas P. Reaplicando la reacción redundante retirada R_b al miembro *descargado*, figura 19-1(c), puede encontrarse la deflexión Δ_{bb} en b debido a R_b. Como la deflexión en b para la viga dada debe ser cero, *superponiendo* las deflexiones y requiriendo que $\Delta_{bP} + \Delta_{bb} = 0$, puede determinarse la magnitud de $R_b = X_b$.

Este procedimiento puede generalizarse a cualquier número de reacciones redundantes. Sin embargo, en tales casos es esencial reconocer que *el desplazamiento de todo punto sobre la estructura primaria es afectado por cada fuerza redundante reaplicada*. Esto también es cierto para la rotación de elementos. Como ejemplo, consideremos la viga en la figura 19-2(a).

Retirando dos reacciones redundantes cualesquiera, como R_b y R_c, la viga se vuelve determinada y las deflexiones en b y c pueden ser calculadas, figura 19-2(b). Esas deflexiones se designan Δ_{bP} y Δ_{cP}, respectivamente, donde la primera letra del subíndice indica el punto en que ocurre la deflexión y la segunda, la causa de la deflexión. Reaplicando R_b a la misma viga, pueden encontrarse las deflexiones en b y c debido a R_b en b, figura 19-2(c). Esas deflexiones se designan Δ_{bb} y Δ_{cb}, respectivamente. Similarmente, Δ_{bc} y Δ_{cc}, debido a R_c pueden ser establecidas, figura 19-2(d). Superponiendo las deflexiones en cada soporte y haciendo la suma igual a cero, ya que los puntos b y c en realidad no se deflexionan, se obtienen las dos ecuaciones:

$$\Delta_b = \Delta_{bP} + \Delta_{bb} + \Delta_{bc} = 0$$
$$\Delta_c = \Delta_{cP} + \Delta_{cb} + \Delta_{cc} = 0 \qquad (19\text{-}1)$$

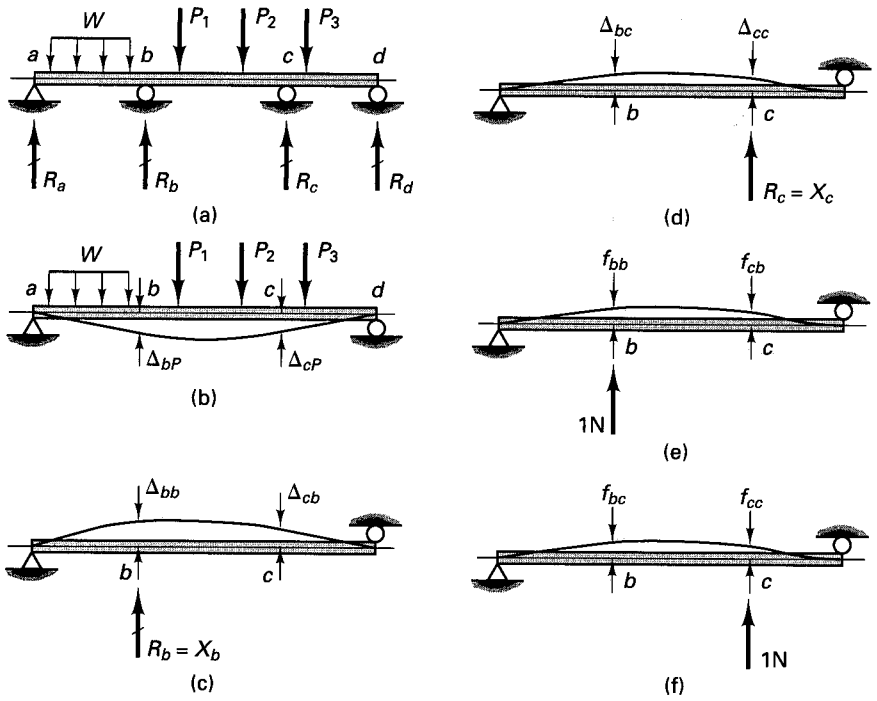


Fig. 19-2 Superposición para una viga continua.

Estas ecuaciones pueden reescribirse en forma más conveniente usando los *coeficientes de flexibilidad* f_{bb}, f_{bc}, f_{cb} y f_{cc}, que son definidos como las deflexiones mostradas en las figuras 19-2(e) y (f) debido a fuerzas unitarias aplicadas en la dirección de las redundantes. Entonces, como está siendo considerado un sistema estructural lineal, la deflexión en el punto b debida a las fuerzas redundantes puede expresarse como

$$\Delta_{bb} = f_{bb}X_b \quad \text{y} \quad \Delta_{bc} = f_{bc}X_c \tag{19-2}$$

y, similarmente, en el punto c, como

$$\Delta_{cb} = f_{cb}X_b \quad \text{y} \quad \Delta_{cc} = f_{cc}X_c \tag{19-3}$$

donde X_b y X_c son las cantidades redundantes. Usando esta notación, la ecuación 19-1 toma la forma

$$\begin{aligned} \Delta_b &= f_{bb}X_b + f_{bc}X_c + \Delta_{bP} = 0 \\ \Delta_c &= f_{cb}X_b + f_{cc}X_c + \Delta_{cP} = 0 \end{aligned} \tag{19-4}$$

donde las únicas cantidades desconocidas son X_b y X_c; la solución simultánea de estas ecuaciones constituye la solución del problema.

Generalizando los resultados precedentes para la determinación de las fuerzas desconocidas en sistemas con n redundantes, usando la superposición, pueden formarse las siguientes *ecuaciones de compatibilidad*:[2]

[2]Algunas veces esas expresiones son llamadas ecuaciones de Maxwell-Mohr.

$$\begin{aligned}
\Delta_a &= f_{aa}X_a + f_{ab}X_b + \cdots + f_{an}X_n + \Delta_{aP} \\
\Delta_b &= f_{ba}X_a + f_{bb}X_b + \cdots + f_{bn}X_n + \Delta_{bP} \\
&\vdots \\
\Delta_n &= f_{na}X_a + f_{nb}X_b + \cdots + f_{nn}X_n + \Delta_{nP}
\end{aligned} \tag{19-5}$$

Cuando los soportes redundantes son inmóviles, la columna izquierda de la ecuación es cero. Alternativamente, tales deflexiones pueden ser prescritas.[3] Los términos para deflexiones en la columna derecha pueden calcularse para la estructura primaria. Los coeficientes[4] de flexibilidad f_{ij} son para el sistema primario total. Todas las cantidades en esas ecuaciones representan deflexiones o rotaciones, dependiendo de si están asociadas con fuerzas o con momentos.

Para el método de las fuerzas, es usual expresar la ecuación 19-5 en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} f_{aa} & f_{ba} & \cdots & f_{an} \\ f_{ba} & f_{bb} & \cdots & f_{bn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{na} & f_{nb} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_a \\ X_b \\ \cdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_a - \Delta_{aP} \\ \Delta_b - \Delta_{bP} \\ \cdots \\ \Delta_n - \Delta_{nP} \end{Bmatrix} \tag{19-6a}$$

Como la matriz cuadrada está formada por los coeficientes de flexibilidad, este método suele llamarse *método de las flexibilidades* del análisis estructural.

Debe quedar entendido con toda claridad, que las ecuaciones anteriores son aplicables sólo a sistemas elásticos lineales que experimentan desplazamientos pequeños. Además, debe notarse que la matriz exhibida por la ecuación 19-6 es un *sistema* o una matriz de flexibilidad *global*. Tales matrices pueden construirse fácilmente y en forma directa sólo para los problemas más simples. Para el tratamiento de problemas más complejos, se refiere al lector a los textos sobre elementos finitos o sobre análisis estructural matricial citados previamente en las secciones 3-3 y 17-9.

Antes de proceder con ejemplos, se mostrará que la matriz de los coeficientes de flexibilidad f_{ij} es *simétrica* (es decir, $f_{ij} = f_{ji}$).

19-4. Reciprocidad de los coeficientes de flexibilidad

De acuerdo con la definición de coeficientes de flexibilidad, para sistemas elásticos lineales, el desplazamiento Δ_i en i debido a fuerzas P_i en i y P_j en J, puede expresarse a la manera de la ecuación 19-5 como

$$\Delta_i = f_{ii}P_i + f_{ij}P_j \tag{19-6b}$$

[3]Si se proporciona un soporte elástico en el i-ésimo punto, el coeficiente de flexibilidad en el soporte se incrementa agregando la flexibilidad de tal soporte.

[4]Los coeficientes de flexibilidad son también llamados *coeficientes de influencia de la deflexión.*

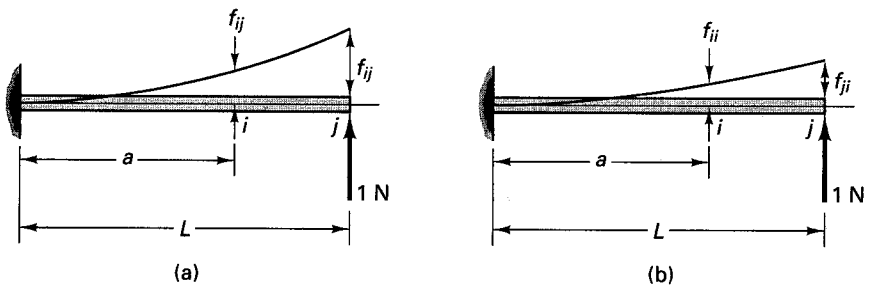


Fig. 19-3 Deflexiones recíprocas $f_{ij} = f_{ji}$.

Similarmente, la deflexión en j es

$$\Delta_j = f_{ji}P_i + f_{jj}P_j \tag{19-6c}$$

donde f_{ii}, f_{ij}, f_{ji} y f_{jj} son los coeficientes de flexibilidad de un sistema dado.

Si la energía de deformación del sistema debido a la aplicación de esas fuerzas es U, de acuerdo con el segundo teorema de Castigliano, ecuación 18-16, las mismas cantidades son también dadas como

$$\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad \Delta_j = \frac{\partial U}{\partial P_j}$$

Tomando las derivadas parciales de Δ_i con respecto a P_j en la ecuación 19-5a y en la ecuación precedente, se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial \Delta_i}{\partial P_j} = f_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_j \, \partial P_i}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial \Delta_j}{\partial P_i} = f_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial P_i \partial P_j}$$

Sin embargo, el orden de diferenciación es irrelevante, por lo que

$$\boxed{f_{ij} = f_{ji}} \tag{19-7}$$

Como se ilustra en la figura 19-3, esta relación establece que el desplazamiento en cualquier punto i debido a una fuerza unitaria en cualquier punto j es igual al desplazamiento de j debido a una fuerza unitaria en i, siempre que los sentidos de las fuerzas y deflexiones coincidan en cada uno de los dos casos. Puede verse que esta relación es cierta para varios casos considerados antes en aplicaciones de las ecuaciones de la fuerza virtual en la Sección 17-6. Por ejemplo, al calcular los coeficientes de flexibilidad, usando la ecuación 17-26, haciendo F_i igual a la fuerza unitaria p_i, su papel con $\overline{p}_j$ es intercambiable. Esto también es cierto en el uso de las ecuaciones 17-27 y 17-28.

La relación obtenida suele llamarse *teorema de Maxwell de los desplazamientos recíprocos*.[5]

[5] Esta relación fue descubierta por James Clerk Maxwell en 1864. El caso más general fue demostrado por E. Betti en 1872.

Ejemplo 19-1

Para la viga elástica simplemente apoyada de la figura 19-4, demuestre que la rotación de la tangente a la curva elástica en el soporte i, causada al aplicar una fuerza unitaria en j, es igual a la deflexión en j causada al aplicar un par unitario en i.

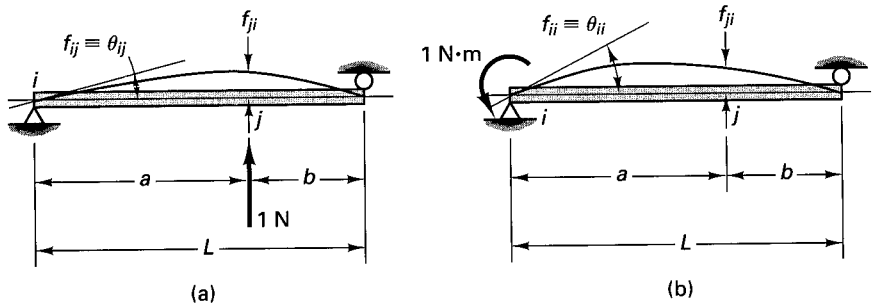


Fig. 19-4

SOLUCIÓN

La deflexión de la viga debido a una fuerza concentrada P en j está dada por la ecuación 14-27, aplicable para $0 \leq x \leq a$. La derivada de esta ecuación con respecto a x da la pendiente de la curva elástica. La pendiente de esta función en $x = 0$ da la rotación θ_{ij}, definiendo f_{ij}, cuando la fuerza aplicada $P = -1$:

$$v = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2x - b^2x - x^3) \quad \text{y} \quad v' = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2 - 3x^2)$$

$$v'(0) = \theta(0) = -\frac{Pb}{6EIL}(L^2 - b^2) = -\frac{Pab}{6EIL}(a + 2b)$$

y

$$\theta_{ij} \equiv f_{ij} = \frac{ab}{6EIL}(a + 2b) \tag{19-8}$$

La ecuación de la curva elástica para una viga sometida a un momento extremo se deducirá a continuación. Procediendo como antes, se encuentra la deflexión en j. Suponiendo que se aplica un momento antihorario M_o en i,

$$M = -M_o + M_o x/L \quad \text{y} \quad EIv'' = M = -M_o + M_o x/L$$

$$EIv' = -M_o x + M_o x^2/2L + C_3$$

Por consiguiente,

$$EIv = -M_o x^2/2 + M_o x^3/6L + C_3 x + C_4$$

De $v(0) = 0, C_4 = 0$, y de $v(L) = 0, C_3 = M_o L/3$, y

$$EIv = \frac{M_o x}{6L}(-3Lx + x^2 + 2L^2) \qquad (19\text{-}9)$$

Por tanto, para $v(a)$ y $M_o = 1$,

$$f_{ji} = \frac{a}{6EIL}(-3La + a^2 + 2L^2) = \frac{ab}{6EIL}(a + 2b) \qquad (19\text{-}10)$$

Este resultado es idéntico al dado por la ecuación 19-8.

Ejemplo 19-2

Una viga elástica continua sobre dos claros y soportes simples, soporta una carga uniformemente distribuida, como se muestra en la figura 19-5. Determine las reacciones y dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flexionante. *EI* para la viga es constante.

SOLUCIÓN

La reacción R_b en b se retira para convertir la viga en estáticamente determinada. La deflexión en b para la estructura primaria, usando la ecuación 14-22, es

$$\Delta_{bP} = -\frac{5w_o(2L)^2}{384EI} = -\frac{5w_o L^4}{24EI}$$

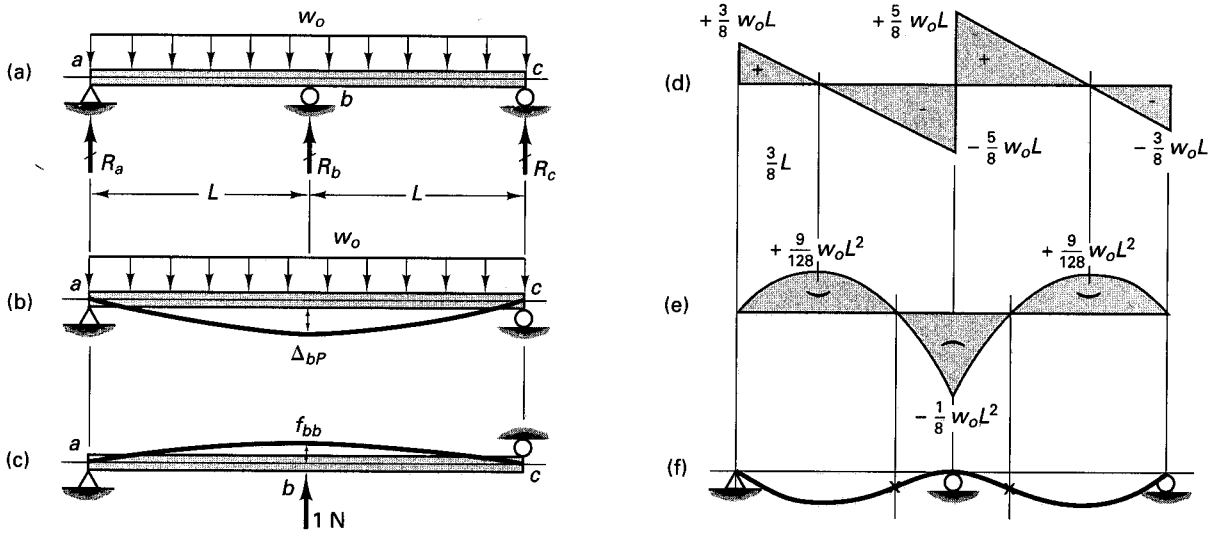


Fig. 19-5

La deflexión en b debida a una fuerza concentrada está dada por la ecuación 14-30. Por tanto, haciendo $P = 1$, el coeficiente de flexibilidad es

$$f_{bb} = \frac{1 \times (2L)^3}{48EI} = \frac{L^3}{6EI}$$

Usando la ecuación 19-5 y suponiendo que los soportes son inmóviles,

$$\Delta_b = f_{bb}X_b + \Delta_{bP} = 0 \quad \text{y} \quad X_b \equiv R_b = -\Delta_{bP}/f_{bb} = 5w_oL/4$$

Por estática, $R_a = R_c = 3w_oL/8$ y los diagramas de cortante y momento están dibujados en las figuras 19-5(d) y (e), respectivamente. La curva elástica se muestra en la figura 19-5(f).

Ejemplo 19-3

Una viga continua sobre dos claros está empotrada en un extremo y simplemente apoyada en otros dos puntos; véase la figura 19-6(a). Determine las reacciones causadas por la aplicación de una carga uniformemente distribuida w_o. EI para la viga es constante.

SOLUCIÓN

Esta viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Por tanto, dos fuerzas redundantes deben ser retiradas para resolverla. Una opción conveniente es retirar M_a y R_b, quedando la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 19-6(b). Usando los resultados encontrados en el ejemplo 14-3 y resumidos en la Tabla 10 del apéndice,

$$\Delta_{aP} \equiv \theta_{aP} = -\frac{w_o(2L)^3}{24EI} = -\frac{w_oL^3}{3EI}$$

$$\Delta_{bP} = -\frac{5w_o(2L)^3}{384EI} = -\frac{5w_oL^4}{24EI}$$

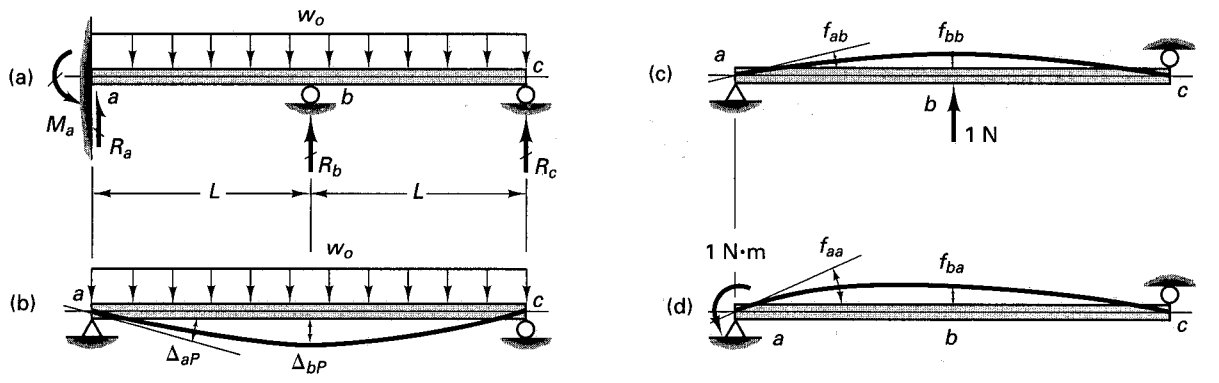


Fig. 19-6

Un conjunto de coeficientes de flexibilidad es determinado aplicando una fuerza unitaria en b, figura 19-6(c), y determinando el giro en a y la deflexión en b usando las ecuaciones dadas en la Tabla 10 del apéndice. Este proceso se repite aplicando un momento unitario en a, figura 19-6(d), y encontrando el giro en a y la deflexión en b. Así entonces,

$$f_{ab} = \frac{(2L)^2}{16EI} = \frac{L^2}{4EI} \quad \text{y} \quad f_{bb} = \frac{(2L)^3}{48EI} = \frac{L^3}{6EI}$$

$$f_{aa} = \frac{(2L)}{3EI} = \frac{2L}{3EI} \quad \text{y} \quad f_{ba} = \frac{L[(2L)^2 - L^2]}{6EI(2L)} = \frac{L^2}{4EI}$$

Note que como era de esperarse, $f_{ab} = f_{ba}$.

Escribiendo dos ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos en a y b usando la ecuación 19-5:

$$\Delta_a \equiv \theta_a = \Delta_{aP} + f_{aa}X_a + f_{ab}X_b = 0$$

$$\Delta_b = \Delta_{bP} + f_{ba}X_a + f_{bb}X_b = 0$$

Sustituyendo las cantidades apropiadas, las ecuaciones requeridas son

$$\frac{2L}{3EI}X_a + \frac{L^2}{4EI}X_b = \frac{w_o L^3}{3EI}$$

$$\frac{L^2}{4EI}X_a + \frac{L^3}{6EI}X_b = \frac{5w_o L^4}{24EI}$$

Resolviendo simultáneamente estas dos ecuaciones, se obtiene

$$X_a = M_a = 0.0714w_o L^2 \quad \text{y} \quad X_b = R_b = 1.143w_o L$$

Los signos positivos de estas cantidades indican concordancia con el sentido supuesto de las fuerzas unitarias.

Ejemplo 19-4

Considere el sistema plano de barras elásticas articuladas en sus extremos mostrado en la figura 19-7(a). Determine las fuerzas en las barras causadas por la aplicación de la fuerza inclinada $P = 10\sqrt{5}$ kN en el nodo e. Todas las barras pueden resistir fuerzas de tensión o de compresión. Por simplicidad en los cálculos, considere que L/EA es igual a la unidad en cada miembro.

SOLUCIÓN

Este problema es estáticamente indeterminado de segundo grado y en esta solución, las barras ae y ce se considerarán como las fuerzas redundantes. Por tanto, el sistema de barras con las barras cortadas en a y c, mostrado en la figura 19-7(b), es el sistema *primario*. Las fuerzas en las barras para esta

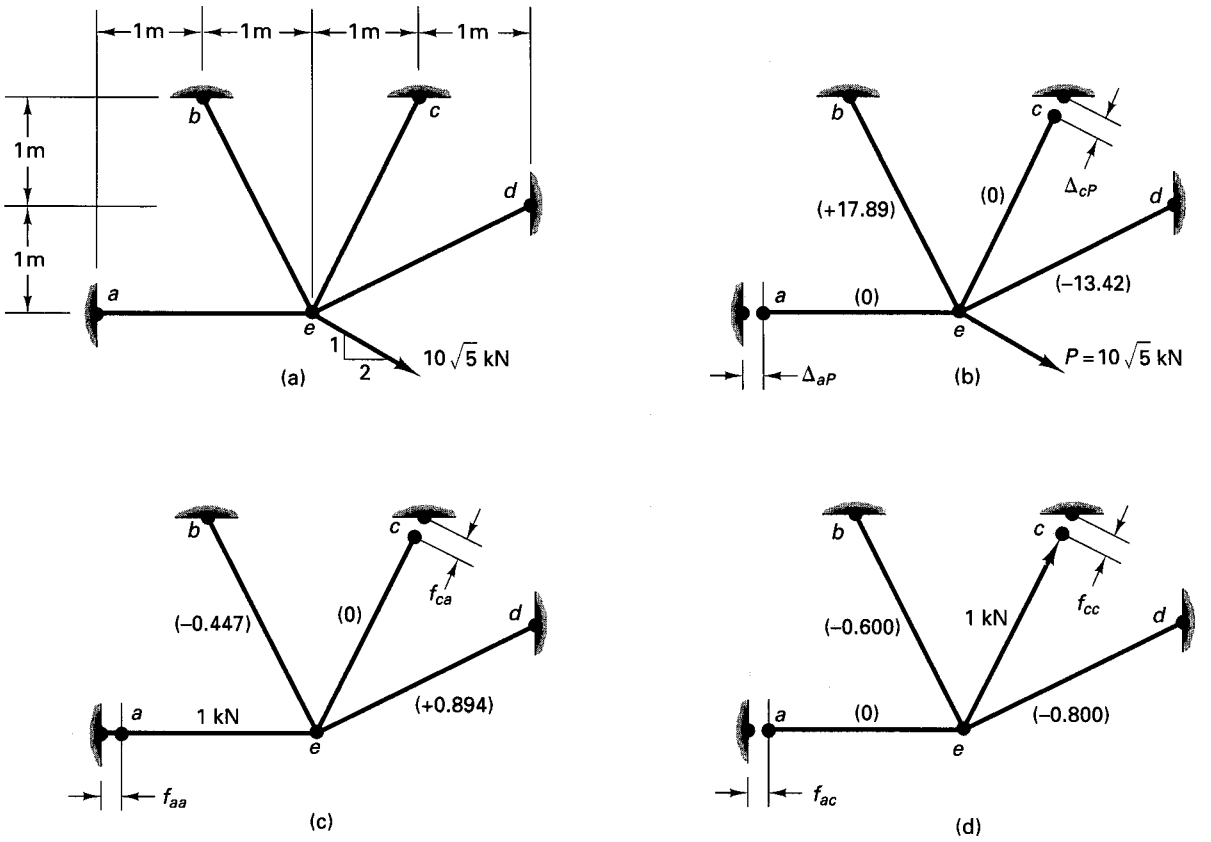


Fig. 19-7

condición se muestran sobre el diagrama en paréntesis. En este sistema primario, los posibles desplazamientos que pueden desarrollarse en *a* y *c* son anotados y deben retirarse para restaurar las requeridas condiciones de compatibilidad. Por tanto, el comportamiento del sistema primario *descargado* debido a la aplicación de fuerzas axiales unitarias se estudia primero, como se muestra en las figuras 19-7(c) y (d). Nuevamente, las fuerzas axiales en las barras para cada caso se muestran directamente sobre las figuras. Note que cuando la fuerza en la barra *ae* es la unidad, la fuerza en la barra *ce* es cero, figura 19-7(c); inversamente, cuando la fuerza en la barra *ce* es la unidad, la fuerza en la barra *ae* es cero.

Los cálculos de las deflexiones y los coeficientes de flexibilidad requeridos se llevan a cabo en forma tabular usando el método de la fuerza virtual y siguiendo el patrón de la solución del ejemplo 17-5.

Barra	F, kN	$\bar{p}_a$ o p_a	$\bar{p}_c$ o p_c	$\bar{p}_a F$	$\bar{p}_b F$	$\bar{p}_a p_a$	$\bar{p}_c p_c$	$\bar{p}_a p_c$ o $\bar{p}_c p_a$
ae	0	+1	0	0	0	+1	0	0
be	+17.89	−0.447	−0.60	−8.00	−10.73	+0.20	+0.36	+0.268
ce	0	0	+1	0	0	0	+1	0
de	−13.42	+0.894	−0.80	−12.00	+10.73	+0.80	+0.64	−0.716
			Suma:	−20.00	0	+2.00	+2.00	−0.448

Como para cada barra $L/AE = 1$, las deflexiones y los coeficientes de flexibilidad relativos, de acuerdo con la ecuación 17-26 son

$$\Delta_{aP} = -20 \quad \Delta_{cP} = 0 \quad f_{aa} = f_{cc} = 2$$

y

$$f_{ac} = f_{ca} = -0.448$$

Por tanto, para las fuerzas en la barras $F_{ac} = X_a$ y $F_{cc} = X_c$, las condiciones requeridas de compatibilidad en a y c, usando la ecuación 19-5, son

$$\Delta_a = f_{aa}X_a + f_{ac}X_c + \Delta_{aP} = 2X_a - 0.448X_c - 20 = 0$$

y

$$\Delta_c = f_{ca}X_a + f_{cc}X_c + \Delta_{cP} = -0.448X_a + 2X_c + 0 = 0$$

Resolviendo esas dos ecuaciones simultáneamente,

$$F_{ae} = X_a = +10.52 \text{ kN} \quad \text{y} \quad F_{ce} = X_b = +2.36 \text{ kN}$$

Usando la superposición, las fuerzas en las otras dos barras son

$$F_{be} = 17.89 + 10.52 \times (-0.447) + 2.36 \times (-0.600) = +11.77 \text{ kN}$$

y

$$F_{de} = -13.42 + 10.52 \times 0.894 + 2.36 \times (-0.800) = -5.90 \text{ kN}$$

Las soluciones para problemas con un alto grado de indeterminación comúnmente se obtienen con ayuda de la computadora.

19-5. Introducción al método de los desplazamientos

En el método de las fuerzas analizado en la sección 19-3, se supuso que las fuerzas redundantes eran las incógnitas. Por otra parte, en el método de los desplazamientos (lineales o angulares), los desplazamientos de los nodos son considerados como las incógnitas. El primer paso al aplicar este método es impedir esos desplazamientos en los nodos, que se conocen como *grados de libertad*. La supresión de esos grados de libertad conduce a un sistema modificado compuesto de una serie de miembros, cada uno de cuyos puntos extremos está restringido contra traslaciones y rotaciones. El cálculo de las reacciones en esos extremos artificialmente restringidos debido a las cargas aplicadas externamente, puede llevarse a cabo usando cualquiera de los métodos descritos previamente. Los resultados de tales cálculos están disponibles para una gran variedad de condiciones de carga y algunos de ellos se dan en la Tabla 11 del apéndice. En el análisis de vigas por este método, los momentos antihorario y las reacciones hacia arriba que actúen *en cualquier extremo de un miembro* se consideran como positivos. *Esta convención de signos difiere de la*

usada previamente en este texto y es necesaria para obtener una formulación consistente de las ecuaciones de superposición.

En la convención previa se diferencia entre las regiones en tensión y en compresión de miembros sometidos a flexión.

El procedimiento para aplicar el método de los desplazamientos a una viga con un grado de indeterminación cinemática se ilustra en la figura 19-8(a). Primero se restringe el soporte en b, figura 19-8(b), reduciendo el problema al de una viga doblemente empotrada. Las reacciones verticales y los momentos de empotramiento en tal viga pueden encontrarse por los métodos vistos antes. El momento M_{bP} es un ejemplo de una fuerza reactiva en un extremo, donde la primera letra del subíndice designa la posición y la segunda identifica la causa. Tales momentos y reacciones de extremo se denominan *acciones de empotramiento* en los extremos de vigas. Para uso general, las acciones de empotramiento se identifican aquí por una letra A con dos subíndices. Para el caso precedente, $A_{bP} \equiv M_{bP}$. El subíndice P se refiere a *cualquier tipo* de carga lateral aplicada.

A continuación, el momento M_{bb} en b, figura 19-8(c), se determina como función de la rotación aplicada θ_b. En esta notación, la primera letra del subíndice identifica la posición de la fuerza (momento) de empotramiento y la segunda identifica la ubicación del desplazamiento aplicado. Dos casos básicos para momentos y fuerzas de extremo causados por una rotación o un desplazamiento aplicado se dan en la Tabla 11 del apéndice.

Finalmente, se escribe una ecuación de equilibrio estático. En este caso, como la viga está simplemente apoyada en b, el momento total M_b debe ser cero. Para uso general, tales cantidades de fuerza se identifican por P_b (es decir, $M_b \equiv P_b$). Entonces, suponiendo que el sistema es linealmente elástico y que sufre desplazamientos pequeños, por equilibrio en el nodo b,

$$M_b = M_{bP} + M_{bb} = 0 \qquad (19\text{-}11a)$$

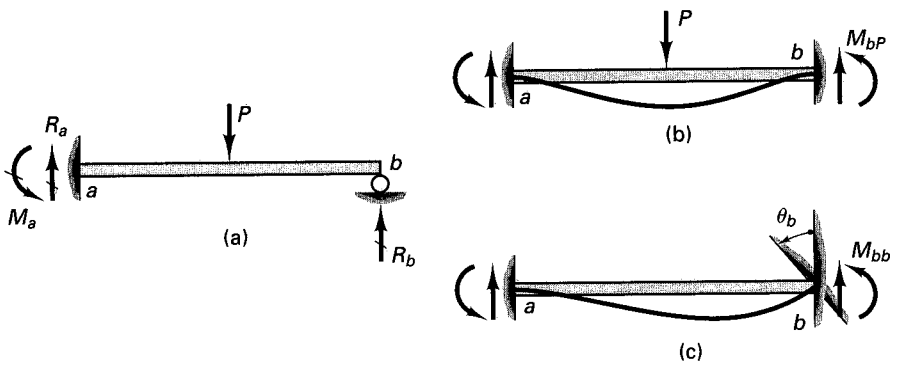


Fig. 19-8

o, en notación generalizada,

$$P_b = A_{bP} + A_{bb} = 0 \qquad \text{(19-11b)}$$

Ejemplo 19-5

Usando el método de los desplazamientos, determine las reacciones en una viga uniformemente cargada empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, figura 19-9(a). *EI* es constante.

SOLUCIÓN

Como el giro del nodo en b es la única incógnita cinemática en los soportes, figura 19-9(a), esta viga es cinemáticamente indeterminada de primer grado. Usando la Tabla 11 en el apéndice, las acciones en el empotramiento debido a la carga aplicada, figura 19-9(b), y los momentos de extremo y reacciones debido a θ_b, figura 19-9(c), son

$$M_{aP} \equiv A_{aP} = w_o L^2/12 \quad \text{y} \quad M_{bP} \equiv A_{bP} = -w_o L^2/12$$

$$M_{ab} \equiv A_{ab} = 2EI\theta_b/L \quad \text{y} \quad M_{bb} \equiv A_{bb} = 4EI\theta_b/L$$

$$R_{ab} = 6EI\theta_b/L^2 \quad \text{y} \quad R_{bb} = -6EI\theta_b/L^2$$

Para equilibrio de momentos en el extremo b, usando la ecuación 19-11a,

$$M_b \equiv P_b = M_{bP} + M_{bb} = -\frac{w_o L^2}{12} + \frac{4EI}{L}\theta_b = 0$$

Por consiguiente,

$$\theta_b = w_o L^2/48EI$$

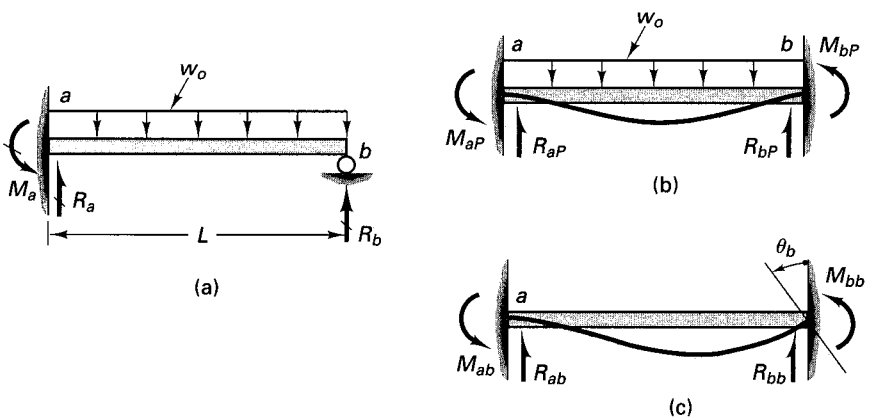


Fig. 19-9

Usando esta θ_b en las ecuaciones de superposición,

$$M_a = M_{aP} + M_{ab} = \frac{w_o L^2}{12} + \frac{2EI}{L}\theta_b = \frac{w_o L^2}{8}$$

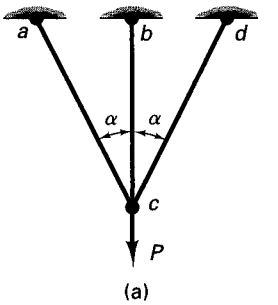
$$R_a = R_{aP} + R_{ab} = \frac{w_o L}{2} + \frac{6EI}{L}\theta_b = \frac{5w_o L}{8}$$

$$R_b = R_{bP} + R_{bb} = \frac{w_o L}{2} - \frac{6EI}{L}\theta_b = \frac{3w_o L}{8}$$

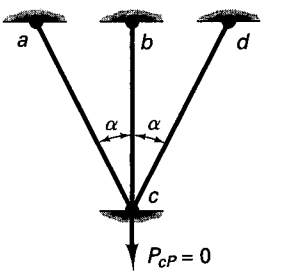
El signo de M_a es opuesto al de la convención de signos de vigas.

Ejemplo 19-6

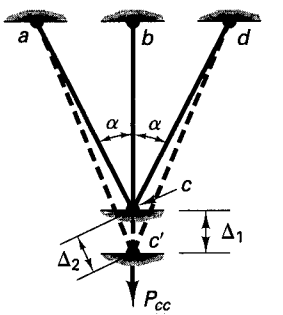
Tres barras elásticas articuladas en sus extremos están colocadas simétricamente en un plano para formar el sistema mostrado en la figura 19-10(a). El área transversal A de cada barra es la misma así como el módulo elástico E. Verifique las fuerzas en las barras encontradas en los ejemplos 4-3, 18-6 y 18-9 causadas por la fuerza P aplicada.



(a)



(b)



(c)

Fig. 19-10

SOLUCIÓN

Debido a la simetría, este sistema tiene sólo un grado de libertad cinemático y el nodo c puede desplazarse sólo en la dirección vertical. En esta solución, el nodo es primero restringido en su capacidad de desplazarse, figura 19-10(b). Aquí todas las acciones de empotramiento son cero y $A_{cP} \equiv P_{cP} = 0$.[6]

Se determina a continuación la fuerza P_{cc} para el sistema como función de la deflexión Δ_1 de la barra bc. Igual que en el ejemplo 18-8, por compatibilidad geométrica del nodo c, $\Delta_2 = \Delta_1 \cos \alpha$. Por consiguiente, usando la ecuación 3-7, las fuerzas F_1 y F_2 en los miembros bc y ac (o dc) son, respectivamente

$$F_1 = k_1 \Delta_1 = \frac{AE}{L}\Delta_1 \quad \text{y} \quad F_2 = k_2 \Delta_1 \cos\alpha = \frac{AE}{L/\cos\alpha}\Delta_1 \cos\alpha$$

Entonces, por equilibrio de fuerzas verticales en el nodo c,

$$P_c = P_{cP} + F_1 + 2F_2 \cos\alpha = P$$

Sustituyendo los valores de P_{cP}, F_1 y F_2 en la ecuación anterior y despejando Δ_1, se encuentra

$$\Delta_1 = \frac{PL}{AE(1 + 2\cos^3\alpha)}$$

[6]Si una fuerza axial fuese aplicada entre b y c, P_{cP} no sería cero. Por ejemplo, si una fuerza P_1 hacia abajo fuese aplicada a una distancia $L_{bc}/4$ arriba de c, según la ecuación 4-10, la fuerza empotrada hacia abajo en c sería $R_{cP} = 3P_1/4$.

Sustituyendo este valor de Δ_1 en las relaciones para las fuerzas en las barras, quedan verificados los resultados del ejemplo 4-12.

Si en este ejemplo no hubiese simetría respecto al eje vertical (ya sea por falta de simetría en la estructura misma o bien debido a la aplicación inclinada de la fuerza P), se desarrollaría también un desplazamiento horizontal en el nodo. Dos ecuaciones de equilibrio de fuerzas, una en la dirección horizontal y otra en la dirección vertical, deberían establecerse y resolverse simultáneamente para los desplazamientos horizontal y vertical. Tales casos se ilustran en las figuras 17-12 y 17-13 y se consideran también en la próxima sección.

Debe notarse que al agregar barras adicionales al sistema, como se muestra en la figura 19-11, no se incrementa la indeterminación cinemática de éste, que sigue siendo igual a dos. Por otra parte, en el método de las fuerzas, el número de redundantes estáticas aumenta, así como el número de ecuaciones simultáneas necesarias para determinar las redundantes. Sin embargo, esto no implica que el método de los desplazamientos siempre conduce a la solución de menos ecuaciones en comparación con el método de las fuerzas. Considere, por ejemplo, el caso de un cantilever apoyado y con un voladizo; véase la figura 19-12. Esta viga es estáticamente indeterminada sólo de primer grado, pero cinemáticamente indeterminada de tercer grado (rotaciones en b y c y una deflexión vertical en c); por consiguiente, sólo se requiere una ecuación con el método de las fuerzas, pero se requieren tres ecuaciones simultáneas con el método de los desplazamientos.

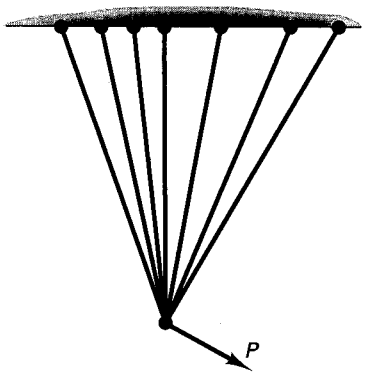


Fig. 19-11

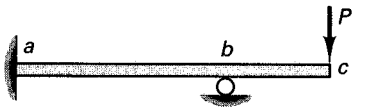


Fig. 19-12

19-6. Observaciones adicionales sobre el método de los desplazamientos

En esta sección se extiende el método de los desplazamientos a problemas con varios grados de indeterminación cinemática. Con este fin, considere la viga de la figura 19-13(a), donde el soporte guiado en c permite el desplazamiento vertical pero no una rotación de la viga. El otro grado de libertad de esta viga es la rotación de su tangente en el soporte b. Esta viga es entonces cinemáticamente indeterminada de segundo grado. Al restringir esos dos grados de libertad se obtiene un sistema que consiste en dos vigas empotradas, ab y bc, figura 19-13(b). El efecto de las cargas aplicadas externamente sobre esas dos vigas empotradas es producir un conjunto de fuerzas reactivas en los soportes. La acción de empotramiento (momento) A_{bP} en b es la *suma* de los momentos de empotramiento en las vigas ba y bc en b causados por las cargas aplicadas. Similarmente, la acción de empotramiento A_{cP} es la reacción vertical en c que restringe el desplazamiento vertical. Como el soporte es capaz de desarrollar un momento en c, no entra en esta etapa del problema.

A continuación, el soporte en b es girado un ángulo θ_b dando lugar a las acciones de empotramiento (momentos) A_{bb} y A_{cb} en los puntos b y c, respectivamente, como se muestra en la figura 19-13(c). Similarmente, A_{bc} y A_{cc} son causadas por el desplazamiento vertical Δ_c en c, figura 19-13(d).

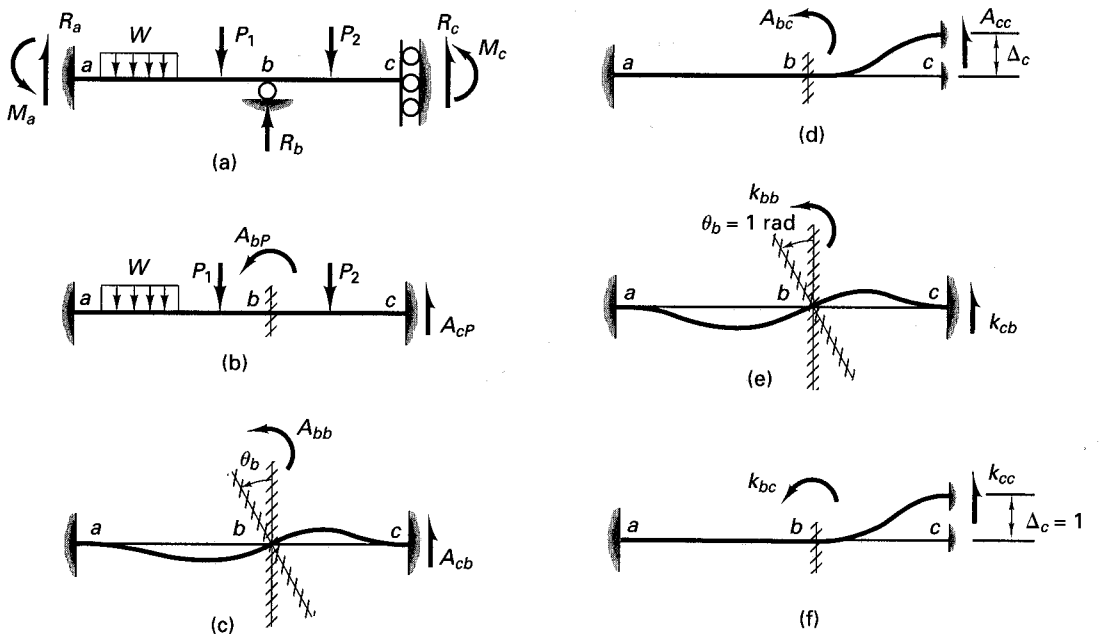


Fig. 19-13

Como ningún momento externo M_b está aplicado en b, ni una reacción vertical P_c está aplicada en c, las fuerzas resultantes $M_b \equiv P_b$ y P_c en esos puntos son iguales a cero. Esas dos fuerzas pueden encontrarse superponiendo tres análisis separados, mostrados en las figuras 19-13(b)-(d), que conducen a dos ecuaciones simultáneas de equilibrio:

$$\begin{aligned} P_b &= A_{bP} + A_{bb} + A_{bc} = 0 \\ P_c &= A_{cP} + A_{cb} + A_{cc} = 0 \end{aligned} \tag{19-12}$$

Estas ecuaciones pueden reescribirse en forma más significativa usando *coeficientes de rigidez* k_{bb}, k_{bc} y k_{cc}, definidos como las acciones de empotramiento mostradas en las figuras 19-13(e) y (f) debido a los desplazamientos unitarios (lineales o angulares) correspondientes a las indeterminaciones cinemáticas. Entonces, para un sistema lineal, los momentos en b y las reacciones verticales en c, causadas por los desplazamientos $\Delta_b = \theta_b$ y Δ_c, son

$$A_{bb} = k_{bb}\,\Delta_b \quad \text{y} \quad A_{bc} = k_{bc}\,\Delta_c \tag{19-13}$$

$$A_{cb} = k_{cb}\,\Delta_b \quad \text{y} \quad A_{cc} = k_{cc}\,\Delta_c \tag{19-14}$$

Sustituyendo esas relaciones en la ecuación 19-12,

$$\begin{aligned} P_b &= k_{bb}\,\Delta_b + k_{bc}\,\Delta_c + A_{bP} = 0 \\ P_c &= k_{cb}\,\Delta_b + k_{cc}\,\Delta_c + A_{cP} = 0 \end{aligned} \tag{19-15}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente y encontrarse así las incógnitas Δ_b y Δ_c.

Extendiendo este enfoque a sistemas con n grados de indeterminación cinemática, las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para determinar los desplazamientos nodales desconocidos Δ_i son

$$\begin{aligned} P_a &= k_{aa}\,\Delta_a + k_{ab}\,\Delta_b + \cdots + k_{an}\,\Delta_n + A_{aP} \\ P_b &= k_{ba}\,\Delta_a + k_{bb}\,\Delta_b + \cdots + k_{bn}\,\Delta_n + A_{bP} \\ &\vdots \\ P_n &= k_{na}\,\Delta_a + k_{nb}\,\Delta_b + \cdots + k_{nn}\,\Delta_n + A_{nP} \end{aligned} \tag{19-16}$$

donde los términos $P_a, P_b, \ldots, P_n$ corresponden a las fuerzas *externas* aplicadas *en los puntos nodales*. En ausencia de tales fuerzas, esos términos son cero. Los coeficientes de rigidez k_{ij} están asociados con un desplazamiento o con una rotación. Las acciones de empotramiento $A_{aP}, A_{bP}, \ldots, A_{nP}$ son causadas por las cargas aplicadas externamente.

En forma matricial, la ecuación 19-16 para el método de los desplazamientos puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & \cdots & k_{an} \\ k_{ba} & k_{bb} & \cdots & k_{bn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{na} & k_{nb} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \cdots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a - A_{aP} \\ P_b - A_{bP} \\ \cdots \\ P_n - A_{nP} \end{Bmatrix} \tag{19-17}$$

Como la matriz cuadrada consiste enteramente de coeficientes de rigidez, al método de los desplazamientos suele llamársele *método de las rigideces*. Para procedimientos generales para construir la matriz de rigidez, se refiere al lector a los textos previamente citados sobre elementos finitos o sobre análisis estructural matricial en las secciones 3-3 y 17-9. En este texto, se consideran sólo los problemas más simples.

Antes de proceder con ejemplos adicionales se mostrará que la matriz de rigidez es *simétrica* (es decir, $k_{ij} = k_{ji}$) y que está relacionada con la matriz de flexibilidad.

19-7. Reciprocidad de los coeficientes de rigidez

Para sistemas linealmente elásticos, puede obtenerse una relación análoga para coeficientes de rigidez similar a la encontrada en la sección 19-4 para los coeficientes de flexibilidad. Si la energía elástica del sistema es U, de acuerdo con el primer teorema de Castigliano, ecuación 18-18, el desplazamiento de las fuerzas P_i y P_j en las direcciones respectivas de las Δ' son

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \quad \text{y} \quad P_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j} \tag{19-18}$$

Alternativamente, puede verse en la ecuación 19-16 que una derivada parcial de P_i con respecto a Δ_j es k_{ij}. Similarmente, una derivada parcial de P_j

con respecto a Δ_i es k_{ji}. Efectuando esas operaciones con las ecuaciones 19-18, se establecen las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \Delta_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \, \partial \Delta_i} = k_{ij}$$

y

$$\frac{\partial P_j}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \, \partial \Delta_j} = k_{ji} \tag{19-19}$$

Como el orden de diferenciación para las derivadas mixtas no es importante,

$$\boxed{k_{ij} = k_{ji}} \tag{19-20}$$

Esta relación prueba que la matriz de los coeficientes de rigidez es *simétrica*, lo que es una propiedad muy importante para el análisis de sistemas estructurales.

La relación entre los coeficientes de rigidez y flexibilidad está ilustrada en el siguiente ejemplo. Es más compleja que para sistemas de un grado de indeterminación cinemática y estática.

Ejemplo 19-7[7]

Muestre la relación entre las matrices de flexibilidad y rigidez para el sistema de dos resortes mostrado en la figura 19-14. Las fuerzas externamente aplicadas son P_1, y P_2 y las flexibilidades y rigideces lineal elásticas para cada resorte se muestran en la figura.

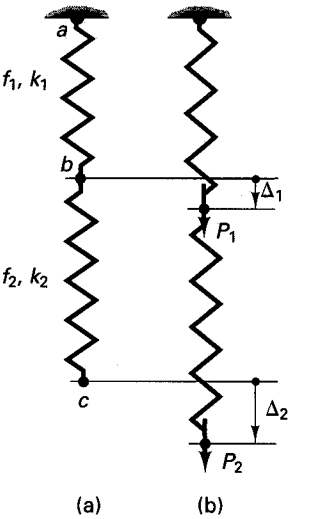


Fig. 19-14

SOLUCIÓN

El desplazamiento de los puntos nodales b y c para el sistema cargado puede escribirse usando las flexibilidades de los resortes como

$$\Delta_1 = (P_1 + P_2)f_1 \quad \text{y} \quad \Delta_2 = (P_1 + P_2)f_1 + P_2 f_2$$

donde la fuerza $P_1 + P_2$ actúa sobre el resorte ab.

Similarmente, las ecuaciones de equilibrio para cada punto nodal b y c, usando las rigideces de resorte, son

$$P_1 = k_1 \Delta_1 - k_2(\Delta_2 - \Delta_1) \quad \text{y} \quad P_2 = k_2(\Delta_2 - \Delta_1)$$

donde el alargamiento del resorte bc es $\Delta_2 - \Delta_1$.

[7]Adaptado de M. F. Rubinstein, *Matrix Computer Analysis of Structures* (*Análisis matricial de estructuras con computadora*), Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1966, pp. 60-63.

Reescribiendo esas ecuaciones en forma matricial se obtiene

$$\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1 & f_1\\ f_1 & f_1+f_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix}$$

y

$$\begin{Bmatrix}P_1\\ P_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\end{Bmatrix}$$

A continuación puede notarse que las flexibilidades de los resortes individuales pueden reemplazarse por los recíprocos de las constantes de resorte. Entonces, la matriz de flexibilidades, expresada en términos de constantes de resorte, es multiplicada por la matriz de rigidez usando las reglas de la multiplicación matricial, lo que da

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1}\\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Esto muestra que un producto de una matriz de flexibilidad por una matriz de rigidez conduce a una matriz *identidad*. Todos los elementos diagonales de esta matriz *unidad* son la unidad y todos los demás son cero.

Este resultado significa que una matriz de flexibilidad es una *inversa* de una matriz de rigidez y viceversa. Para esas matrices simétricas, esto puede escribirse simbólicamente como

$$[\mathbf{f}] = [\mathbf{k}]^{-1} \quad \text{o} \quad [\mathbf{k}] = [\mathbf{f}]^{-1} \tag{19-21}$$

En problemas con un solo grado de indeterminación estática y cinemática, esas expresiones degeneran en simples recíprocos de esas cantidades.

Ejemplo 19-8

Usando el método de los desplazamientos, calcule las rotaciones en *b* y *c* para la viga continua de *EI* constante cargada como se muestra en la figura 19-15(a) y determine los momentos en *a* y *b*.

SOLUCIÓN

En los soportes *b* y *c*, la viga puede girar libremente, lo que hace al sistema cinemáticamente indeterminado de segundo grado. Restringiendo temporalmente esos soportes contra rotaciones, se obtiene un sistema de dos vigas con extremos empotrados, figura 19-15(b). Las acciones de empotramiento para esas vigas pueden obtenerse con ayuda de la Tabla 11 en el apéndice. En lo que sigue, la primera letra del subíndice fuera de los corchetes que identifica a una viga, designa el extremo donde se aplica la acción de empotramiento.

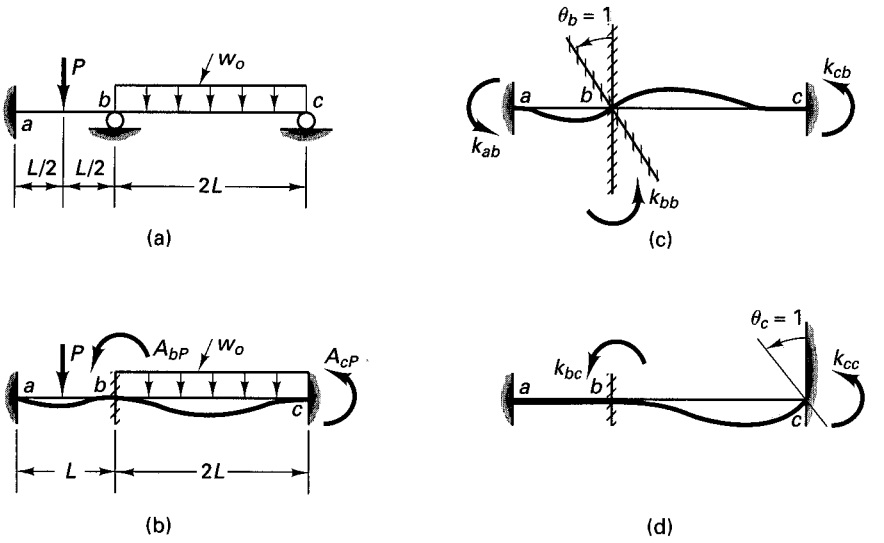


Fig. 19-15

Para la viga ab:

$$[A_{aP}]_{ab} = + PL/8 \quad \text{y} \quad [A_{bP}]_{ba} = - PL/8$$

Para la viga bc:

$$[A_{bP}]_{bc} = + w_o(2L)^2/12 = + w_oL^2/3 \quad \text{y} \quad [A_{cP}]_{cb} = - w_oL^2/3$$

Para el nodo b:

$$A_{bP} = [A_{bP}]_{ba} + [A_{bP}]_{bc} = - PL/8 + w_oL^2/3$$

Los *coeficientes de rigidez* pueden calcularse sometiendo los extremos empotrados temporalmente b y c a rotaciones unitarias *uno a la vez*, figuras 19-15(c) y (d). De nuevo, usando las fórmulas dadas en la Tabla 11 del apéndice y notando que los dos claros adyacentes contribuyen a la rigidez del nodo b, se tiene

$$k_{bb} = \left[\frac{4EI}{L}\right]_{ba} + \left[\frac{4EI}{2L}\right]_{bc} = \frac{6EI}{L} \qquad k_{bc} = \left[\frac{2EI}{2L}\right]_{bc} = \frac{EI}{L}$$

$$k_{cb} = \left[\frac{2EI}{2L}\right]_{cb} = \frac{EI}{L} \qquad k_{cc} = \left[\frac{4EI}{2L}\right]_{cc} = \frac{2EI}{L}$$

Similarmente, para el miembro ab, debido a una rotación unitaria en b,

$$k_{ba} = \left[\frac{4EI}{L}\right]_{ba} = \frac{4EI}{L} \quad \text{y} \quad k_{ab} = \left[\frac{2EI}{L}\right]_{ab} = \frac{2EI}{L}$$

Como no hay fuerzas (momentos) externamente aplicadas en b y c, por equilibrio en esos nodos, las ecuaciones 19-15 toman la forma

$$P_b = \frac{6EI}{L}\Delta_b + \frac{EI}{L}\Delta_c - \frac{PL}{8} + \frac{w_o L^2}{3} = 0$$

$$P_c = \frac{EI}{L}\Delta_b + \frac{2EI}{L}\Delta_c - \frac{w_o L^2}{3} = 0$$

Resolviendo simultáneamente esas dos ecuaciones,

$$\Delta_b \equiv \theta_b = \frac{L^2}{11EI}\left(\frac{P}{4} - w_o L\right) \quad \text{y} \quad \Delta_c \equiv \theta_c = \frac{L^2}{11EI}\left(-\frac{P}{8} + \frac{7}{3}w_o L\right)$$

Sustituyendo esos valores de los desplazamientos en las ecuaciones de superposición de los miembros, se encuentran los momentos de extremo en todos los miembros:

$$M_{ab} = [A_{aP}]_{ab} + k_{ab}\theta_b = \frac{15}{88}PL - \frac{2}{11}w_o L^2$$

$$M_{ba} = [A_{bP}]_{ba} + k_{ba}\theta_b = -\frac{3}{88}PL - \frac{4}{11}w_o L^2$$

$$M_{bc} = [A_{bP}]_{bc} + k_{bc}\theta_b + k_{cb}\theta_c = +\frac{3}{88}PL + \frac{4}{11}w_o L^2$$

$$M_{cb} = [A_{cP}]_{cb} + k_{cb}\theta_b + k_{cc}\theta_c = 0$$

Note que con la convención de signos para vigas empleada en esta solución, $M_{ba} + M_{bc} = 0$, ya que son de signo contrario.

Ejemplo 19-9

Resuelva el ejemplo 19-4 usando el método de los desplazamientos de análisis; véase la figura 19-16(a).

SOLUCIÓN

En este problema, como el punto nodal e puede moverse horizontal y verticalmente, el sistema tiene dos grados de libertad. Como se notó en el ejemplo 19-4, este sistema es también estáticamente indeterminado de segundo grado. Cada barra adicional que saliera de e incrementaría la indeterminación estática en un grado; sin embargo, el grado de indeterminación cinemática seguiría siendo de dos.

Los desplazamientos positivos horizontal y vertical, Δ_1 y Δ_2, mostrados en las figuras 19-16(b) y (c), respectivamente, son las incógnitas. Para el desplazamiento Δ_1, si el extremo e de la barra ie está *restringido* a moverse sólo horizontalmente, como en el diagrama superior de la figura 19-16(d), la barra se alarga Δ_1 sen α_i. Esto generaría una fuerza axial en la barra de $P_1^i = k^i \Delta_1$ sen α_i, donde la constante de resorte de la barra es $k^i = A_i E_i / L_i$.

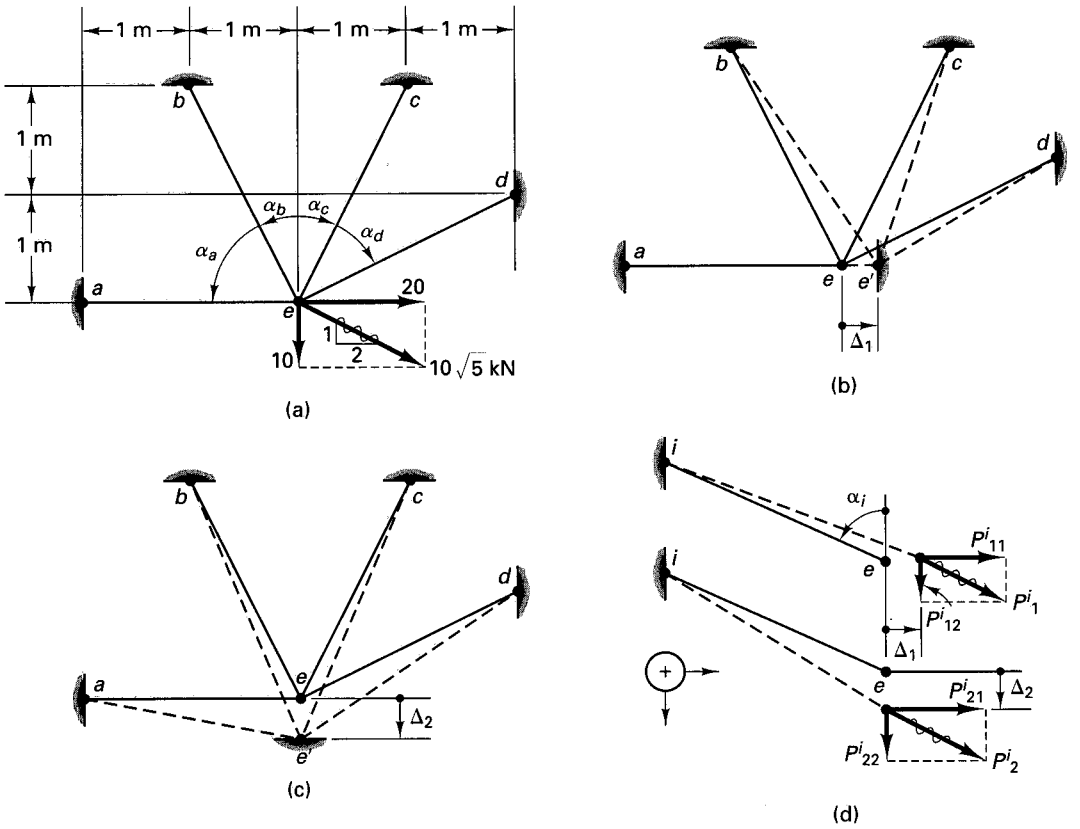


Fig. 19-16

Esta fuerza en la barra, P_1^i, puede descomponerse, respectivamente, en sus componentes horizontal y vertical, $P_{11}^i = P_1^i \operatorname{sen} \alpha_i$ y $P_{12}^i = P_1^i \cos \alpha_i$. Por tanto,

$$P_{11}^i = \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \operatorname{sen}^2 \alpha_i\right) \Delta_1 = k_{11}^i \Delta_1$$
$$P_{12}^i = \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \operatorname{sen} \alpha_i \cos \alpha_i\right) \Delta_1 = k_{12}^i \Delta_1 \tag{19-22a}$$

donde k_{11}^i y k_{12}^i son rigideces de barra para un desplazamiento horizontal Δ_1.

Por el mismo razonamiento, si el extremo e de la barra ie está *restringido* a moverse Δ_2 en la dirección vertical solamente, como se muestra en el diagrama inferior de la figura 19-16(d), las respectivas componentes horizontal y vertical para la barra son

$$P_{22}^i = \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \cos^2 \alpha_i\right) \Delta_2 = k_{22}^i \Delta_2$$
$$P_{21}^i = \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \cos \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_i\right) \Delta_2 = k_{21}^i \Delta_2 \tag{19-22b}$$

donde k^i_{21} y k^i_{22} son las rigideces vertical y horizontal, respectivamente, para un desplazamiento vertical Δ_2.

Para resolver este problema, esas ecuaciones deben aplicarse a cada una de las cuatro barras y sumarse para obtener las rigideces horizontal y vertical del sistema. Esto se lleva a cabo en la siguiente tabla:

Barra	α_i, *grados*	*sen* α_i	*cos* α_i	*sen*^{2} α_i	*cos*^{2} α_i	*sen* α_i *cos* α_i
ae	90.	1.	0.	1.	0.	0.
be	26.565	0.4472	0.8944	0.200	0.800	0.400
ce	−26.565	−0.4472	0.8944	0.200	0.800	−0.400
de	−63.435	−0.8944	0.4472	0.800	0.200	−0.400
			Suma:	2.200	1.800	−0.400

La rigidez relativa A_iE_i/L_i de cada barra es la unidad. Por tanto, de la tabla, la rigidez horizontal del sistema $k_{11} = \Sigma\, k^i_{11} = \Sigma\, \text{sen}^2\, \alpha_i = 2.2$, y similarmente, $k_{22} = \Sigma \cos^2 \alpha_i = 1.8$ y $k_{12} = k_{21} = \Sigma\, \text{sen}\, \alpha_i \cos \alpha_i = -0.4$.

En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 2.2 & -0.4 \\ -0.4 & 1.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

La solución de esta ecuación matricial es $\Delta_1 = 10.536$ y $\Delta_2 = 7.895$. Entonces, como para cada barra $A_iE_i/L_i = 1$,

$$F_i = \Delta_1\, \text{sen}\, \alpha_i + \Delta_2\, \text{sen}\, \alpha_2$$

Usando esta ecuación, $F_{ae} = +10.53$ kN, $F_{be} = +11.77$ kN, $F_{ce} = +2.35$ kN y $F_{de} = -5.88$ kN. Estos resultados concuerdan con los encontrados en el ejemplo 19-4 con el método de las fuerzas.

En contraste con el método de las fuerzas, la aplicación del método de los desplazamientos a un problema similar con más barras, es sólo ligeramente más complejo.

PROBLEMAS

Secciones 19-3 y 19-4

19-1. Demuestre que para una viga elástica lineal simplemente apoyada, el ángulo de rotación θ_{ji} de la curva elástica en j debido a un par que actúa en i (véase la figura), es igual al ángulo de rotación θ_{ij} en i debido al mismo par actuando en j. (*Sugerencia*: Use los resultados del ejemplo 19-1 y determine θ_{ij} con el método de área-momento o con funciones de singularidad.)

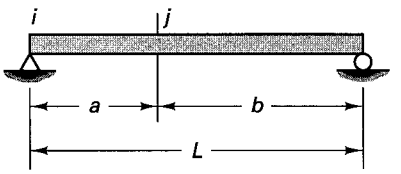


Fig. P19-1

19-2. Para la estructura plana elástica mostrada en la figura, (a) determine las reacciones y (b) dibuje el diagrama final de momento. Ambos miembros tienen la misma constante EI. (*Sugerencia*: Use el método de la fuerza virtual para encontrar las deflexiones.)

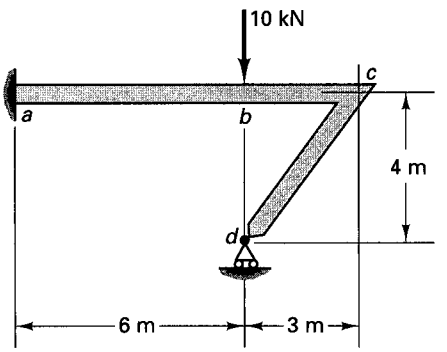


Fig. P19-2

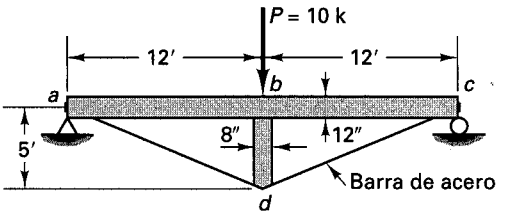


Fig. P19-3

19-3. Una viga de madera rectangular de 10 × 12 in está rigidizada por una barra redonda de acero de 1 in de diámetro y por un poste de madera de 8 × 8 in, como se muestra en la figura. Determine la fuerza que se desarrollará en el poste al aplicar una fuerza concentrada P = 10 k en el centro del claro. Para la madera, E_w = 1500 ksi y para el acero, $E_{st} = 30 \times 10^3$ ksi. Para fines de cálculo, considere que el poste *bd* tiene 5 ft de longitud.

19-4. Usando el método de las fuerzas, resuelva el ejemplo 19-3. Considere las reacciones en *b* y *c* como redundantes. (*Sugerencia*: Use la solución dada en el problema 14-51.)

19-5. Para la estructura plana que consiste en la barra *ab* y el marco *bcde* mostrados en la figura, (a) determine las reacciones y (b) dibuje el diagrama de momento flexionante para el marco. Todos los miembros son del mismo material. *EI* para el marco es constante y *AE* para la barra es *EI*/5. Suponga que la fuerza en la barra es la redundante. Trabaje en unidades k-ft.

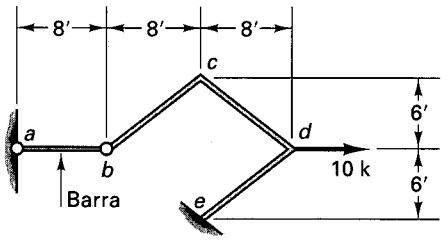


Fig. P19-5

19-6. Suponiendo comportamiento elástico y usando el método de las fuerzas, resuelva el problema 4-23.

19-7. Usando el método de las fuerzas, resuelva el problema 17-54. Considere las fuerzas en *AB* y *AD* como redundantes.

19-8. Para el sistema plano de seis barras elásticas mostrado en la figura, determine las fuerzas en las barras verticales debido a la fuerza aplicada $P = 30$ kN. Las barras están articuladas en los extremos. El área transversal A de cada barra es de 100 mm^2 y $E = 200$ GPa. (*Sugerencia*: Aproveche la simetría y use la ecuación 4-5.)

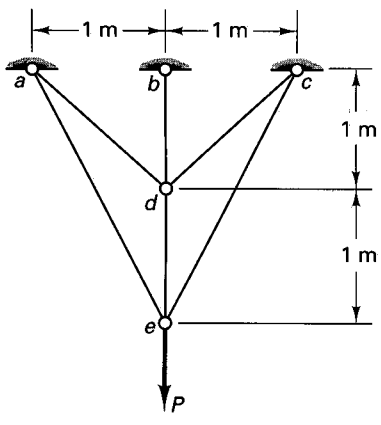


Fig. P19-8

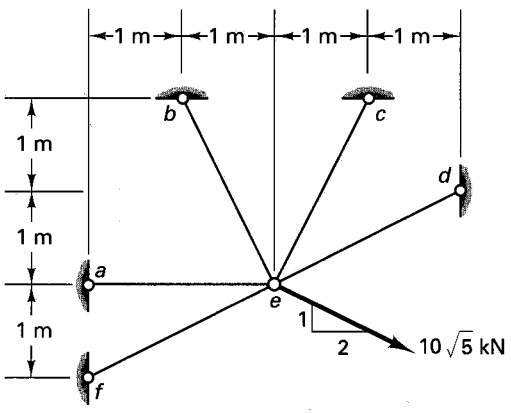


Fig. P19-9

19-9. El sistema plano de barras articuladas en sus extremos del ejemplo 19-4 se amplía agregando el miembro *fe*, como se muestra en la figura. (a) Suponiendo los miembros *ae*, *ce* y *fe* como redundantes, determine los valores numéricos para una matriz cuadrada de 3×3 de los coeficientes de flexibilidades y forme los correspondientes vectores columna como en la ecuación 19-6. (b) Si se requiere, encuentre las fuerzas en todas las barras.

19-10. Resuelva el ejemplo 19-4 suponiendo que $L/AE = 1$ para los miembros *ae* y *be*, y que $L/AE = 2$ para los miembros *ce* y *de*.

19-11. Para la estructura plana mostrada en la figura, determine las reacciones en los soportes y dibuje el diagrama de momento. Desprecie las deformaciones axiales y cortantes y suponga que *EI* es constante en toda la estructura. (*Sugerencia*: Use el método de la fuerza virtual para encontrar las deflexiones.)

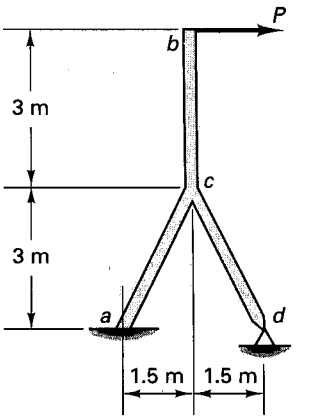


Fig. P19-11

19-12. Un tubo de acero de 4 in de diámetro con peso de 10.79 lb/ft se dobla en forma de un cuarto de círculo con radio $R = 100$ in y se conecta a dos recipientes a presión, como se muestra en la figura. Cuando está en operación, la temperatura de este tubo se puede elevar en 500°F respecto al medio ambiente. Para el material del tubo, $E = 29 \times 10^6$ psi y $\alpha = 6.5 \times 10^{-6}$/°F. (a) Suponiendo que los soportes del tubo en *A* y *B* son empotramientos, formule las ecuaciones de superposición para la solución de este problema. Los resultados encontrados en el ejemplo 17-4, figura 17-10, son útiles para este fin. Obtenga coeficientes de flexibilidad adicionales usando un método de energía. Considere sólo los efectos de flexión al establecer esas cantidades. (b) Resuelva las ecuaciones precedentes simultáneamente y dibuje el diagrama de momento flexionante para el tubo causado por el cambio de temperatura.

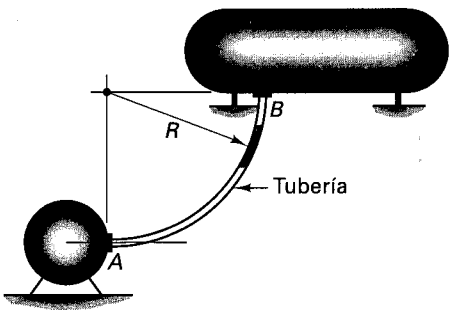


Fig. P19-12

Secciones 19-5 y 19-6

19-13. Resuelva el ejemplo 19-8 suponiendo que el extremo *c* está empotrado.

19-14. Usando el método de los desplazamientos, determine la rotación de la curva elástica en *b* y los momentos en *a*, *b* y *c* para la viga continua mostrada en la figura. *EI* es constante.

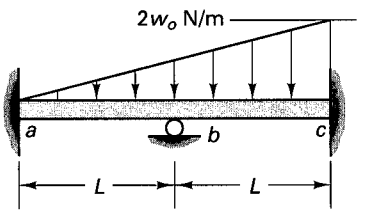


Fig. P19-14

19-15. Resuelva el problema 19-14 suponiendo que el extremo *c* está simplemente apoyado.

19-16. Determine la deflexión y rotación en el extremo del voladizo mostrado en la figura debido a la fuerza aplicada *P*. Use el método de los desplazamientos. (*Sugerencia*: Ambas ecuaciones de equilibrio pertenecen al extremo *b*; una requiere que $M_b = 0$ y la otra que $R_b = -P$.)

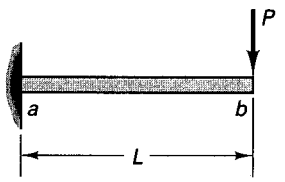


Fig. P19-16

19-17. Considere las siguientes condiciones aplicables a la viga continua *ac* mostrada en la figura 19-13(a): (a) Ambos claros son de igual longitud *L*, (b) el claro *ab* está cargado con una carga hacia abajo uniformemente distribuida w_o, (c) el claro *bc* está cargado con una fuerza *P* concentrada hacia abajo en el centro del claro y (d) *EI* es constante. Las condiciones de frontera son las que se muestran. Determine la rotación en *b* y el desplazamiento vertical en *c* debido a las cargas aplicadas. Calcule los momentos en *a*, *b* y *c*.

19-18. Un cantilever apoyado de *EI* constante está cargado con una fuerza concentrada $P = 100$ N, como se muestra en la figura. (a) Usando el método de las fuerzas, determine la reacción en *b*. Luego calcule la rotación de la curva elástica en *b* y *c* y la deflexión en *c*. (*Sugerencia*: Para las rotaciones y la deflexión, use el método de área-momento.) (b) Usando el método de los desplazamientos, determine las rotaciones en *b* y *c* y la deflexión en *c*. Luego calcule los momentos en *a* y *b* y la reacción en *b*. (*Sugerencia*: Las tres fuerzas externas aplicadas en *b* y *c* son $M_b = 0$, $M_c = 0$ y $R_c = -100$ N.)

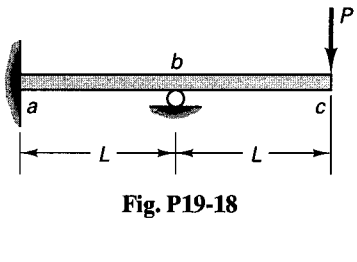


Fig. P19-18

19-19. Resuelva el ejemplo 19-9 suponiendo que $L/AE = 1$ para los miembros *ae* y *be*, y $L/AE = 2$ para los miembros *ce* y *de*.

19-20. Usando el método de los desplazamientos, encuentre las fuerzas en las barras para el sistema de barras articuladas dado en el problema 19-9.

20

Análisis plástico al límite

20-1. Introducción

En 1638, Galileo Galilei describió[1] su experimento con una viga de madera empotrada en voladizo, como se muestra en la figura 20-1. Él supuso que las fibras a tensión de la viga no se alargaban, lo que implicaba que la viga tenía una distribución uniforme de esfuerzos en su sección transversal.[2] Un grupo de científicos distinguidos, entre ellos Mariotte, Newton, Euler y Musschenbrock, trataron de aclarar el problema con referencia particular a la elasticidad del material. A un nivel básico, Navier (1785-1836), un pedagogo francés, siguiendo los experimentos sobre esfuerzo-deformación unitaria de Mariotte (1620-1684), resolvió correctamente el problema para materiales elásticos. De ahí en adelante, la hipótesis cinemática sobre las secciones planas se convirtió en una hipótesis de trabajo en el análisis de vigas y columnas (véanse las secciones 8-2 y 9-4). Simultáneamente con esta hipótesis, la idea de un comportamiento lineal elástico del material, se

[1]Galileo Galilei, *Discorsi e demonstrazioni matematiche*, 1638; véase la traducción inglesa, *Two New Sciences*, por H. Crew y A. de Silvio, Nueva York, Macmillan, 1933.

[2]S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials,* Nueva York, McGraw-Hill, 1953, p.12.

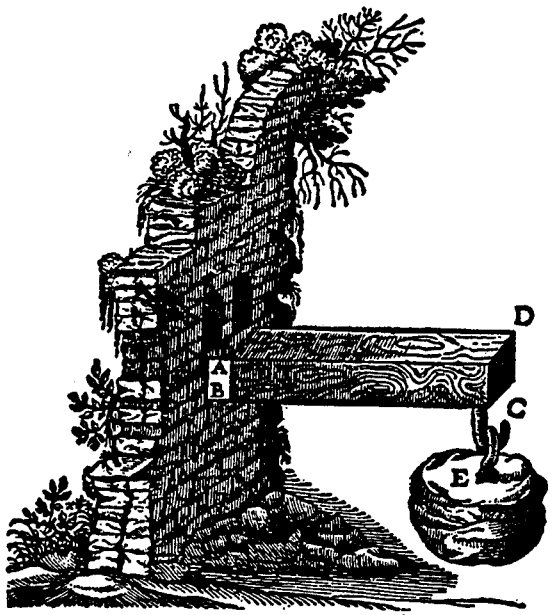


Fig. 20-1 Experimento de Galileo con una viga de madera, alrededor de 1638 [cortesía de Dover Publications, tomado de *A History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials* (*Historia de la teoría de la elasticidad y de la resistencia de materiales*), por I. Todhunter y K. Pearson, 1960].

afianzó fuertemente en la práctica ingenieril. Virtualmente todos los códigos se basan en esos conceptos. Además, importantes avances en la teoría matemática de la elasticidad y en la tecnología de las computadoras, han hecho muy atractiva la adherencia a los conceptos elástico lineales.

Es totalmente correcto emplear en muchos casos la teoría elástica lineal. Para este enfoque, el diseño de máquinas por carga de fatiga cíclica es un excelente campo de aplicación. Sin embargo, para cargas casi-estáticas o para sobrecargas catastróficas, así como para el diseño de misiles, son necesarias mejores aproximaciones para el comportamiento del material. En todo este texto se ha intentado atraer la atención del lector sobre los diferentes niveles posibles de aproximaciones de las relaciones esfuerzo-deformación unitaria (véanse las secciones 2-8, 4-6, 6-13 y 10-5). Finalmente, un enfoque simplificado sobre el comportamiento plástico ideal ha comenzado a emerger como una herramienta de trabajo para algunas aplicaciones.

Desarrollado primero en Europa[3] y fomentado al principio de la década de los 60 por T. R. Higgins[4] en los Estados Unidos,[5] este enfoque es ahora usado activamente en todo el mundo. La necesidad de modificar el diseño sísmico a lo largo de estas líneas, fue acelerada por el nada satisfactorio comportamiento de los edificios después de los recientes sismos de

[3]G. Kazinczy, "Experiments with clamped girders" ("Experimentos con trabes empotradas"), *Betonszembe*, **2**, núms. 4, 5 y 6, 1914, (en húngaro); H. Maier-Leibnitz, "Contributions to the problems of ultimate carrying capacity of structural steel" ("Contribuciones a los problemas de la capacidad última de carga en acero estructural"), *Die Bautechnik*, **1**, núm. 6, (en alemán); A. A. Gvozdev, *Analysis of Carrying Capacity of Structures by Limit Equilibrium Method* (*Análisis de la capacidad de carga de estructuras por el método del equilibrio límite*), Moscú, Stroiizdat, 1949, (en ruso).

[4]Comunicación privada del AISC ,1953.

[5]P. G. Hodge, Jr., *Plastic Analysis of Structures* (*Análisis plástico de estructuras*), Nueva York, McGraw-Hill, 1959.

gran magnitud ocurridos en California (Loma Prieta en 1989 y en Northridge en 1994), así como en Japón [Hyogoken-Nabu (Kobe) en 1995]. Esos eventos mostraron claramente que las extrapolaciones de las soluciones elásticas al rango inelástico del comportamiento estructural no son realistas. Una aproximación mucho mejor al comportamiento real de una estructura cerca del colapso, puede obtenerse suponiendo un comportamiento plástico de los miembros y nodos. El análisis plástico al límite para materiales dúctiles puede proporcionar una buena indicación sobre dónde los miembros o nodos están excesivamente esforzados. Las soluciones proporcionadas por este enfoque es el propósito de este capítulo.

20-2. Análisis plástico al límite de vigas[6]

En los ejemplos 4-7 y 4-12 se dieron los procedimientos para determinar la carga última de sistemas de barras cargadas axialmente de material elástico idealmente plástico. Esas cargas últimas son los estados límite plásticos. En el proceso de obtención de las cargas, se considera todo el rango de comportamiento elastoplástico del sistema bajo una carga creciente. Como puede verse en las figuras 4-13 o 4-18, hay tres regiones distintas de respuesta. Al principio, esos sistemas responden de manera lineal. Luego, una parte del sistema estructural fluye mientras que el resto continúa deformándose elásticamente. Éste es el rango de flujo plástico contenido. Finalmente, una estructura continúa fluyendo sin ningún incremento adicional de la carga aplicada. En esta etapa del comportamiento de las estructuras idealmente plásticas, las deformaciones se vuelven ilimitadas. Esta condición es el estado límite plástico. En esta idealización analítica se desprecian los efectos del endurecimiento por deformación, así como los cambios geométricos de la estructura.

Como se mostró en los ejemplos previos, un cálculo directo del estado límite plástico para materiales idealmente plásticos es a la vez posible y bastante simple. Desde el punto de vista práctico, dichos cálculos nos dan información sobre el modo de colapso de las estructuras dúctiles. Sin embargo, tales soluciones directas para la carga límite plástica no proporcionan una información completa sobre el comportamiento inelástico. Si bajo una carga de servicio o de trabajo ocurrió una fluencia previa, las deflexiones y distribución de las fuerzas permanecen desconocidas. Sólo las soluciones paso a paso por computadora, o soluciones para casos simples, como en los ejemplos 4-7 y 4-12, pueden proporcionar una historia completa de las distribuciones de las fuerzas y de las deflexiones.

El mismo comportamiento general es exhibido por vigas y marcos elásticos, idealmente plásticos y aquí el objetivo es desarrollar procedimientos simplificados para determinar directamente los estados límite plásticos para tales miembros. Al dejar a un lado las etapas elástica y elastoplástica de carga y determinar las cargas límite plásticas, el procedimiento resulta relativamente simple. Algunos resultados previamente establecidos serán reexaminados como referencia.

[6]Para mayores detalles, véase J. Lubliner, *Plasticity Theory* (*Teoría de la plasticidad*), Nueva York, Macmillan, 1990.

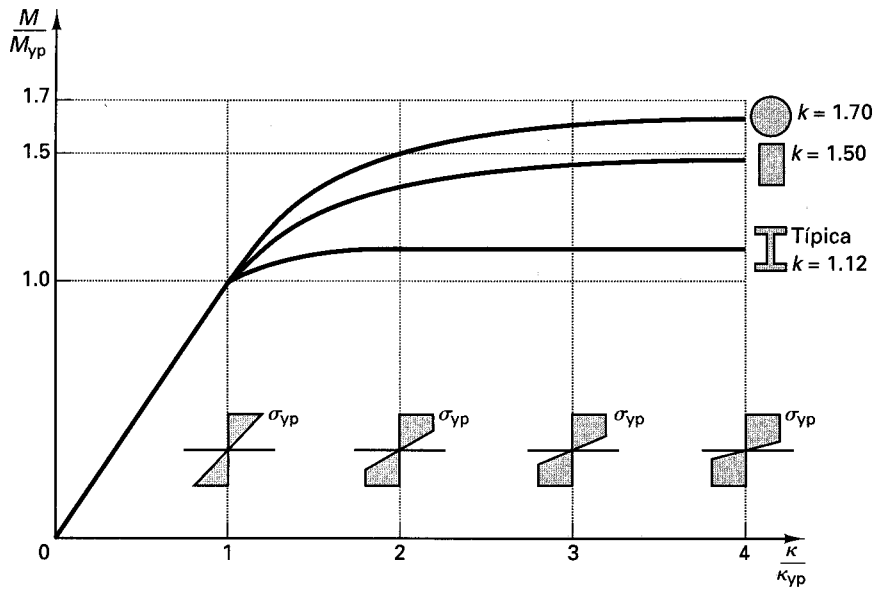


Fig. 20-2 Relaciones momento-curvatura para secciones transversales circulares, rectangulares e I. $M_p/M_{yp} = k$, (factor de forma).

En la figura 20-2 se muestran las relaciones típicas momento-curvatura normalizadas con respecto a M_{yp} para vigas elásticas, perfectamente plásticas para tres secciones transversales diferentes. En el ejemplo 14-14 (véase la figura 14-25) se establecieron los resultados básicos para una viga rectangular. Los resultados para los otros dos casos pueden hallarse siguiendo el mismo procedimiento. En la figura 20-3 se muestran curvas normalizadas con respecto a M_p. En este diagrama se agrega el comportamiento de una sección transversal idealizada con grandes patines y un alma despreciablemente pequeña.

En ambos diagramas, al plastificarse las secciones transversales ocurre un rápido ascenso de las curvas hacia sus respectivas asíntotas. Esto significa que poco después de alcanzarse la capacidad elástica de una viga, se alcanza y se mantiene un momento constante muy cercano a M_p. Esto es particularmente cierto para el caso importante de una viga I. Como puede verse en la figura 20-3, el comportamiento elastoplástico para esta sección transversal está esencialmente confinado al rango entre B' y C; para el resto, el momento es esencialmente igual a M_p. La influencia del núcleo elástico próximo al eje neutro de la viga es más pronunciada para miembros rectangulares o redondos, cuyos factores de forma k son mayores que para una viga I (figura 20-2). Sin embargo, en el análisis plástico al límite de miembros sometidos a flexión, se supone por lo general que *una transición abrupta del comportamiento elástico al idealmente plástico ocurre bajo* M_p. Por tanto, se considera que el comportamiento del miembro entre M_{yp} y M_p es elástico. Se supone además, que cuando se alcanza M_p, se forma una *articulación plástica* en el miembro. A diferencia de una articulación sin fricción que permite una rotación libre, se postula que la articulación plástica permite que ocurran grandes rotaciones bajo un *momento plástico constante* M_p.

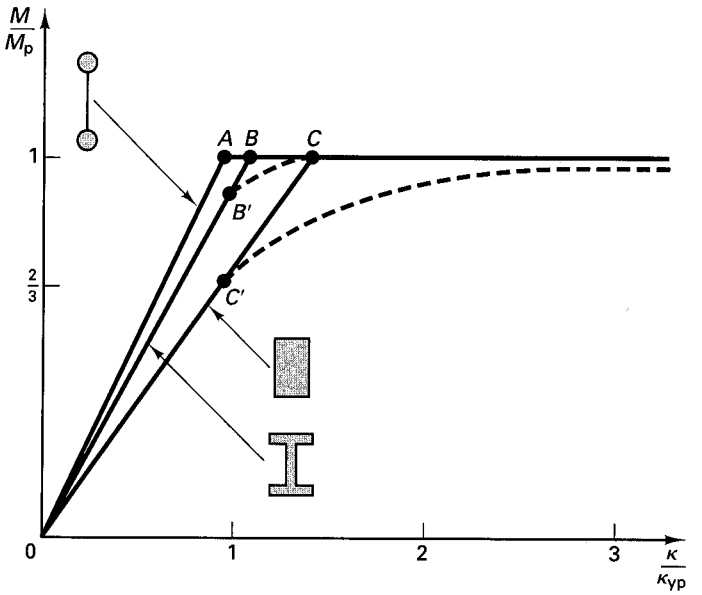


Fig. 20-3 Idealizaciones momento-curvatura para los análisis plásticos de vigas de diferentes secciones transversales.

En un análisis plástico al límite de vigas, los desplazamientos elásticos en relación con los plásticos, son pequeños y pueden despreciarse. Análisis detallados han mostrado[7] que es suficientemente exacto considerar las vigas como rígidas-plásticas, con la plasticidad confinada a las articulaciones plásticas en *puntos*. En realidad, las articulaciones plásticas se extienden a lo largo de pequeñas longitudes de las vigas que dependen de las condiciones de carga.

La teoría aproximada vista aquí es aplicable a vigas, así como a columnas sometidas a fuerzas axiales moderadas. Cuando una sección transversal no tiene simetría biaxial, los momentos positivos y negativos difieren en sus magnitudes y deben tomarse en cuenta en el análisis. Un método para determinar la capacidad plástica reducida de miembros en presencia de fuerzas axiales se vió en la sección 9-4.

Al insertar una articulación plástica bajo una carga plástica límite de una viga estáticamente determinada, puede formarse un mecanismo cinemático que permite un desplazamiento ilimitado del sistema. A éste se le llama comúnmente *mecanismo de colapso*.[8] Para cada grado de indeterminación estática de una viga, debe agregarse una articulación plástica adicional para formar un mecanismo de colapso. La inserción de articulaciones plásticas debe ser tal que se obtenga un mecanismo cinemáticamente *admisible* (plausible) de colapso. El uso de mecanismos cinemáticamente admisibles de colapso se ilustra en los siguientes ejemplos.

[7]Por ejemplo, véase L. S. Beedle, *Plastic Design of Steel Frames* (*Diseño plástico de estructuras de acero*), Nueva York, Wiley, 1966, o S. J. Moy, *Plastic Methods for Steel and Concrete Structures* (*Métodos plásticos para estructuras de acero y concreto*), Nueva York, Wiley, 1981.

[8]En análisis sísmico, las articulaciones plásticas disipan energía. Por tanto, es preferible llamar a tales mecanismos, *mecanismos disipadores de energía*.

En el diseño plástico al límite, es necesario multiplicar las cargas de trabajo por un factor de carga mayor que la unidad para obtener las *cargas factorizadas* de diseño. Esto es análogo al uso de un factor de seguridad en los análisis elásticos. Este tema se vio en la sección 1-11.

Hay dos métodos comunes de análisis plástico al límite. Uno se basa en la estática y el otro en el trabajo virtual. En cualesquiera de los dos métodos, los momentos flexionantes en un miembro no deben exceder el momento plástico M_p y las condiciones de equilibrio deben ser satisfechas siempre. El procedimiento para formar mecanismos cinemáticamente admisibles, de manera algo similar al establecimiento de las condiciones de continuidad del análisis elástico, se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 20-1

Una fuerza P concentrada se aplica en el centro del claro de una viga prismática simplemente apoyada, como se muestra en la figura 20-4(a). Si la viga está hecha de un material dúctil, ¿cuál es la carga límite plástica $P_{\text{últ}}$? Obtenga la solución usando (a) el método de equilibrio y (b) el método del

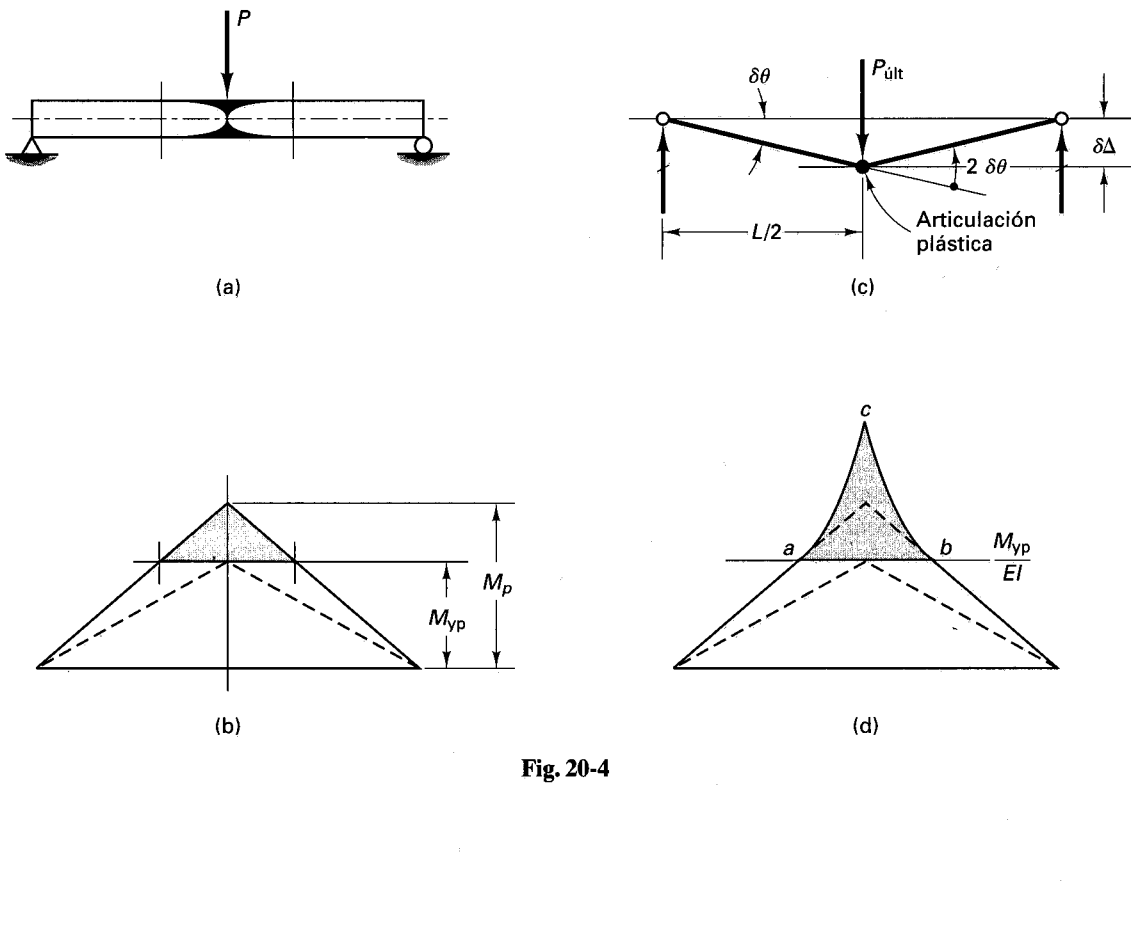


Fig. 20-4

trabajo virtual. Considere sólo comportamiento por flexión (es decir, ignore el efecto de las fuerzas cortantes). Ignore el peso de la viga.

SOLUCIÓN

(a) La forma del diagrama de momento es la misma independientemente de la magnitud de la carga. Para cualquier valor de P, el momento máximo $M = PL/4$, y si $M \leq M_{yp}$, la viga se comporta elásticamente. Cuando el momento es M_{yp}, la fuerza en la fluencia es

$$P_{yp} = 4M_{yp}/L$$

Cuando M_{yp} es excedido, la viga comienza a ceder y continúa haciéndolo hasta que se alcanza el momento plástico M_p, figura 20-4(b).

El diagrama de curvatura antes de que se alcanza M_p en el centro del claro de la viga se parece al que muestra la figura 20-4(d). Como la curvatura elástica puede cuando mucho alcanzar el valor M_{yp}/EI, es excedida, como se muestra, arriba de la línea *ab*. En M_p, la parte totalmente plástica de la viga cerca del centro se muestra sombreada en la figura 20-4(a). Esta región es considerablemente más estrecha para vigas I que para la sección transversal rectangular implicada en esta figura, porque la mayor parte del momento flexionante es tomado por los patines. La curvatura en el centro del claro de la viga se vuelve muy grande cuando el momento se aproxima a M_p y continúa creciendo sin límite (véase la figura 20-3). Haciendo el momento plástico M_p igual a $PL/4$ con $P = P_{últ}$, se obtiene el resultado buscado:

$$P_{últ} = 4M_p/L$$

Note que la consideración de la región plástica real indicada en la figura 20-4(a) es innecesaria en este cálculo. Una comparación de este resultado con $P_{yp} = 4\,M_{yp}/L$ muestra que

$$P_{últ} = \frac{M_p}{M_{yp}} P_{yp} = kP_{yp}$$

donde la diferencia entre las dos fuerzas depende sólo del factor de forma k.

(b) Un mecanismo cinemático virtual admisible, suponiendo una viga rígida-plástica, se muestra en la figura 20-4(c). El trabajo virtual externo es $P_{últ}\,\delta\Delta$, donde por geometría $\delta\Delta = L\,\delta\theta/2$. El trabajo virtual interno es causado al girar *Mp* un ángulo de $2\,\delta\theta$. Por consiguiente, según la ecuación 17-19, al igualar las expresiones del trabajo,

$$P_{últ}\,\delta\Delta = P_{últ}L\,\delta\theta/2 = M_p(2\,\delta\theta)$$

Despejando $P_{últ}$, se obtiene igual que antes,

$$P_{últ} = 4M_p/L$$

Ejemplo 20-2

Una viga prismática de material dúctil, empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, soporta una carga concentrada en el centro, como se muestra en la figura 20-5(a). Determine la carga límite plástica $P_{últ}$ usando (a) el método de equilibrio y (b) el método del desplazamiento virtual. Compare el resultado con el de la solución elástica. Desprecie el peso de la viga.

SOLUCIÓN

(a) Los resultados de un análisis elástico se muestran en la figura 20-5(b). Los mismos resultados están redibujados en la figura 20-5(c) desde la línea base horizontal AB. En ambos diagramas, las porciones sombreadas representan el resultado neto. Note que las ordenadas auxiliares $PL/4$ tienen precisamente el valor del momento máximo en una viga simple con fuerza concentrada en el centro del claro.

Haciendo el momento elástico máximo igual a M_{yp}, se obtiene la fuerza P_{yp} en la fluencia inminente

$$P_{yp} = \frac{16M_{yp}}{3L}$$

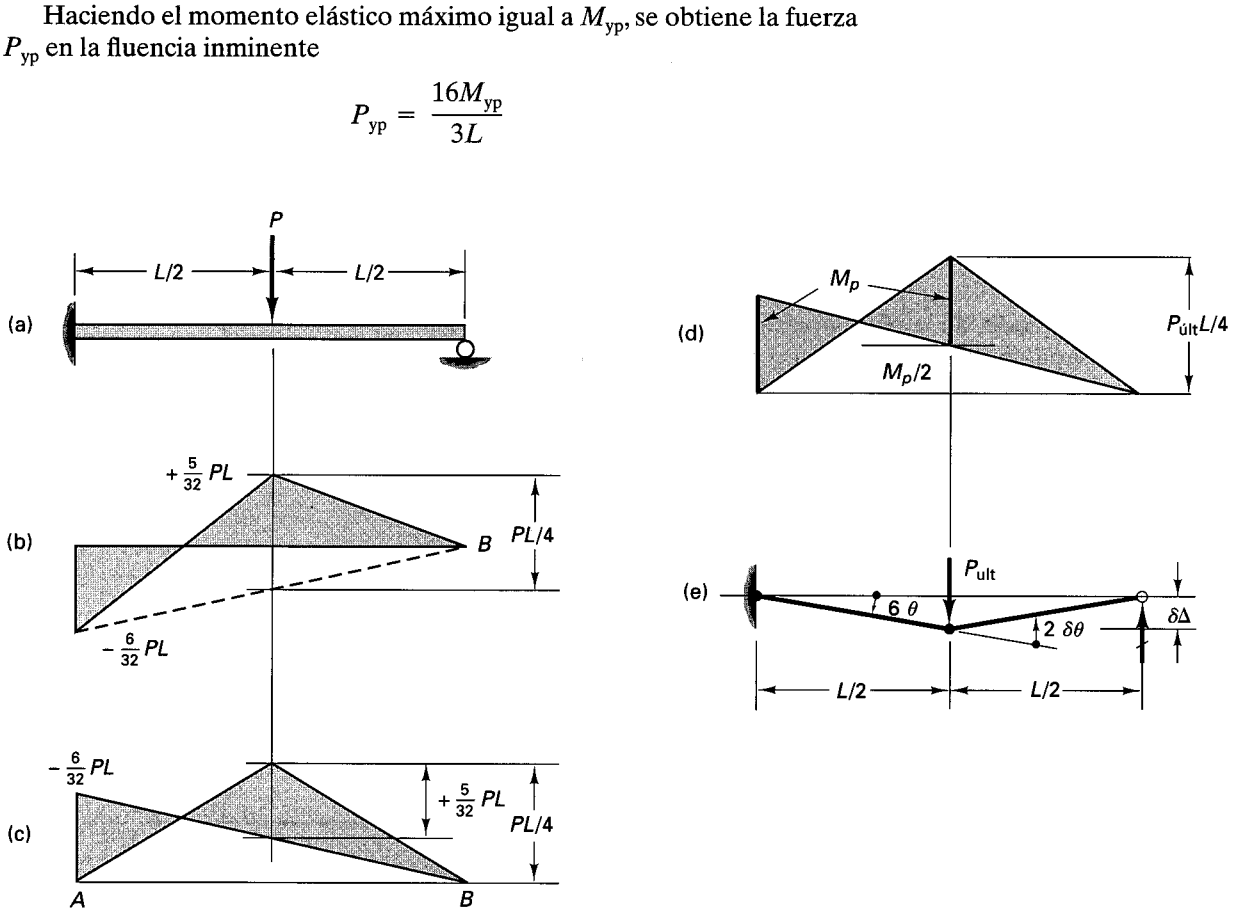


Fig. 20-5

Cuando la carga se incrementa más allá de P_{yp}, el momento en el extremo empotrado crece y puede alcanzar pero no exceder M_p. Esto es cierto también para el momento en el centro del claro. Esas condiciones límite se muestran en la figura 20-5(d). Bajo la carga plástica límite es necesario tener un mecanismo cinemáticamente admisible. Con las dos articulaciones plásticas y un rodillo a la derecha, esta condición se satisface, figura 20-5(e).

De la construcción geométrica en la figura 20-5(d), en el centro del claro, $M_p + M_p/2 = P_{últ}L/4$. Por consiguiente,

$$P_{últ} = 6M_p/L$$

Comparando este resultado con P_{yp}, se tiene

$$P_{últ} = \frac{9M_p}{8M_{yp}} P_{yp} = \frac{9}{8} kP_{yp}$$

El incremento de $P_{últ}$ sobre P_{yp} es debido a dos causas: el factor de forma k y la *igualización de los momentos máximos*. [Compare los diagramas de momento en las figuras 20-5(c) y (d).]

(b) Para el desplazamiento virtual mostrado en la figura 20-5(e), el trabajo virtual externo bajo la carga plástica límite es $P_{últ}\,\delta\Delta$. El trabajo virtual interno tiene lugar en las articulaciones plásticas en el soporte izquierdo y en el centro del claro. Igualando esas expresiones de trabajo, según la ecuación 17-19, resulta

$$P_{últ}\,\delta\Delta = P_{últ}L\,\delta\theta/2 = M_p\,\delta\theta + M_p(2\,\delta\theta)$$

de donde, como antes,

$$P_{últ} = 6M_p/L$$

Ejemplo 20-3

Una viga prismática de material dúctil está cargada como se muestra en la figura 20-6(a). Usando el método del desplazamiento virtual, determine las cargas límite plásticas. Desprecie el peso de la viga.

SOLUCIÓN

En este caso, son posibles varios mecanismos cinemáticos de desplazamiento y la solución se encuentra por medio de un proceso de tanteos. El mecanismo correcto es aquel en que el desplazamiento virtual supuesto genera un diagrama de momento compatible.

Un mecanismo admisible se muestra en la figura 20-6(b). Igualando los trabajos virtuales externo e interno, ecuación 17-19, e identificando las cargas límite plásticas para este caso por P_1 y $2P_1$, se tiene

$$(2P_1)(L\,\delta\theta/4) = M_p\,\delta\theta + M_p 2\,\delta\theta + M_p\,\delta\theta$$

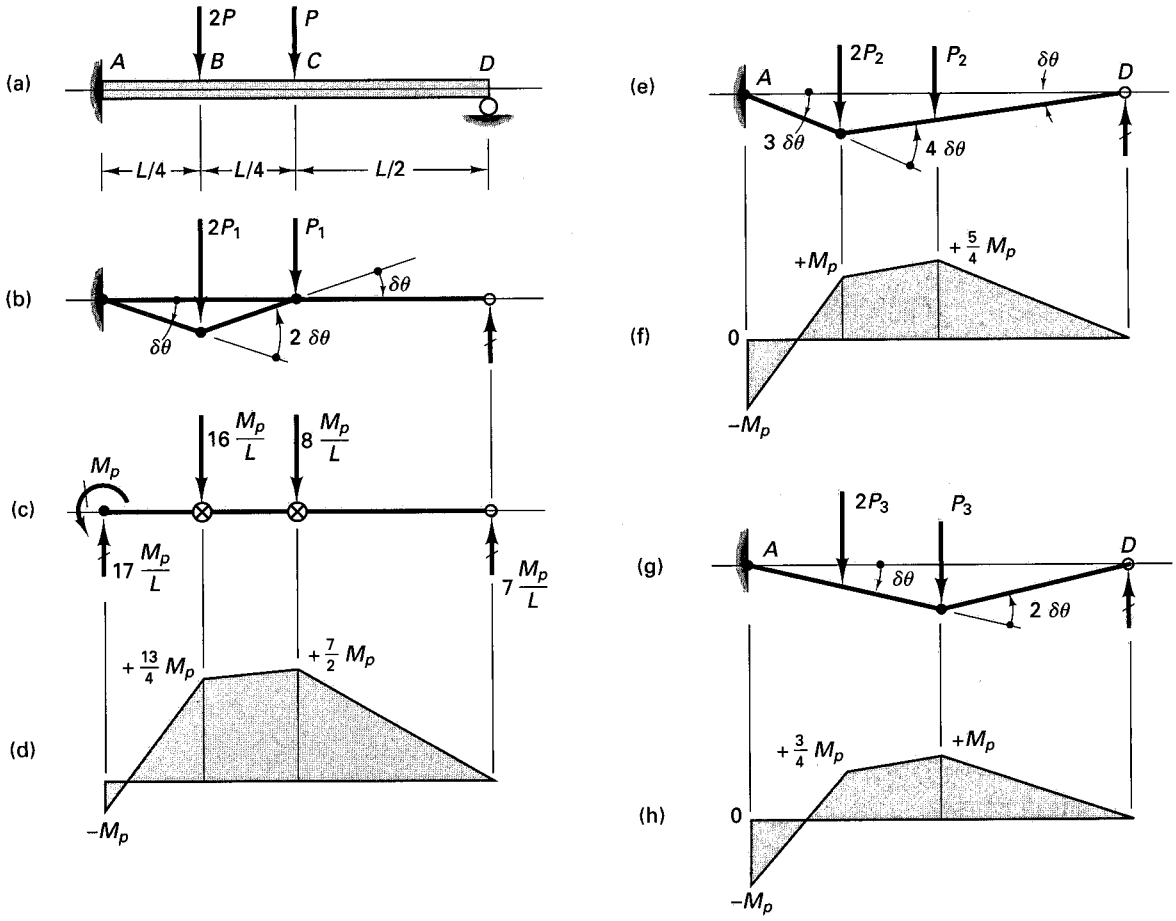


Fig. 20-6

donde los tres términos a la derecha se deben, respectivamente, a las articulaciones plásticas en A, B y C. La solución de esta ecuación da

$$P_1 = 8M_p/L \qquad \text{y} \qquad 2P_1 = 16M_p/L$$

Aplicando las fuerzas a la viga y suponiendo que las articulaciones B y C están bloqueadas, figura 20-6(c), el diagrama resultante de momento flexionante se muestra en la figura 20-6(d). Este diagrama muestra que con P_1 y $2P_1$, los momentos en B y C son mayores que M_p. Esta solución de *límite superior* establece que una carga encontrada con base en un mecanismo cinemático admisible supuesto, es siempre mayor que, o, cuando mucho, igual a la carga plástica límite.[9]

[9]Para una prueba de esto, véanse cualquiera de las referencias citadas sobre análisis plástico y H. J. Greenberg y W. Prager, "Limit design of beams and frames" ("Diseño al límite de vigas y marcos"), *Trans. ASCE*, **117**, 1952, pp. 447-458.

Reduciendo P_1 y $2P_1$ por una razón de $2/7$, *se satisfacen* las condiciones para la capacidad por momento plástico del miembro, así como la de equilibrio. Como tal solución ocurre antes del desarrollo pleno de un mecanismo cinemático, ella da el *límite inferior*[10] para las cargas aplicadas.

Con base en este razonamiento, los resultados obtenidos con el mecanismo supuesto tienen los siguientes límites inferior y superior:

$$\frac{2}{7} \times 8\frac{M_p}{L} = \frac{16}{7}\frac{M_p}{L} < P_1 < 8\frac{M_p}{L}$$

Una relación similar es aplicable para $2Pi$. Esos límites están más separados y se ensayan los mecanismos alternativos que se muestran en las figuras 20-6(e) y (g).

Siguiendo el procedimiento anterior, los resultados para el mecanismo en la figura 20-6(e) dan $P_2 = 3.5M_p/L$ y $2P_2 = 7M_p/L$. El diagrama de momento correspondiente a esas fuerzas se muestra en la figura 20-6(f). Esos resultados establecen mejores límites para la solución, que son

$$\frac{4}{5} \times 3.5\frac{M_p}{L} = 2.8\frac{M_p}{L} < P_2 < 3.5\frac{M_p}{L}$$

Llevando a cabo una solución para el mecanismo en la figura 20-6(g), puede demostrarse que $P_3 = 3M_p/L$ y $2P_3 = 6M_p/L$. El diagrama de momento para esas fuerzas en la figura 20-6(h) confirma la selección correcta del mecanismo ya que los momentos en A y C son cada uno igual a M_p. Por tanto, la solución es "exacta".

El mecanismo en la figura 20-6(b) no es una buena selección para este problema. Sin embargo, aun esta solución, como puede verse en la figura 20-6(c), indica que la articulación plástica dentro del claro debe estar en C. Aprovechando tal observación, el resultado exacto podría haberse obtenido más rápidamente.

Este problema puede resolverse fácilmente por el método del equilibrio. Para tal solución, se prepara primero el diagrama de momento, suponiendo a la viga simplemente apoyada. Luego se dibuja una línea inclinada, como se muestra en la figura 20-5(d), de modo que momentos M_p iguales se desarrollen en A y C.

Ejemplo 20-4

Una viga prismática de material dúctil, empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, soporta una carga uniformemente distribuida, como se muestra en la figura 20-7(a). Encuentre la carga límite plástica $w_{\text{últ}}$ usando (a) el método del equilibrio y (b) el método de la fuerza virtual.

[10]Una prueba y un enunciado del teorema del límite inferior pueden encontrarse en las referencias previamente citadas.

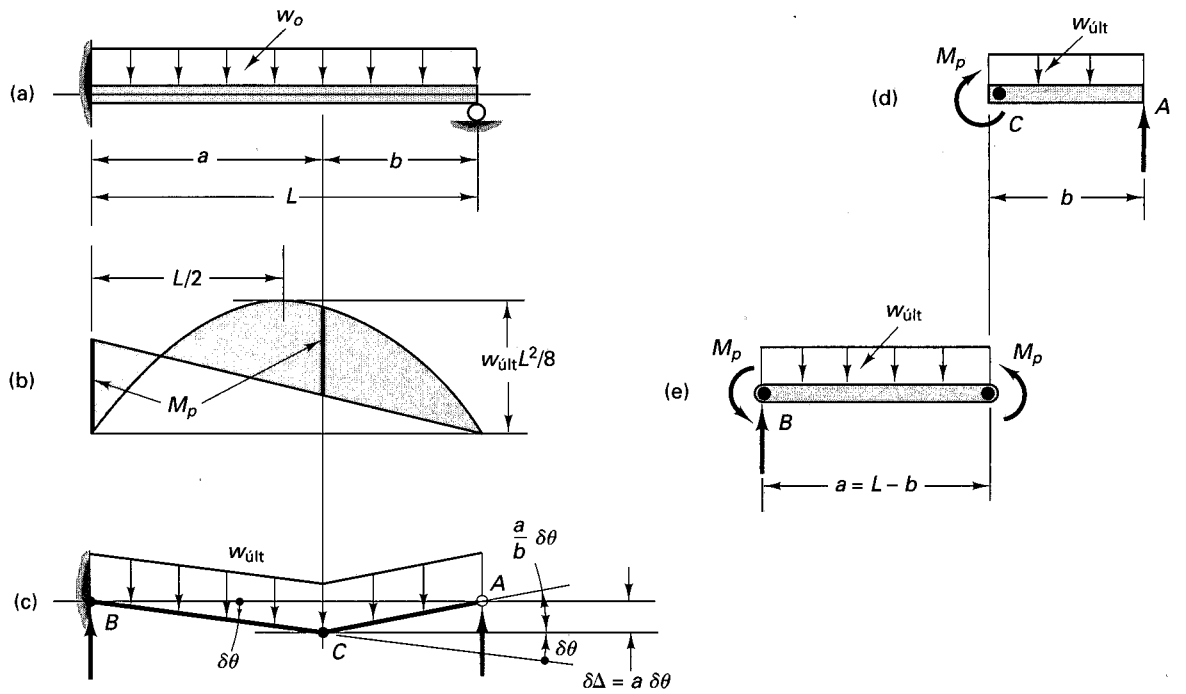


Fig. 20-7

SOLUCIÓN

(a) En este problema se requieren dos articulaciones plásticas para crear un mecanismo de colapso. Una de esas articulaciones está en el extremo empotrado. No se conoce la localización de la articulación asociada con el momento máximo positivo, ya que el momento varía gradualmente y no se tiene un pico distintivo. Sin embargo, se puede suponer un mecanismo admisible, como el mostrado en la figura 20-7(c), que es compatible con el diagrama de momento de la figura 20-7(b).

Para fines de análisis, la viga con las articulaciones plásticas supuestas se separa en dos partes, como se muestra en las figuras 20-7(d) y (e). Luego, notando que ninguna fuerza cortante es posible en C, ya que es el punto de momento máximo para una función continua, se pueden escribir dos ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum M_A = 0 \curvearrowright + \qquad M_p - w_{últ}b^2/2 = 0$$

$$\sum M_B = 0 \curvearrowleft + \qquad 2M_p - w_{últ}(\mathrm{L} - \mathrm{b})^2/2 = 0$$

La solución simultánea de esas ecuaciones localiza la articulación plástica C en $b = (\sqrt{2} - 1)L$. Cualquiera de esas ecuaciones da la carga límite

$$w_{últ} = \frac{2M_p}{b^2} = \frac{2M_p}{[(\sqrt{2} - 1)L]^2}$$

(b) En *promedio*, la carga límite plástica uniformemente distribuida $w_{\text{últ}}$ sufre un desplazamiento virtual de $\delta\Delta/2$, figura 20-7(c). Por consiguiente, para uso en la ecuación 17-19,

$$\delta W_e = w_{\text{últ}} L \frac{\delta\Delta}{2} = w_{\text{últ}} L \frac{a\,\delta\theta}{2}$$

El trabajo virtual interno es hecho por los momentos plásticos M_p en las articulaciones plásticas B y C al efectuar sus respectivas rotaciones, figura 20-7(c). Por consiguiente,

$$\delta W_{ie} = M_p \delta\theta + M_p \left(1 + \frac{a}{b}\right) \delta\theta$$

Igualando las dos relaciones previas y despejando $w_{\text{últ}}$ y después de algunas simplificaciones,

$$w_{\text{últ}} = \frac{2M_p}{L} \left(\frac{2L - a}{La - a^2}\right)$$

La distancia desconocida a puede encontrarse derivando $w_{\text{últ}}$ con respecto a a y haciendo el resultado igual a cero. Entonces,

$$\frac{dw_{\text{últ}}}{da} = 0$$

Después de derivar y simplificar,

$$-a^2 + 4aL - 2L^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática y reteniendo la raíz que cae dentro del claro,

$$a = (2 - \sqrt{2})L \qquad \text{y} \qquad b = L - a = (\sqrt{2} - 1)L$$

igual que antes. Por consiguiente, la $w_{\text{últ}}$ encontrada antes se aplica también a esta solución.

Las soluciones por trabajo virtual para cargas distribuidas, como las mostradas antes, son algo complejas para las aplicaciones rutinarias. Sin embargo, son posibles dos procedimientos alternativos. En uno de ellos, la carga distribuida puede ser aproximada por una serie de fuerzas concentradas, donde las localizaciones de las posibles articulaciones plásticas son identificadas más fácilmente. Alternativamente, puede ser estimada la localización de una articulación plástica, lo que conduce a una solución simple. La exactitud de tal solución puede evaluarse calculando los límites superior e inferior, como se ilustra en el ejemplo 12-3.

Ejemplo 20-5

Resuelva el problema anterior suponiendo que se forma una articulación plástica en el centro del claro para un momento positivo; véase la figura 20-8. Determine los límites de esta solución aproximada.

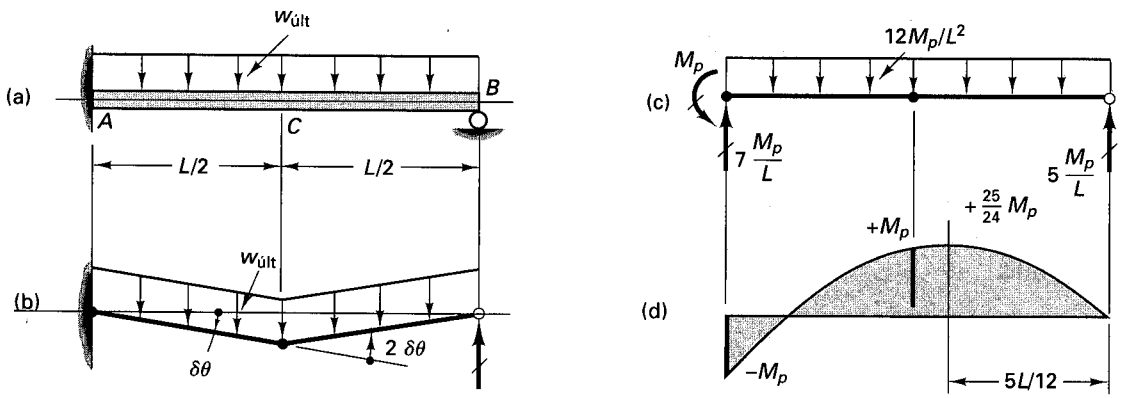


Fig. 20-8

SOLUCIÓN

Aplicando la ecuación 17-19 (es decir, igualando el trabajo virtual externo con el interno),

$$w_{últ}L\left(\frac{L\,\delta\theta}{2}\,\frac{1}{2}\right) = M_p(\delta\theta + 2\,\delta\theta)$$

donde $L\,\delta\theta/2$ es la deflexión máxima en C y el factor de $\frac{1}{2}$ reduce ésta a una deflexión promedio para la carga distribuida. La solución de la última ecuación da un límite superior para la carga plástica límite $w_{últ}$ para el mecanismo supuesto,

$$w_{últ} = 12M_p/L^2$$

Suponiendo la articulación plástica en C bloqueada y aplicando la carga anterior a la viga, figura 20-8(c), el diagrama de momento resultante es el que muestra la figura 20-8(d). Como en este diagrama el momento flexionante positivo máximo excede a M_p, la carga aplicada en la figura 20-8(c) debe reducirse por un factor de 24/25 para obtener la solución de límite inferior. Por tanto, la solución de límite inferior para la carga plástica límite es $(24/25)12M_p/L^2 = 11.52M_p/L^2$.

Resumiendo, los límites para esta solución son

$$11.52\,\frac{M_p}{L^2} < w_{últ} < 12\,\frac{M_p}{L^2}$$

Colocando la articulación plástica en el punto de momento positivo máximo en la figura 20-8(d) y repitiendo los cálculos, casi se encuentra la carga plástica límite exacta.

Ejemplo 20-6

Una viga prismática uniformemente cargada está empotrada en ambos extremos, como se muestra en la figura 20-9(a). (a) Determine la carga plástica límite usando el método del equilibrio y compare los resultados con el análisis elástico. (b) Verifique la carga plástica límite usando el método del trabajo virtual.

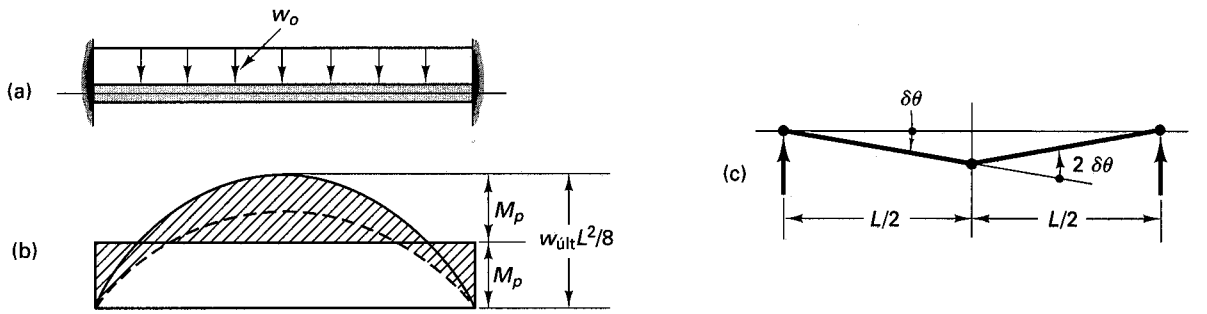


Fig. 20-9

SOLUCIÓN

De acuerdo con el análisis en el ejemplo 15-8, figura 15-11(c), los momentos flexionantes máximos ocurren en los empotramientos y son iguales a $w_o L^2/12$. El momento máximo positivo se desarrolla en el centro del claro y es $w_o L^2/24$. Por tanto, en la fluencia, con base en el momento máximo,

$$M_{yp} = w_{yp}L^2/12 \qquad \text{o} \qquad w_{yp} = 12M_{yp}/L^2$$

Incrementando la carga, se desarrollan articulaciones plásticas en los soportes. Sin embargo, el mecanismo de colapso no se forma hasta que una articulación plástica se desarrolla también en el centro del claro, figura 20-9(c).

El momento máximo para una viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida es $w_o L^2/8$. Por tanto, como puede verse en la figura 20-9(b), para obtener la carga límite en una viga doblemente empotrada, esta cantidad debe igualarse a $2M_p$, con $w_o = w_{últ}$. Por consiguiente,

$$w_{últ}L^2/8 = 2M_p \qquad \text{o} \qquad w_{últ} = 16M_p/L^2$$

Comparando este resultado con w_{yp}, se tiene

$$w_{últ} = \frac{4M_p}{3M_{yp}} w_{yp} = \frac{4}{3} k w_{yp}$$

Igual que en el ejemplo 20-2, el incremento de $w_{últ}$ sobre w_{yp} depende del factor de forma k y de la *igualización* de los momentos máximos.

(b) Debido a la simetría, la posición precisa de las articulaciones plásticas es como se muestra en la figura 20-9(c). Escribiendo una ecuación de trabajo virtual, ecuación 17-19, se tiene

$$w_{\text{últ}} L\left(\frac{L\,\delta\theta}{2}\,\frac{1}{2}\right) = M_p(\delta\theta + 2\,\delta\theta + \delta\theta)$$

y $w_{\text{últ}} = 16M_p/L^2$ como antes.

20-3. Vigas y marcos continuos

Los procedimientos analizados en la sección precedente e ilustrados con ejemplos, pueden extenderse a los casos más simples del análisis plástico al límite de vigas continuas y marcos. Usualmente, los mecanismos cinemáticos en vigas continuas asociados con un modo de colapso ocurren localmente sólo en una viga. Para la viga continua de dos claros de la figura 20-10(a), el momento plástico en el soporte intermedio está limitado al $(M_p)_{\text{mín}}$ de la viga más pequeña. Entonces, que el mecanismo cinemático se desarrolle en el claro izquierdo o en el derecho, dependerá de los tamaños relativos de las vigas, así como de las magnitudes de las cargas aplicadas. La solución en cualquier caso sigue el procedimiento analizado en los ejemplos 20-2, 20-3 y 20-4.

Las vigas, restringidas en ambos extremos, desarrollan usualmente los mecanismos cinemáticos que se muestran en la figura 20-10(d) para los dos claros izquierdos en la figura 20-10(c). La solución de tales problemas se parece a la del ejemplo 20-6 excepto en que los momentos extremos de cada claro no son necesariamente iguales. Por ejemplo, para el claro izquierdo de la figura 20-10(c), el momento plástico a la izquierda es determinado por la viga mayor, mientras que el de la derecha depende del momento plástico de la viga del claro central.

El análisis plástico al límite de marcos puede volverse bastante complejo cuando aumentan el número de miembros, nodos y diferentes condiciones de carga. Para el análisis de tales problemas se refiere al lector a los textos antes citados. Se presenta a continuación un ejemplo razonablemente simple del análisis de un marco por estado plástico límite.

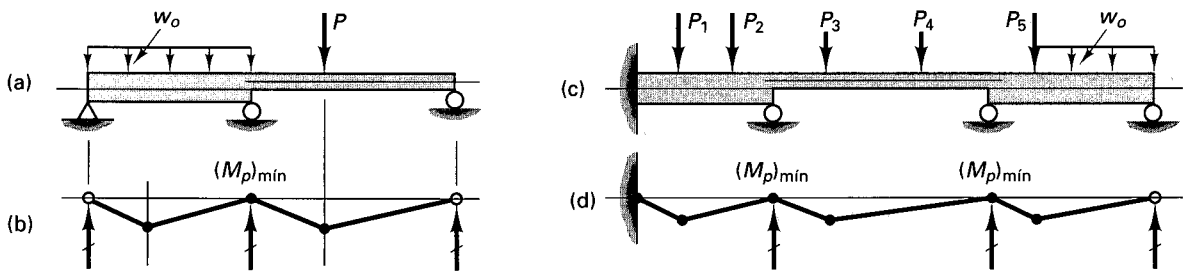


Fig. 20-10 Mecanismos de colapso para vigas continuas.

Ejemplo 20-7

Considere un marco plano con nodos rígidos de material dúctil empotrado en A y articulado en E, y cargado como se muestra en la figura 20-11(a). Todos los miembros tienen el mismo tamaño y pueden desarrollar plenamente el momento M_p (es decir, el efecto de las fuerzas axiales sobre M_p puede ser ignorado). Determine las cargas plásticas límite.

SOLUCIÓN

La solución a este problema se obtiene al suponer diferentes mecanismos cinemáticos admisibles y buscar el que satisfaga el equilibrio y la capacidad plástica del miembro.

Una solución por trabajo virtual para un mecanismo supuesto, proporciona un límite superior para las cargas plásticas límite. Con esas cargas, se efectúa un análisis estático sobre miembros o partes del marco separado en las articulaciones plásticas. Como el momento en cada articulación plástica es M_p, puede elaborarse un diagrama completo de momento para el

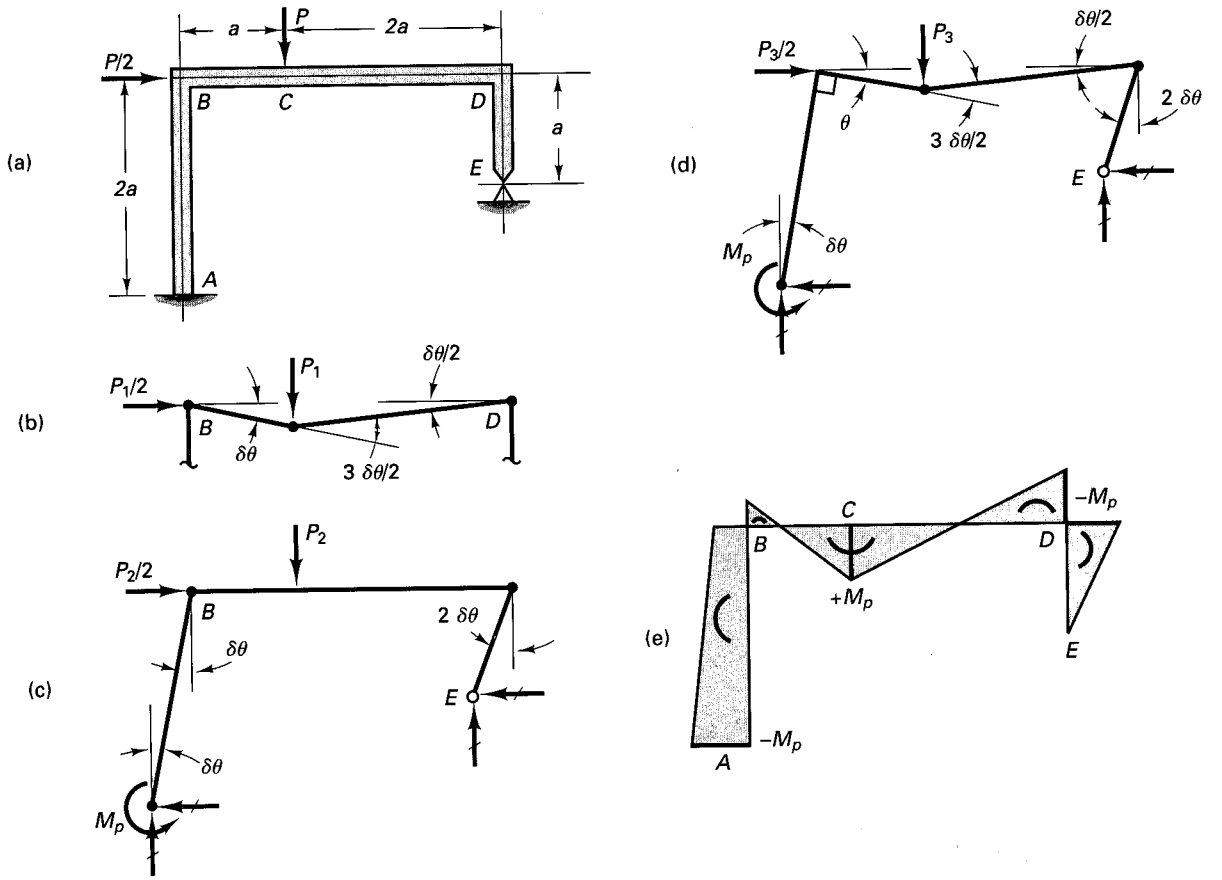


Fig. 20-11

marco. La solución de límite inferior se obtiene reduciendo las cargas del límite superior por un factor tal que en ninguna parte se exceda M_p.

La ecuación del trabajo virtual para el mecanismo cinemático admisible (de viga) en la figura 20-11(b) es

$$P_1 a\,\delta\theta = M_p(\delta\theta + \delta\theta/2) \qquad \text{y} \qquad P_1 = 3M_p/2a$$

Aplicando P_1 y $P_2/2$ al marco y separando éste en los nodos B y D, donde los momentos son M_p, se encuentra el diagrama de momento (no mostrado). Esta solución, como se muestra en la figura 7-22(b), da los siguientes momentos en los puntos críticos A, B, C y D:

$$M_A = -2M_p \qquad M_B = -M_p \qquad M_C = M_p \qquad \text{y} \qquad M_D = -M_p$$

Como M_A es igual a $2M_p$, la solución de límite superior encontrada antes debe reducirse por un factor de 2 para obtener la solución de límite inferior. Según esto, para el mecanismo supuesto, los límites para la solución son

$$\frac{3M_p}{2a} < P_1 < \frac{3M_p}{a}$$

Procediendo de la misma manera y usando el mecanismo (ladeo) mostrado en la figura 20-11(c),

$$\frac{P_2}{2} 2a\,\delta\theta = M_p(\delta\theta + \delta\theta + 2\,\delta\theta) \qquad \text{y} \qquad P_2 = \frac{4M_p}{a}$$

Para esta solución de límite superior, los momentos en los puntos críticos son

$$M_A = -M_p \qquad M_B = M_p \qquad M_C = 3M_p \qquad \text{y} \qquad M_D = -M_p$$

Como M_C es igual a $3M_p$, la solución de límite superior para el mecanismo supuesto debe reducirse por un factor de 3 para obtener la solución de límite inferior. Por consiguiente, para este caso,

$$\frac{4M_p}{3a} < P_2 < \frac{4M_p}{a}$$

Esta solución no es mejor que la primera. Sin embargo, es posible *combinar* los dos mecanismos previos de modo que se elimine la articulación plástica en B, lo que conduce a mejores resultados. Con una combinación apropiada de esos mecanismos, el trabajo plástico interno en las articulaciones puede reducirse. Tal mecanismo se muestra en la figura 20-11(d). La ecuación del trabajo virtual para este caso es

$$\frac{P_3}{2} 2a\,\delta\theta + P_3 a\,\delta\theta = M_p\left(\delta\theta + \frac{3\,\delta\theta}{2} + \frac{\delta\theta}{2} + 2\,\delta\theta\right) \quad \text{y} \quad P_3 = \frac{5M_p}{2a}$$

El diagrama de momento correspondiente a P_3 se muestra en la figura 20-11(e), donde $M_A = -M_p$, $M_C = M_p$, y $M_D = -M_p$.

La última solución satisface las tres condiciones básicas del análisis plástico al límite, que son mecanismo admisible, equilibrio y momento máximo en cualquier punto igual a M_p. Por tanto, ésta es una solución exacta.

PROBLEMAS

Sección 20-2

20-1. Resuelva el ejemplo 20-3 retirando la fuerza concentrada P en C.

20-2. Una viga prismática dúctil está simplemente apoyada en un extremo y empotrada en el otro, como se muestra en la figura. (a) Determine la posición x donde la mínima fuerza concentrada P ocasionará un mecanismo de colapso. (b) Encuentre los momentos últimos para la posición crítica de la fuerza aplicada P.

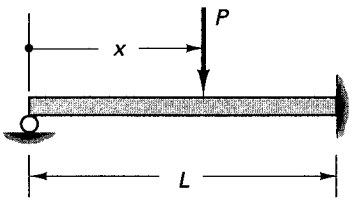


Fig. P20-2

20-3. Una viga prismática dúctil está empotrada en sus dos extremos. Para una fuerza concentrada P situada en un punto en un tercio del claro, como se muestra en la figura, determine la carga límite plástica $P_{\text{últ}}$. Demuestre que el resultado satisface los criterios de límite superior e inferior.

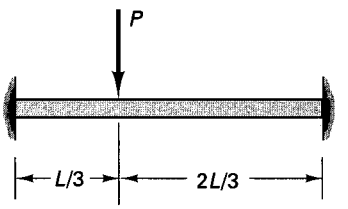


Fig. P20-3

20-4. Una viga T empotrada en ambos extremos está cargada con una carga uniformemente distribuida w que incluye el propio peso de la viga. (a) ¿Qué carga w_1 puede soportar esta viga cuando el esfuerzo en el centro del claro alcanza el esfuerzo de fluencia y se forman articulaciones plásticas en los empotramientos? La resistencia a la fluencia del material es de 50 ksi. (b) ¿Cuál es la deflexión en el centro del claro debida a w_1? Sea $E = 30 \times 10^3$ ksi. (c) ¿Cuál es la carga límite plástica $w_{\text{últ}}$?

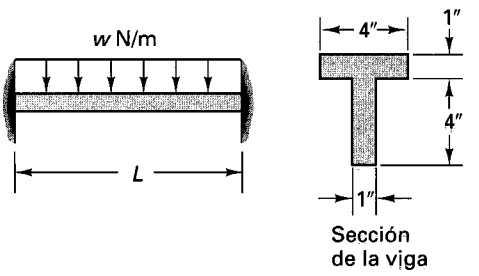


Fig. P20-4

20-5. Una viga prismática de material dúctil, empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro, soporta una carga distribuida triangularmente, como se muestra en la figura. Determine la carga límite plástica $W_{\text{últ}}$ usando el método de la fuerza virtual y suponiendo que una de las articulaciones plásticas se forma en el centro del claro. Verifique el resultado aplicando el método del equilibrio.

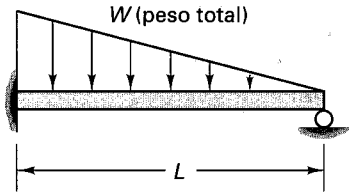


Fig. P20-5

20-6. Una viga prismática de material dúctil está parcialmente cargada, como se muestra en la figura. (a) Determine las soluciones de límite superior e inferior suponiendo una articulación plástica en el centro del claro. Sea $M_p = 1000$ in-lb. (b) Refine la solución colocando la articulación plástica en el punto de momento máximo posible encontrado para la solución de límite inferior en la parte (a).

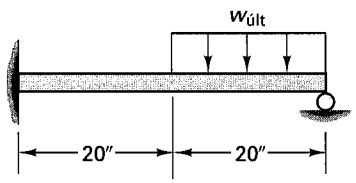
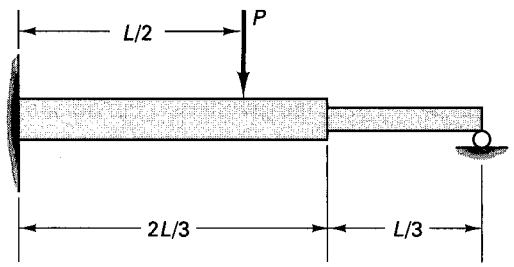


Fig. P20-6

20-7 y 20-8. Vigas de secciones transversales variables y material dúctil están cargadas como se muestra en las figuras. La capacidad por flexión plástica de las mayores porciones izquierdas de las vigas es $2M_p$ y la de las derechas es M_p. Determine las cargas límite plásticas para los dos casos.



Figs. P20-7

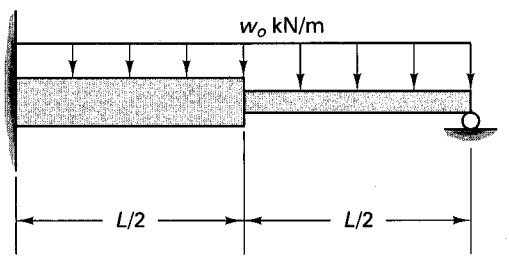


Fig. P20-8

20-9 y 20-10. Resuelva los dos problemas anteriores suponiendo que las vigas están doblemente empotradas.

Sección 20-3

20-11. Usando el análisis al límite, calcule el valor de P que ocasiona el colapso por flexión de la viga de dos claros que se muestra. La viga tiene una sección transversal rectangular de 120 mm de ancho por 300 mm de peralte. El esfuerzo de fluencia es de 15 MPa. Ignore el peso de la viga.

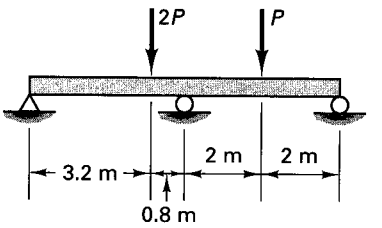


Fig. P20-11

20-12. Usando el análisis al límite, seleccione un perfil W de acero para la condición de carga mostrada en la figura. Sean $\sigma_{yp} = 40$ ksi, el factor de forma = 1.10 y el factor de carga = 2. El tamaño de la viga es constante en toda su longitud.

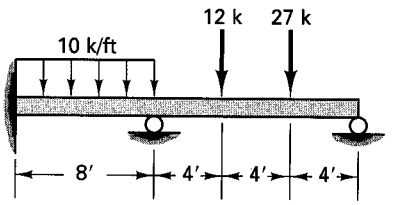


Fig. P20-12

20-13. Determine el momento plástico último para la carga factorizada gobernante para la viga continua prismática de material dúctil mostrada en la figura.

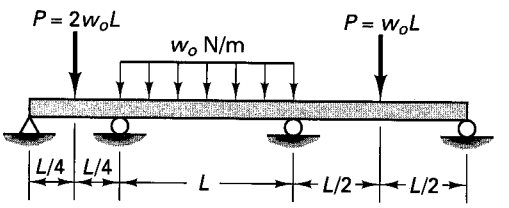


Fig. P20-13

20-14. Para la estructura que se muestra en la figura, suponga que en el colapso se forman articulaciones plásticas en A, B y C. Con base en esto, establezca los límites superior e inferior para la carga última $w_{\text{últ}}$. El momento plástico para la viga AC es de 150 y para la columna DE es de 50. Suponga que todas las cantidades están dadas en un sistema consistente de unidades.

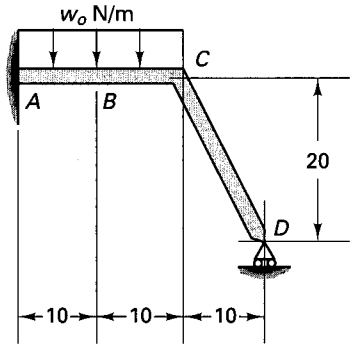


Fig. P20-14

20-15. Resuelva el ejemplo 20-7 suponiendo que la fuerza horizontal en B es P y la columna DE está empotrada en E. La fuerza vertical P permanece en C.

20-16. Un marco articulado en A y F soporta tres cargas concentradas de magnitud P cada una como se muestra en la figura. Si M_p es el mismo para todos los miembros, obtenga el valor P de colapso aplicando los teoremas del límite superior e inferior.

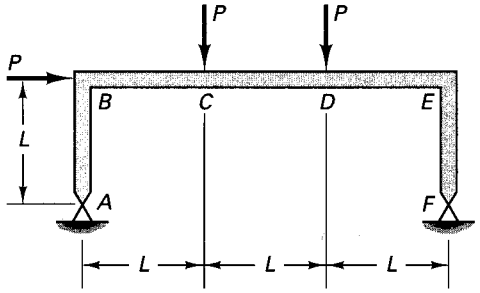


Fig. P20-16

Apéndice

Tablas

1A. Propiedades físicas típicas de, y esfuerzos permisibles para, algunos materiales comunes (en el sistema de unidades comunes en los Estados Unidos)

1B. Propiedades físicas típicas de, y esfuerzos permisibles para, algunos materiales comunes [en el sistema internacional de unidades (SI)]

2. Propiedades útiles de áreas

3. Vigas de acero estándar americanas, perfiles S, propiedades para diseño

4A. Vigas de acero americanas de patín ancho, perfiles W, propiedades para diseño (en el sistema inglés)

4B. Vigas de acero americanas de patín ancho, perfiles W, propiedades para diseño [en el sistema internacional de unidades (SI)]

5. Canales americanos de acero estándar, propiedades para diseño [en los sistemas inglés y en el (SI)]

6A. Ángulos de acero con lados iguales y desiguales, propiedades para diseño (en el sistema inglés)

6B. Ángulos de acero con lados iguales y desiguales, propiedades para diseño [en el sistema internacional de unidades (SI)]

7. Tubos estándar de acero [en el sistema inglés y en el (SI)]

8. Módulos plásticos de sección seleccionados, respecto a los ejes *X-X* y *Y-Y*

9. Tamaños de madera estándar americanos, propiedades para diseño

10. Deflexiones y pendientes de curvas elásticas para vigas con cargas diversas

11. Acciones de empotramiento para vigas prismáticas

Reconocimiento: Los datos de las tablas 3 a la 9 fueron tomados del *Manual del AISC para construcción en acero* y están reproducidos con autorización del American Institute of Steel Construction, Inc. Las tablas fueron compiladas para su uso con este texto. Las fuentes originales deben consultarse para un diseño real.

TABLA 1A. PROPIEDADES FÍSICAS TÍPICAS DE, Y ESFUERZOS PERMISIBLES PARA, ALGUNOS MATERIALES COMUNES[a] (EN EL SISTEMA INGLÉS)

Material		*Peso unitario, lb/in³*	*Resistencia última, ksi*			*Resistencia a la fluencia,[g] ksi*		*Esfuerzos permisibles,[i] psi*		*Módulos elásticos × 10⁶ psi*		*Coeficiente de expansión térmica × 10⁻⁶ por °F*
			Tensión	*Compresión[c]*	*Esfuerzo cortante*	*Tensión[h]*	*Esfuerzo cortante*	*Tensión o compresión*	*Esfuerzo cortante*	*Tensión o compresión*	*Esfuerzo cortante*	
Aleación de aluminio (extruida)	2024-T4	0.100	60	—	32	44	25			10.6	4.00	12.9
	6061-T6		38	—	24	35	20			10.0	3.75	13.0
Hierro fundido	Gris	0.276	30	120	—[e]	—	—			13	6	5.8
	Maleable		54	—	48	36	24			25	12	6.7
Concreto[b]	8 gal/saco	0.087	—	3	—[e]	—	—	−1,350[f]	66	3	—	6.0
	6 gal/saco		—	5	—	—	—	−2,250[f]	86	5	—	
Aleación de magnesio, AM100A		0.065	40	—	21	22	—			6.5	2.4	14.0
Acero	0.2% de carbono (rolado en caliente)	0.283	65	—	48	36	24	±24,000	14,500	30[k]	12	6.5
	0.6% de carbono (rolado en caliente)		100	—	80	60	36					
	0.6% de carbono (templado)		120	—	100	75	45					
	$3\frac{1}{2}$% Ni, 0.4% C		200	—	150	150	90					
Madera	Pino Douglas (de la costa)	0.018	—	7.4[d]	1.1[f]	—	—	±1,900[j]	120[f]	1.76	—	—
	Pino del sur (hoja larga)	0.021	—	8.4[d]	1.5[f]	—	—	±2,250[j]	135[f]	1.76	—	—

[a]Las propiedades mecánicas de los metales dependen no sólo de la composición sino también del tratamiento térmico, trabajado en frío previo, etc. Los datos para madera son para probetas de 2 × 2 in neto con un contenido de humedad del 12%. Los valores verdaderos varían.

[b]8 gal/saco significa 8 galones de agua por saco de 94 lb de cemento Portland. Los valores son para concreto de 28 días de edad.

[c]Sólo para bloques cortos. Para materiales dúctiles, la resistencia última en compresión es indefinida; puede suponerse igual que en tensión.

[d]Compresión paralela al grano en bloques cortos. Compresión perpendicular al grano en el límite proporcional: 950 psi y 1190 psi, respectivamente. Valores del *Wood Handbook* del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos.

[e]Falla en tensión diagonal.

[f]Paralelo al grano.

[g]Para la mayor parte de los materiales, al 0.2% de deformación unitaria.

[h]Para materiales dúctiles, la resistencia de fluencia en compresión puede suponerse igual.

[i]Sólo para cargas estáticas. Esfuerzos mucho menores se requieren en el diseño de máquinas debido a la fatiga y a las cargas dinámicas.

[j]Sólo en flexión. No se permiten esfuerzos de tensión en el concreto. Los esfuerzos en la madera son para grados selectos o densos.

[k]El AISC recomienda el valor de 29×10^6 psi.

TABLA 1B. PROPIEDADES FÍSICAS TÍPICAS DE, Y ESFUERZOS PERMISIBLES PARA, ALGUNOS MATERIALES COMUNES[a] (EN EL SISTEMA DE UNIDADES SI)

TABLA 1B. PROPIEDADES FÍSICAS TÍPICAS DE, Y ESFUERZOS PERMISIBLES PARA, ALGUNOS MATERIALES COMUNES[a] (EN EL SISTEMA DE UNIDADES SI)

Material		*Masa unitaria* $\times 10^3$ *kg/m*^{3}	*Resistencia última, MPa*			*Resistencia a la fluencia,*[g] *MPa*		*Esfuerzos permisibles,*[i] *MPa*		*Módulos elásticos, GPa*		*Coeficiente de expansión térmica* $\times 10^{-6}$ *por °C*
			Tensión	*Compresión*[c]	*Esfuerzo cortante*	*Tensión*[h]	*Esfuerzo cortante*	*Tensión o compresión*	*Esfuerzo cortante*	*Tensión o compresión*	*Esfuerzo cortante*	
Aleación de aluminio (extruida)	2024-T4	2.77	414	—	220	300	170			73	27.6	23.2
	6061-T6		262	—	165	241	138			70	25.9	23.4
Hierro fundido	Gris	7.64	210	825	—[e]	—	—			90	41	10.4
	Maleable		370	—	330	250	165			170	83	12.1
Concreto[b]	Relación agua-cemento = 0.70	2.41	—	20	—[e]	—	—	−9.31[j]	0.455	20	—	10.8
	Relación agua-cemento = 0.53		—	35	—	—	—	−15.5[j]	0.592	35	—	
Aleación de magnesio, AM100A		1.80	275	—	145	150	—			45	17	25.2
Acero	0.2% de carbono (rolado en caliente)	7.83	450	—	330	250	165	±165	100	200	83	11.7
	0.6% de carbono (rolado en caliente)		690	—	550	415	250					
	0.6% de carbono (templado)		825	—	690	515	310					
	$3\frac{1}{2}$% Ni, 0.4% C		1380	—	1035	1035	620					
Madera	Pino Douglas (de la costa)	0.50	—	51[d]	7[f]	—	—	±13.1[k]	0.825[f]	12.1	—	—
	Pino del sur (hoja larga)	0.58	—	58[d]	10[f]	—	—	±15.5[k]	0.930[f]	12.1	—	—

[a]Las propiedades mecánicas de los metales dependen no sólo de la composición sino también del tratamiento térmico, trabajado en frío previo, etc. Los datos para madera son para probetas de 50 × 50 mm con un contenido de humedad del 12%. Los valores verdaderos varían. Donde no se encontraron valores SI aún disponibles, se hizo una conversión de valores aceptados actualmente en la industria para construir esta tabla.

[b]Relación agua-cemento por peso para concreto con 75 a 100 mm de revenimiento. Los valores son para concreto de 28 días de edad.

[c]Sólo para bloques cortos. Para materiales dúctiles, la resistencia última en compresión es indefinida; puede suponerse igual que en tensión.

[d]Compresión paralela al grano en bloques cortos. Compresión perpendicular al grano en el límite proporcional: 6.56 MPa y 8.20 MPa, respectivamente. Valores convertidos del *Wood Handbook* del Departamento de Agricultura de los Estados Unidos.

[e]Falla en tensión diagonal.

[f]Paralelo al grano.

[g]Para la mayor parte de los materiales, al 0.2% de deformación unitaria.

[h]Para materiales dúctiles, la resistencia de fluencia en compresión puede suponerse igual.

[i]Sólo para cargas estáticas. Esfuerzos mucho menores se requieren en el diseño de máquinas debido a la fatiga y a las cargas dinámicas.

[j]No se permiten esfuerzos de tensión en el concreto.

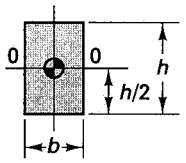
[k]Sólo en flexión. Los esfuerzos de madera son para grados selectos o densos.

Nota: Los datos en todas las tablas sombreadas son para el sistema de unidades SI.

TABLA 2. PROPIEDADES ÚTILES DE ÁREAS

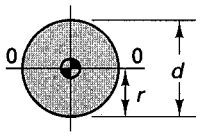
Áreas y momentos de inercia de áreas respecto a ejes centroidales

RECTÁNGULO



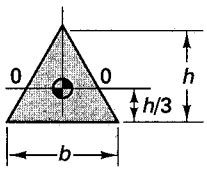
$A = bh$
$I_o = bh^3/12$

CÍRCULO



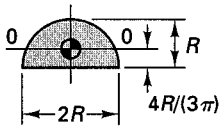
$A = \pi R^2$
$I_o = I_p/2 = \pi R^4/4$

TRIÁNGULO



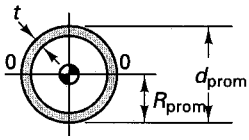
$A = bh/2$
$I_o = bh^3/36$

SEMICÍRCULO



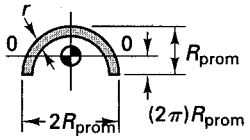
$A = \pi R^2/2$
$I_o = 0.110R^4$

TUBO DELGADO



$A = 2\pi R_{prom} t$
$I_o = I_p/2 \approx \pi R_{prom} t$

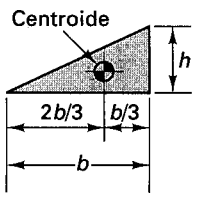
MEDIO TUBO DELGADO



$A = \pi R_{prom} t$
$I_o \approx 0.095\pi R_{prom}^3 t$

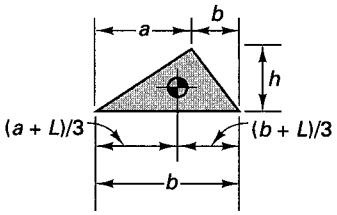
Áreas y centroides de áreas

TRIÁNGULO



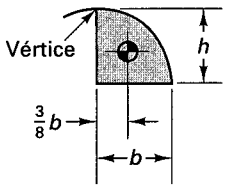
$A = bh/2$

TRIÁNGULO



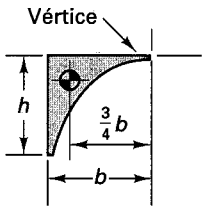
$A = hL/2$

PARÁBOLA



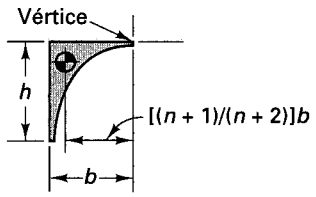
$A = \frac{2}{3}bh$

PARÁBOLA: $y = -ax^2$



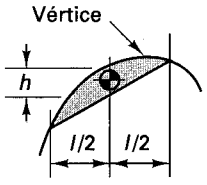
$A = bh/3$

$y = -ax^n$



$A = bh/(n + 1)$

PARÁBOLA



El área de cualquier segmento de una parábola es $A = \frac{2}{3}hl$

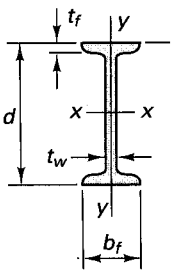


TABLA 3. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE PERFILES DE ACERO ESTÁNDAR AMERICANOS. UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS Y DEL SI (LISTA ABREVIADA)

				Patín		*Eje X–X*		*Eje Y–Y*	
*Designación**	*Área* A	*Peralte* d	*Espesor del alma* t_w	*Ancho* b_f	*Espesor* t_f	I_x	r_x	I_y	r_y
in × lb/ft	in^2	*in*	*in*	*in*	*in*	in^4	*in*	in^4	*in*
S 24 × 100	29.30	24.00	0.747	7.245	0.870	2 390	9.01	47.7	1.27
× 80	23.50	24.00	0.500	7.000	0.870	2 100	9.47	42.2	1.34
S 20 × 96	28.20	20.30	0.800	7.200	0.920	1 670	7.71	50.2	1.33
× 75	22.00	20.00	0.635	6.385	0.795	1 280	7.62	29.8	1.16
S 18 × 70	20.60	18.00	0.711	6.251	0.691	926	6.71	24.1	1.08
× 54.7	16.10	18.00	0.461	6.001	0.691	804	7.07	20.8	1.14
S 12 × 50	14.70	12.00	0.687	5.477	0.659	305	4.55	15.7	1.03
× 31.8	9.35	12.00	0.350	5.000	0.544	218	4.83	9.36	1.00
S 10 × 35	10.30	10.00	0.594	4.944	0.491	147	3.78	8.36	0.90
× 25.4	7.46	10.00	0.311	4.661	0.491	124	4.07	6.79	0.95
S 8 × 23	6.77	8.00	0.441	4.171	0.426	64.9	3.10	4.31	0.80
× 18.4	5.41	8.00	0.271	4.001	0.426	57.6	3.26	3.73	0.83
mm × kg/m	mm^2	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*
S 610 × 149	18 900	610	18.90	184.0	22.1	995	229	19.9	32.4
× 119	15 200	610	12.70	178.0	22.1	874	240	17.6	34.0
S 510 × 143	18 200	516	20.30	183.0	23.4	695	195	20.9	33.9
× 112	14 200	508	16.10	162.0	20.2	533	194	12.4	29.6
S 460 × 104	13 300	457	18.10	159.0	17.6	385	170	10.0	27.4
× 81.4	10 400	457	11.70	152.0	17.6	335	179	8.66	28.9
S 310 × 74	9 480	305	17.40	139.0	16.7	127	116	6.53	26.2
× 47	6 030	305	8.89	127.0	13.8	90.7	123	3.90	25.4
S 250 × 52	6 650	254	15.10	126.0	12.5	61.2	95.9	3.48	22.9
× 38	4 810	254	7.90	118.0	12.5	51.6	104	2.83	24.3
S 200 × 34	4 370	203	11.20	106.0	10.8	27.0	78.6	1.79	20.2
× 27	3 490	203	6.88	102.0	10.8	24.0	82.9	1.55	21.1

Las vigas I estándar americanas se refieren a perfiles S y se designan por la letra S seguida por el peralte en pulgadas o milímetros, indicándose al final el peso por pie lineal o la masa en kilogramos por metro. Por ejemplo, S 24 × 100 significa que este perfil S tiene 24 in de peralte y pesa 100 lb/ft. Alternativamente, el mismo perfil S 610 × 149 tiene 610 mm de peralte y una masa de 149 kg/m.

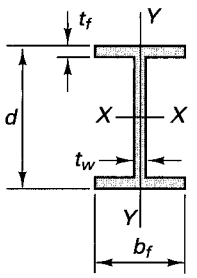


TABLA 4A. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE PERFILES W ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS EN UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS (LISTA ABREVIADA)

				Patín		*Eje X–X*		*Eje Y–Y*	
*Designación**	*Área* A	*Peralte* d	*Espesor del alma* t_w	*Ancho* b_f	*Espesor* t_f	I_x	r_x	I_y	r_y
in × lb/ft	in^2	*in*	*in*	*in*	*in*	in^4	*in*	in^4	*in*
W36 × 245	72.1	36.08	16.510	1.350	0.800	16100	15.0	1010	3.75
230	67.6	35.90	16.470	1.260	0.760	15000	14.9	940	3.73
150	44.2	35.85	11.975	0.940	0.625	9040	14.3	270	2.47
135	39.7	35.55	11.950	0.790	0.600	7800	14.0	225	2.38
W33 × 201	59.1	33.68	15.745	1.150	0.715	11500	14.0	749	3.56
130	38.3	33.09	11.510	0.855	0.580	6710	13.2	218	2.39
118	34.7	32.86	11.480	0.740	0.550	5900	13.0	187	2.32
W30 × 191	56.1	30.68	15.040	1.185	0.710	9170	12.8	673	3.46
173	50.8	30.44	14.985	1.065	0.655	8200	12.7	598	3.43
W27 × 161	47.4	27.59	14.020	1.080	0.660	6280	11.5	497	3.24
146	42.9	27.38	13.965	0.975	0.605	5630	11.4	443	3.21
94	27.7	26.92	9.990	0.745	0.490	3270	10.9	124	2.12
84	24.8	26.71	9.960	0.640	0.460	2850	10.7	106	2.07
W18 × 60	17.6	18.24	7.555	0.695	0.415	984	7.47	50.1	1.69
50	14.7	17.99	7.495	0.570	0.355	800	7.38	40.1	1.65
46	13.5	18.06	6.060	0.605	0.360	712	7.25	22.5	1.29
35	10.3	17.70	6.000	0.425	0.300	510	7.04	15.3	1.22
W16 × 26	7.68	15.69	5.500	0.345	0.250	301	6.26	9.59	1.12
W14 × 193	56.8	15.48	15.710	1.440	0.890	2400	6.50	931	4.05
159	46.7	14.98	15.565	1.190	0.745	1900	6.38	748	4.00
99	29.1	14.16	14.565	0.780	0.485	1110	6.17	402	3.71
90	26.5	14.02	14.520	0.710	0.440	999	6.14	362	3.70
W12 × 72	21.1	12.25	12.040	0.670	0.430	597	5.31	195	3.04
65	19.1	12.12	12.000	0.605	0.390	533	5.28	174	3.02
50	14.7	12.19	8.080	0.640	0.370	394	5.18	56.3	1.96
45	13.2	12.06	8.045	0.575	0.335	350	5.15	50.0	1.94
40	11.8	11.94	8.005	0.515	0.295	310	5.13	44.1	1.93
W10 × 112	32.9	11.36	10.415	1.250	0.755	716	4.66	236	2.68
60	17.6	10.22	10.080	0.680	0.420	341	4.39	116	2.57
49	14.4	9.98	10.000	0.560	0.340	272	4.35	93.4	2.54
45	13.3	10.10	8.020	0.620	0.350	248	4.33	53.4	2.01
39	11.5	9.92	7.985	0.530	0.315	209	4.27	45.0	1.98
33	9.71	9.73	7.960	0.435	0.290	170	4.19	36.6	1.94
W8 × 67	19.7	9.00	8.280	0.935	0.570	272	3.72	88.6	2.12
58	17.1	8.75	8.220	0.810	0.510	228	3.65	75.1	2.10
40	11.7	8.25	8.070	0.560	0.360	146	3.53	49.1	2.04
31	9.13	8.00	7.995	0.435	0.285	110	3.47	37.1	2.02
28	8.25	8.06	6.535	0.465	0.285	98.0	3.45	21.7	1.62
24	7.08	7.93	6.495	0.400	0.245	82.8	3.42	18.3	1.61
21	6.16	8.28	5.270	0.400	0.250	75.3	3.49	9.77	1.26
18	5.26	8.14	5.250	0.330	0.230	61.9	3.43	7.97	1.23

Los perfiles estándar americanos de patín ancho son designados por la letra W seguida por el peralte nominal en pulgadas, indicándose al final el peso en libras por pie lineal.

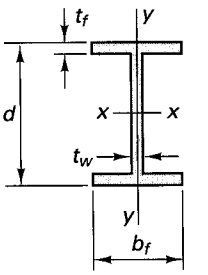


TABLA 4B. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE PERFILES W ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS EN UNIDADES DEL SI (LISTA ABREVIADA)

				Patín		*Eje X–X*		*Eje Y–Y*	
*Designación**	*Área* A	*Peralte* d	*Espesor del alma* t_w	*Ancho* b_f	*Espesor* t_f	I_x	r_x	I_y	r_y
mm × kg/m	mm^2	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*
W920 × 365	46500	916	419	34.3	20.3	6710	380	421	95.2
342	43600	912	418	32.0	19.3	6250	379	390	94.6
223	28500	911	304	23.9	15.9	3770	364	112	62.7
201	25600	903	304	20.1	15.2	3250	356	94.4	60.7
W840 × 299	38100	855	400	29.2	18.2	4790	355	312	90.5
193	24700	840	292	21.7	14.7	2780	335	90.3	60.5
176	22400	835	292	18.8	14.0	2460	331	78.2	59.1
W760 × 284	36200	779	382	30.1	18.0	3810	324	280	87.9
257	32800	773	381	27.1	16.6	3420	323	250	87.3
W690 × 240	30600	701	356	27.4	16.8	2610	292	206	82.0
217	27700	695	355	24.8	15.4	2340	291	185	81.7
140	17800	684	254	18.9	12.4	1360	276	51.7	53.9
125	16000	678	253	16.3	11.7	1190	273	44.1	52.5
W460 × 89	11400	463	192	17.7	10.5	410	190	20.9	42.8
74	9460	457	190	14.5	9.02	333	188	16.6	41.9
68	8730	459	154	15.4	9.14	297	184	9.41	32.8
52	6640	450	152	10.8	7.62	212	179	6.34	30.9
W410 × 39	4960	399	140	8.80	6.35	126	159	4.02	28.5
W360 × 287	36600	393	399	36.6	22.6	997	165	388	103
237	30200	380	395	30.2	18.9	788	162	310	101
147	18800	360	370	19.8	12.3	463	157	167	94.2
134	17100	356	369	18.0	11.2	415	156	151	94.0
W310 × 107	13600	311	306	17.0	10.9	248	135	81.2	77.3
97	12300	308	305	15.4	9.91	222	134	72.9	77.0
74	9480	310	205	16.3	9.40	165	132	23.4	49.7
67	8530	306	204	14.6	8.51	145	130	20.7	49.3
60	7600	303	203	13.1	7.49	129	130	18.3	49.1
W250 × 167	21300	289	265	31.8	19.2	300	119	98.8	68.1
89	11400	260	256	17.3	10.7	143	112	48.4	65.2
73	9310	253	254	14.2	8.64	113	110	38.8	64.6
67	8560	257	204	15.7	8.89	104	110	22.2	50.9
58	7400	252	203	13.5	8.00	87.3	109	18.8	50.4
49	6260	247	202	11.0	7.37	70.6	106	15.1	49.1
W200 × 100	12700	229	210	23.7	14.5	113	94.3	36.6	53.7
86	11000	222	209	20.6	13.0	94.7	92.8	31.4	53.4
59	7580	210	205	14.2	9.14	61.2	89.9	20.4	51.9
46	5890	203	203	11.0	7.24	45.5	87.9	15.3	51.0
42	5320	205	166	11.8	7.24	40.9	87.7	9.01	41.2
36	4570	201	165	10.2	6.22	34.4	86.8	7.64	40.9
31	3980	210	134	10.2	6.35	31.3	88.7	4.10	32.1
27	3400	207	133	8.40	5.84	25.8	87.1	3.29	31.1

Nota: Los perfiles W estándar americanos de patín ancho son designados por la letra W seguida por el peralte nominal en milímetros, indicándose al final la masa en kilogramos por metro.

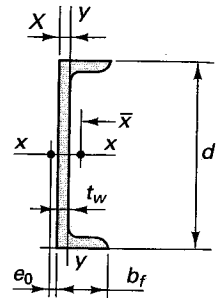


TABLA 5. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE CANALES ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS EN UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS Y DEL SI (LISTA ABREVIADA)

				Patín		*Eje X–X*		*Eje Y–Y*			
*Designación**	*Área* A	*Peralte* d	*Espesor del alma* t_w	*Ancho* b_f	*Espesor* t_f	I_x	r_x	I_y	r_y	$\bar{x}$	e_0
in × lb/ft	in^2	*in*	*in*	*in*	*in*	in^4	*in*	in^4	*in*		
C 15 × 50	14.70	15.00	0.716	3.716	0.650	404	5.24	11.0	0.867	0.799	0.583
× 33.9	9.96	15.00	0.400	3.400	0.650	315	5.62	8.13	0.904	0.787	0.896
C 12 × 30	8.82	12.00	0.510	3.170	0.501	162	4.29	5.14	0.763	0.674	0.618
× 20.7	6.09	12.00	0.282	2.942	0.501	129	4.61	3.88	0.799	0.698	0.870
C 10 × 30	8.82	10.00	0.673	3.033	0.436	103	3.42	3.94	0.669	0.649	0.369
× 15.3	4.49	10.00	0.240	2.600	0.436	67.4	3.87	2.28	0.713	0.634	0.796
C 8 × 18.75	5.51	8.00	0.487	2.527	0.390	44.0	2.82	1.98	0.599	0.565	0.431
× 11.5	3.38	8.00	0.220	2.260	0.390	32.6	3.11	1.32	0.625	0.571	0.697
mm×kg/m	mm^2	*mm*	*mm*	*mm*	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*	*mm*	*mm*
C 380 × 74	9 480	381	18.20	94.4	16.50	168	133	4.58	22.0	20.30	14.8
× 50	6 430	381	10.20	86.4	16.50	131	143	3.38	22.9	19.99	22.8
C 310 × 45	5 690	305	13.00	80.5	12.70	67.4	109	2.14	19.4	17.12	16.0
× 31	3 930	305	7.16	74.4	12.70	53.7	117	1.61	20.2	17.73	22.1
C 250 × 45	5 690	254	17.10	77.0	11.10	42.9	86.8	1.64	17.0	16.48	9.37
× 23	2 900	254	6.10	66.0	11.10	28.1	98.4	0.949	18.1	16.10	20.2
C 200 × 28	3 550	203	12.40	64.2	9.90	18.3	71.8	0.824	15.2	14.35	10.95
× 17	2 180	203	5.59	57.4	9.90	13.6	79.0	0.549	15.9	13.94	17.7

Nota: Los canales son designados por la letra C seguida por su peralte en pulgadas o en milímetros, indicándose al final el peso en libras por pie lineal o masa en kilogramos por metro. Por ejemplo, C 15 × 50 significa que el canal tiene 15 in de peralte y pesa 50 lb/ft. Alternativamente, el mismo perfil C 380 × 74 tiene 380 mm de peralte y una masa de 74 kg/m. En la tabla, $\bar{x}$ designa la distancia de la espalda de un canal al centroide de la sección y e_o localiza el centro de cortante.

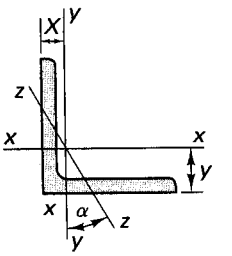


TABLA 6A. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE ÁNGULOS ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS DE LADOS IGUALES Y DESIGUALES EN UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS (LISTA ABREVIADA)

Tamaño y espesor	*Peso por pie*	*Área A*	*Eje X–X*			*Eje Y–Y*			*Eje Z–Z*	
			I_x	r_x	y	I_y	r_y	x	r_z	$\tan\alpha$
in	*lb/ft*	in^2	in^4	*in*	*in*	in^4	*in*	*in*	*in*	
L 8 × 8 × 1	51.0	15.00	89.0	2.44	2.37	89.0	2.44	2.37	1.56	1.000
× $\frac{1}{2}$	26.4	7.75	48.6	2.50	2.19	48.6	2.50	2.19	1.59	1.000
L 8 × 6 × 1	44.2	13.00	80.8	2.49	2.65	38.8	1.73	1.65	1.28	0.543
× $\frac{1}{2}$	23.0	6.75	44.3	2.56	2.47	21.7	1.79	1.47	1.30	0.558
L 6 × 6 × 1	37.4	11.00	35.5	1.80	1.86	35.5	1.80	1.86	1.17	1.000
× $\frac{1}{2}$	19.6	5.75	19.9	1.86	1.68	19.9	1.86	1.68	1.18	1.000
L 6 × 4 × $\frac{3}{4}$	23.6	6.94	24.5	1.88	2.08	8.68	1.12	1.08	0.860	0.428
× $\frac{1}{2}$	16.2	4.75	17.4	1.91	1.99	6.27	1.15	0.987	0.870	0.440
L 4 × 4 × $\frac{1}{2}$	12.8	3.75	5.56	1.22	1.18	5.56	1.22	1.18	0.782	1.000
× $\frac{3}{8}$	9.8	2.86	4.36	1.23	1.14	4.36	1.23	1.14	0.788	1.000
L 4 × 3 $\frac{1}{2}$ × $\frac{3}{8}$	9.1	2.67	4.18	1.25	1.21	2.95	1.06	0.955	0.727	0.755
× $\frac{5}{16}$	7.7	2.25	3.56	1.26	1.18	2.55	1.07	0.932	0.730	0.757
L 4 × 3 × $\frac{1}{2}$	11.1	3.25	5.05	1.89	1.25	2.42	0.827	0.864	0.639	0.543
× $\frac{1}{4}$	5.8	1.69	2.77	1.28	1.24	1.36	0.896	0.736	0.651	0.558
L 3 × 2 × $\frac{1}{2}$	7.7	2.25	1.92	0.924	1.08	0.672	0.546	0.583	0.428	0.414
× $\frac{5}{16}$	5.0	1.46	1.32	0.948	1.02	0.470	0.567	0.516	0.432	0.435
L 2 $\frac{1}{2}$ × 2 $\frac{1}{2}$ × $\frac{1}{2}$	7.7	2.25	1.23	0.739	0.806	1.23	0.739	0.806	0.487	1.000
× $\frac{5}{16}$	5.0	1.46	0.849	0.761	0.740	0.849	0.761	0.740	0.489	1.000

Nota: x y y localizan el centroide de una sección.

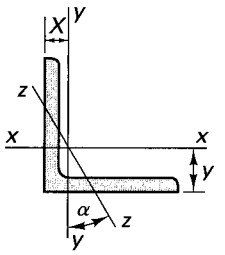


TABLA 6B. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE ÁNGULOS ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS DE LADOS IGUALES Y DESIGUALES EN UNIDADES DEL SI (LISTA ABREVIADA)

Tamaño y espesor	*Masa por metro*	*Área*	*Eje X–X*			*Eje Y–Y*			*Eje Z–Z*	
		A	I_x	r_x	y	I_y	r_y	x	r_z	$\tan \alpha$
mm	*kg/m*	mm^2	$10^6\ mm^4$	*mm*	*mm*	$10^6\ mm^4$	*mm*	*mm*	*mm*	
L 203 × 203 × 25.4	75.9	9 680	36.9	61.7	60.1	36.9	61.7	60.1	39.6	1.000
× 12.7	39.3	5 000	20.2	63.6	50.5	20.2	63.6	50.5	40.4	1.000
L 203 × 152 × 25.4	65.8	8 390	33.5	63.2	67.4	16.0	43.7	41.9	32.5	0.543
× 12.7	34.2	4 350	18.4	65.0	62.8	8.96	45.4	37.3	33.0	0.558
L 152 × 152 × 25.4	55.7	7 100	14.6	45.3	47.2	4.6	45.3	47.2	29.7	1.000
× 12.7	29.2	3 710	8.22	47.1	42.7	8.22	47.1	42.7	30.0	1.000
L 152 × 102 × 19.0	35.1	4 480	10.1	47.5	52.5	3.65	28.5	27.5	21.8	0.428
× 12.7	24.1	3 060	7.20	48.5	50.2	2.64	29.4	25.2	22.1	0.440
L 102 × 102 × 12.7	19.0	2 420	2.34	31.1	30.2	2.34	31.1	30.2	19.9	1.000
× 9.5	14.6	1 840	1.84	31.6	29.0	1.84	31.6	29.0	20.0	1.000
L 102 × 89 × 9.5	13.5	1 720	1.76	32.0	30.8	1.25	27.0	24.3	18.5	0.755
× 7.9	11.3	1 450	1.50	32.2	30.2	1.07	27.2	23.7	18.5	0.757
L 102 × 76 × 12.7	16.5	2 100	2.12	31.8	33.9	1.00	21.8	20.9	16.2	0.543
× 6.4	8.6	1 090	1.16	32.6	31.6	0.560	22.7	18.6	16.5	0.558
L 76 × 51 × 12.7	11.5	1 450	0.795	23.4	27.4	0.283	14.0	14.9	10.9	0.414
× 7.9	6.1	766	0.450	24.2	25.1	0.198	14.5	13.2	11.0	0.435
L 64 × 64 × 12.7	11.5	1 450	0.524	19.0	20.6	0.524	19.0	20.6	12.4	1.000
× 7.9	7.4	945	0.362	19.6	18.9	0.362	19.6	18.9	12.4	1.000

Nota: x y y localizan el centroide de una sección.

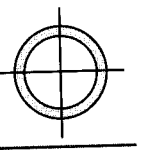


TABLA 7. DIMENSIONES Y PROPIEDADES DE TUBOS ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS EN UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS Y DEL SI (LISTA ABREVIADA)

Dimensiones					*Peso por pie*	*Propiedades*			
Diámetro nominal		*Diámetro exterior*	*Diámetro interior*	*Espesor de pared*		*A*	*I*	*S*	*r*
in	*mm*	*in*	*in*	*in*	*lb/ft*	*in²*	*in⁴*	*in³*	*in*
$\frac{1}{2}$	13	0.840	0.622	0.109	0.85	0.250	0.017	0.041	0.261
$\frac{3}{4}$	19	1.050	0.824	0.113	1.13	0.333	0.037	0.071	0.334
1	25	1.315	1.049	0.133	1.68	0.494	0.087	0.133	0.421
$1\frac{1}{4}$	32	1.660	1.380	0.140	2.27	0.669	0.195	0.235	0.540
$1\frac{1}{2}$	38	1.900	1.610	0.145	2.72	0.799	0.310	0.326	0.623
2	51	2.375	2.067	0.154	3.65	1.070	0.666	0.561	0.787
$2\frac{1}{2}$	64	2.875	2.469	0.203	5.79	1.700	1.530	1.060	0.947
3	75	3.500	3.068	0.216	7.58	2.230	3.020	1.720	1.160
$3\frac{1}{2}$	89	4.000	3.548	0.226	9.11	2.680	4.790	2.390	1.340
4	102	4.500	4.026	0.237	10.79	3.170	7.230	3.210	1.510
5	127	5.563	5.047	0.258	14.62	4.300	15.20	5.450	1.880
6	152	6.625	6.065	0.280	18.97	5.580	28.10	8.500	2.250
8	203	8.625	7.981	0.322	28.55	8.400	72.50	16.80	2.940
10	254	10.750	10.020	0.365	40.48	11.90	161.0	29.90	3.670
12	310	12.750	12.000	0.375	49.56	14.60	279.0	43.80	4.380
mm	*in*	*mm*	*mm*	*mm*	*kg/m*	*mm²*	*10⁶ mm⁴*	*10³ mm³*	*mm*
13	$\frac{1}{2}$	21.3	15.8	2.77	1.3	161	0.007	0.667	6.640
19	$\frac{3}{4}$	26.7	20.9	2.87	1.7	215	0.015	1.160	8.490
25	1	33.4	26.6	3.38	2.5	319	0.037	2.190	10.70
32	$1\frac{1}{4}$	42.2	35.1	3.56	3.4	431	0.081	3.820	13.70
38	$1\frac{1}{2}$	48.3	40.9	3.68	4.0	516	0.129	5.340	15.80
51	2	60.3	52.5	3.91	5.4	693	0.277	9.190	20.00
64	$2\frac{1}{2}$	73.0	62.7	5.16	8.6	1 100	0.637	17.50	24.10
75	3	88.9	77.9	5.49	11.3	1 440	1.260	28.30	29.60
89	$3\frac{1}{2}$	102.0	90.1	5.74	13.6	1 730	2.080	40.80	34.70
102	4	114.0	102.0	6.02	16.1	2 050	2.980	52.30	38.10
127	5	141.0	128.0	6.55	21.8	2 770	6.230	88.40	47.40
152	6	168.0	154.0	7.11	28.2	3 600	11.50	137.0	56.50
203	8	219.0	203.0	8.18	42.5	5 420	29.60	270.0	73.90
254	10	273.0	255.0	9.27	60.2	7 680	65.10	477.0	92.10
310	12	324.0	305.0	9.52	73.3	9 410	116.0	716.0	111.0

Nota: $S = I/(d_o/2)$.

TABLA 8. ALGUNOS MÓDULOS PLÁSTICOS RESPECTO A LOS EJES *X–X* Y *Y–Y* PARA PERFILES W ESTÁNDAR DE ACERO AMERICANOS EN UNIDADES DEL SISTEMA INGLÉS Y DEL SI (LISTA ABREVIADA)

Módulos plásticos			*Módulos plásticos*		
Designación	Z_x	Z_y	*Designación*	Z_x	Z_y
in × lb/ft	in^3	in^3	*mm × kg/m*	$10^3\ mm^3$	$10^3 mm^3$
W 36 × 150	581	70.9	W 920 × 223	9.540	1 160
W 27 × 94	278	38.8	W 690 × 140	4 550	636
W 18 × 60	123	20.6	W 460 × 89	2 010	339
W 12 × 65	96.8	44.1	W 310 × 97	1 590	725
W 10 × 33	38.8	14.0	W 250 × 49	633	228
W 8 × 34	23.2	8.57	W 200 × 36	380	141

TABLA 9. PROPIEDADES DE LA MADERA ESTRUCTURAL (LISTA ABREVIADA). PROPIEDADES DE UNAS SECCIONES TRANSVERSALES ESTÁNDAR AMERICANAS DE TAMAÑO CEPILLADO (S4S)*.

Tamaño nominal	*Tamaño cepillado estándar*	*Área de sección*	*Momento de inercia*	*Módulo de sección*	*Peso por pie*	*Tamaño nominal*	*Tamaño cepillado estándar*	*Área de sección*	*Momento de inercia*	*Módulo de sección*	*Peso por pie*
in	*in × in*	in^2	in^4	in^3	*lb*	*in*	*in × in*	in^2	in^4	in^3	*lb*
2 × 4	$1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	5.25	5.36	3.06	1.46	6 × 10	$9\frac{1}{2}$	52.3	393	82.7	14.5
6	$5\frac{1}{2}$	8.25	20.8	7.56	2.29	12	$11\frac{1}{2}$	63.3	697	121	17.5
8	$7\frac{1}{4}$	10.9	47.6	13.1	3.02	8 × 8	$7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}$	56.3	264	70.3	15.6
10	$9\frac{1}{4}$	13.9	98.9	21.4	3.85	10	$9\frac{1}{2}$	71.3	536	113	19.8
12	$11\frac{1}{4}$	16.9	178	31.6	4.69	12	$11\frac{1}{2}$	86.3	951	165	23.9
3 × 4	$2\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	8.75	8.93	5.10	2.43	10 × 10	$9\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{2}$	90.3	679	143	25.1
6	$5\frac{1}{2}$	13.8	34.7	12.6	3.82	12	$11\frac{1}{2}$	109	12044	209	30.3
8	$7\frac{1}{4}$	18.1	79.4	21.9	5.04	14	$13\frac{1}{2}$	128	1948	289	35.6
10	$9\frac{1}{4}$	23.1	165	35.7	6.42	12 × 12	$11\frac{1}{2} \times 11\frac{1}{2}$	132	1458	253	36.7
12	$11\frac{1}{4}$	28.1	297	52.7	7.81	14	$13\frac{1}{2}$	155	2358	349	43.1
4 × 4	$3\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$	12.3	12.5	7.15	3.40	16	$15\frac{1}{2}$	178	3569	460	49.5
6	$5\frac{1}{2}$	19.3	48.5	17.6	5.35	14 × 14	$13\frac{1}{2} \times 13\frac{1}{2}$	182	2768	410	50.6
8	$7\frac{1}{4}$	25.4	111	30.7	7.05	16 × 16	$15\frac{1}{2} \times 15\frac{1}{2}$	240	4810	621	66.7
10	$9\frac{1}{4}$	32.4	231	49.9	8.94	18 × 18	$17\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$	306	7816	893	85.0
12	$11\frac{1}{4}$	39.4	415	73.8	10.9	20 × 20	$19\frac{1}{2} \times 19\frac{1}{2}$	380	12049	1236	106
6 × 6	$5\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2}$	30.3	76.3	27.7	8.40	24 × 24	$23\frac{1}{2} \times 23\frac{1}{2}$	552	25415	2163	153
8	$7\frac{1}{2}$	41.3	193	51.6	11.4						

*Cepillado por los cuatro lados. Todas las propiedades y pesos son sólo para tamaños cepillados. Los pesos dados se basan en un peso promedio supuesto de 40 lb por pie cúbico. Valores basados en una tabla compilada por la National Forest Products Association.

TABLA 10. DEFLEXIONES Y PENDIENTES DE CURVAS ELÁSTICAS PARA VIGAS CON DIFERENTES CARGAS

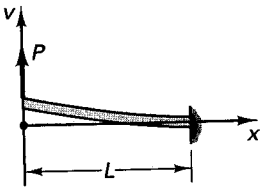
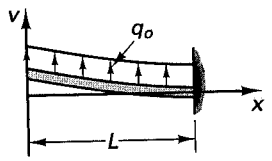
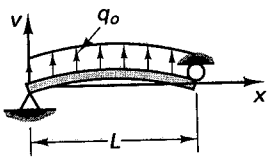
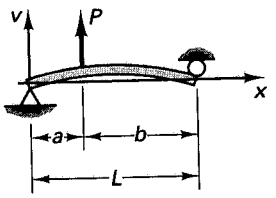
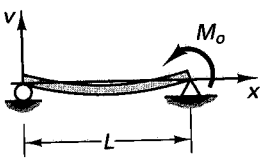
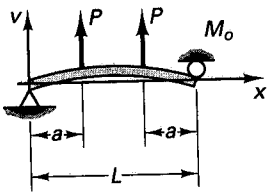
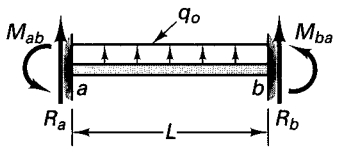
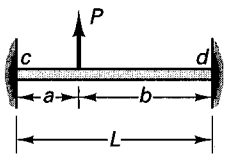
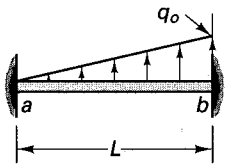
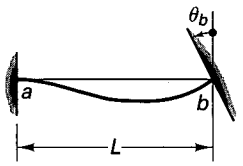
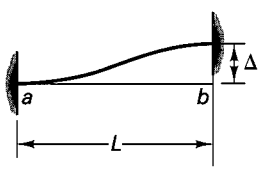
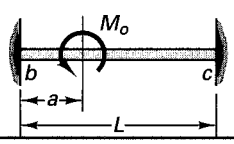
Carga	*Ecuación de la curva elástica*	
	Deflexión máxima	*Pendiente en el extremo*
	$v = \frac{P}{6EI}(2L^3 - 3L^2x + x^3)$ $v_{máx} = v(0) = \frac{PL^3}{3EI}$	$\theta(0) = -\frac{PL^2}{2EI}$
	$v = \frac{q_o}{24EI}(x^4 - 4L^3x + 3L^4)$ $v_{máx} = v(0) = \frac{q_oL^4}{8EI}$	$\theta(0) = -\frac{q_oL^3}{6EI}$
	$v = \frac{q_ox}{24EI}(L^3 - 2Lx^2 + x^3)$ $v_{máx} = v(L/2) = \frac{5q_oL^4}{384EI}$	Véase el ejemplo 14-3. $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{q_oL^3}{24EI}$
	Cuando $0 \le x \le a$, entonces $v = \frac{Pbx}{6EIL}(L^2 - b^2 - x^2)$ Cuando $a = b = \frac{L}{2}$, entonces $v = \frac{Px}{48EI}(3L^2 - 4x^2)$ $v_{máx} = v(L/2) = \frac{PL^3}{48EI}$	Véase el ejemplo 14-6. $\left(0 \le x \le \frac{L}{2}\right)$ $\theta(0) = -\theta(L) = \frac{PL^2}{16EI}$
	$v = \frac{M_ox}{6EIL}(L^2 - x^2)$ $v_{máx} = v(L/\sqrt{3}) = -\frac{M_oL^2}{9\sqrt{3}EI}$	Véase el ejemplo 19-1. $\theta(0) = -\frac{\theta(L)}{2} = -\frac{M_oL}{6EI}$
	$v_a = v(a) = \frac{Pa^2}{6EI}(3L - 4a)$ $v_{máx} = v(L/2) = \frac{Pa}{24EI}(3L^2 - 4a^2)$	$\theta(0) = \frac{Pa}{2EI}(L - a)$

TABLA 11. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO EN VIGAS PRISMÁTICAS*

Carga	*Momentos**	*Reacciones**
	$M_{ab} = -M_{ba} = -\frac{q_o L^2}{12}$	$R_a = R_b = -\frac{q_o L}{2}$
	$M_{cd} = -\frac{Pab^2}{L^2}$ $M_{dc} = \frac{Pba^2}{L^2}$	$R_c = -\frac{Pb^2}{L^3}(3a + b)$ $R_d = -\frac{Pa^2}{L^3}(a + 3b)$
	$M_{ab} = -\frac{q_o L^2}{30}$ $M_{ba} = \frac{q_o L^2}{20}$	$R_a = -\frac{3q_o L}{20}$ $R_b = -\frac{7q_o L}{20}$
	$M_{ab} = \frac{2EI}{L}\theta_b = K_{ab}\theta_b$ $M_{ba} = \frac{4EI}{L}\theta_b = K_{ba}\theta_b$	$R_a = -\frac{6EI}{L^2}\theta_b$ $R_b = -\frac{6EI}{L^2}\theta_b$
	$M_{ab} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$ $M_{ba} = -\frac{6EI}{L^2}\Delta$	$R_a = -\frac{12EI}{L^3}\Delta$ $R_b = \frac{12EI}{L^3}\Delta$
	$M_{bc} = M_o\left(-1 + 4\frac{a}{L} - \frac{3a^2}{L^2}\right)$ $M_{cb} = \frac{M_o a}{L}\left(2 - 3\frac{a}{L}\right)$	$R_b = \frac{6M_o a}{L^2}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$ $R_c = -\frac{6M_o a}{L^2}\left(1 - \frac{a}{L}\right)$

*Para todos los casos tabulados, los sentidos positivos de los momentos de extremo y reacciones son los mismos que los mostrados en el primer diagrama para carga uniformemente distribuida. *La convención de signos especial usada aquí es la adoptada en el método del desplazamiento en la Sección 19-5.*

Respuestas a problemas impares alternados

Capítulo 1

1.1 $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + x = 0.$

1.5 Fuerza axial = 99 kN a 15.9 mm desde la parte superior.

1.9 $\sigma_{máx} = 1.5$ GPa.

1.13 **(a)** Fuerza máx. = 9 kg, Esfuerzo máx. = 38.9 MPa,
(b) Fuerza máx. = 9 kg, Esfuerzo axial máx. = 8.07 MPa.

1.17 **(a)** $\sigma_{a-a} = 150$ MPa, $\tau_{a-a} = 86.6$ MPa,
$\sigma_{b-b} = 50$ MPa, $\tau_{b-b} = 86.6$ MPa.

1.21 $\tau = 3.13$ MPa.

1.25 $\tau = 21$ ksi, $\sigma = 9.1$ ksi.

1.29 **(a)** $P_1 = 5$ kN,
(b) $P_1 = 110$ kN.

1.33 $\tau_A = 23.1$ GPa, $\tau_B = 21.6$ GPa.

1.37 $\tau_A = 184$ MPa, $\tau_B = 300$ MPa.

1.41 $\sigma_1 = 14.5$ MPa, $\sigma_2 = 12.1$ MPa, $\sigma_3 = 9.24$ MPa.

1.45 $d = D$.

1.49 $A_{FC} = 572$ mm^2, $A_{BC} = 2580$ mm^2.

1.53 $A_{AB} = 58.9$ cm^2, $A_{BC} = 88.4$ cm^2, $A_{BE} = 40.4$ cm^2,
$A_{BD} = 50$ cm^2, $A_{CD} = 124$ cm^2, $A_{DE} = 165$ cm^2.

1.57 $d_{AB} = d_{AC} = 2.93$ cm.

Capítulo 2

2.1 $E = 202 \times 10^9$ N/m^2.

2.5

	Compresión			*Tensión*		
Deformación unitaria $\varepsilon(\%)$	−0.1	−1	−4	0.1	1	4
esfuerzo de ingeniería σ	18	72	128	18	72	95
esfuerzo verdadero $\bar{\sigma}$	18.0	71.3	122.9	18.0	72.7	95.7
área verdadera (A_0)	1.00	1.01	1.04	1.00	0.99	0.96

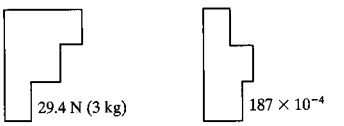
2.9 **(a)** $d = 0.49$ mm,
(b) $\Delta = 2.25$ mm.

2.15 186 MPa para el acero, 150 MPa para el aluminio

Capítulo 3

3.1 Para $\sigma \leq 100$ MPa $d \geq 11.3$ mm,
para $\varepsilon \leq 0.1\%$ $d \geq 16.8$ mm.

3.5 **(a)** Diagrama de fuerza axial **(b)** Diagrama de deformación unitaria



(c) Diagrama de desplazamiento

3.9 $P = 32.3$ kN, $\Delta_{permanente} = 54$ mm.

3.13 **(a)** $\Delta = \frac{FL}{4AE}$,

(b) $\Delta = 1.56$ mm.

3.17 $\Delta = 9.20$ mm.

3.21 $\Delta = \left(\frac{W}{AE}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{n}{n+1}\right) L.$

3.25 $\frac{L_A}{L_B} = \ln 3 = 1.1.$

3.29 $\Delta x = 0.0109$ in, $\Delta y = 3.52 \times 10^{-3}$ in.

3.33 **(a)** $K = 4.0 \times 10^6$ N/m,
(b) $\Delta = 4.0$ mm.

3.37 $P = 30.3$ kN.

3.41 $k_1 = 1.63 \Rightarrow$, $\sigma_{1máx} = 301.55$ MPa,
$k_2 = 2.30 \Rightarrow$, $\sigma_{2máx} = 425.5$ MPa.

3.45 $\Delta_B = 0.018$ in.

3.49 $\Delta = 3.42$ mm.

Capítulo 4

4.1 $R_1 = -70$ kN, $R_2 = 120$ kN.

4.5 $R_1 = -1.2\,P$, $R_2 = -0.2P$.

4.9 $f = 256$ Hz.

4.13 **(a)** $R_1 = -bP/L$, $R_2 = -aP/L$.

4.17 $F_{ac} = 9/17$ kips, $F_{al} = 4/17$ kips.

4.21 $R_A = 5.57$ kN, $R_B = 5.14$ kN, $R_C = 6.43$ kN.

4.25 **(b)** $R_1 = 10P/7$, $R_2 = -11P/7$.

4.29 **(a)** $\sigma_{ac} = 15$ ksi,
(b) $\Delta_{al} = 0.01$ in,
(c) $P_{últ} = 400$ kips.

4.33 La primera barra fluye para $\Delta = \dfrac{\sigma_{yp}L}{3E}$,
la segunda barra fluye para $\Delta_1 = \dfrac{\sigma_{yp}L}{E\cos^2\alpha}$.

4.37 $\Delta = 2Iw^2L^3/(3gE)$.

Capítulo 5

5.1 $k_s = 51.2$ N/mm.

5.5 $\sigma_x = 3.52$ MPa.

5.9 $G = 72$ MPa.

5.13 Para el vidrio: $G_g = 26.64$ MPa, $K_g = 38.7$ MPa,
para el acero: $G_s = 80$ GPa, $K_s = 133$ GPa,
para el plomo: $G_l = 5.17$ GPa, $K_l = 50$ GPa,

5.17 **(a)** $t = 4.66$ mm, use placa de 5 mm,
(b) $\Delta_d = 6.72$ mm.

5.21 $\Delta_c = 0.80$ in, $\Delta_d = 0.025$ in.

5.25 $\sigma_{1a} = 5.93$ MPa.

5.29 $\sigma_{+máx}/\sigma_{+prom} = (1 + \beta^2)/(1 + \beta)$.

5.37 **(a)** $p = 7.26$ ksi
(b) $\sigma_r = -7.26$ ksi, $\sigma_t = 16.6$ ksi,
(c) $p_i = 32.2$ ksi,

Capítulo 6

6.1 $\tau_{máx'} = 1.79 \times 10^7$ N/m^2.

6.5 **(a)** $\tau_{máx} = 162$ MPa,
(b) $d = 79.4$ mm.

6.9 $T_{perm} = 457$ N · m.

6.13 $r = 0.31$ in.

6.17 **(a)** $c = 0.12$ in, $D_0 = 0.24$ in,
(b) $k_t = 4.34 \times 10^6$ in · lb/rad.

6.21 10 hp.

6.25 $f_t = 9.57 \times 10^5\, G$ rad/N · m.

6.29 **(a)** $\tau_{ac} = 32$ kPa, $\tau_{al} = 30$ kPa,
(b) $f_t = 1.54 \times 10^{-6}$ rad/N · m.

6.33 **(a)** $T_a = 3/7$, $T_b = 4/7$, $\phi_{ab} = L/(7GI_{p1})$,
(b) $\phi_{ab} = \phi_{ba} = L/(7GI_{p1})$.

6.37 **(a)** $T_B = t_0L/3$,
(b) $\phi_x = -\dfrac{1}{JG}\left(\dfrac{t_0L}{6}x + \dfrac{t_0x^3}{6L}\right)$.

6.41 **(a)** $JG\phi\left(\dfrac{L}{2}\right) = C_1\dfrac{L}{2} - \dfrac{t_0x^2}{8}$,

(b) $\phi_{máx} = \dfrac{9}{128}\dfrac{t_0x^2}{JG}$.

6.45 $\tau = 509$ MPa.

6.49 **(a)** $\tau_{máx} = 395$ MPa,
(b) $\Delta\theta = 0.89 \times 10^{-4}$ rad.

6.53 $T_{últ} = 5a^3\tau_{yp}/6$.

6.57 Triángulo y círculo: $a = 2.92r$,
Elipse y círculo: $a = 1.50r$, $b = 0.748r$.

Capítulo 7

7.1 $R_{AX} = 0.422$ k, $R_{AY} = 5.11$ k, $R_B = 13.2$ k.

7.5 $V_b = -6$ k, $M_b = 12$ k · ft.

7.9 $P_a = -333$ lb, $V_a = -111$ lb, $M_a = 666$ lb · ft,

7.13 $P_a = 87.7$ kN, $V_a = 31$ kN, $M_a = 26.7$ kN · ft.

7.17 $P_a = -3$ k, $V_a = -3$ k, $M_a = 6$ k · ft.

7.21 $V(0) = 3P$, $M(0) = -2PL$.

7.25 $V(L) = -P/2$, $M(L) = -Pa/2$.

7.29 $R_A = R_B = w_0L/2$, $M = w_0Lx/2 - w_0Lx^2/2 + M_A$.

7.33 $P(\theta) = P(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)/2$, $V(\theta) = -P(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)/2$,
$M(\theta) = PR(1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta)/2$.

7.37 $V(0) = kL^2/3$, $M(0) = -kL^4/4$.

7.41 $V(x) = const = -M_1/L$, $M(L) = -M_1$.

7.45 $V(x) = 2$, $M(x) = 2x$, para $0 \le x \le 3$,
$V(x) = 10$, $M(x) = 10x - 24$, para $3 \le x \le 6$,
$V(x) = -2$, $M(x) = -2x + 48$, para $6 \le x \le 9$,
$V(x) = -10$, $M(x) = -10x + 120$, para $9 \le x \le 12$.

7.49 $V(0) = 540$ kN, $M(0) = -2160$ kN · m.

7.53 $V_{máx} = 4.5$ kN, $M_{máx} = 2.0$ kN · m.

7.57 $V_{máx} = 12.0$ k, $M_{mín} = -39.0$ k · ft.

7.61 $V_{mín} = -3q_0a/2$, $M_{máx} = 5q_0a^2/8$.

7.65 $V_{mín} = -20$ kN, $M_{máx} = 40$ kN · m.

7.69 $V_{máx} = 25$ k, $M_{máx} = 67$ k · ft.

7.73 $P_{mín} = -68$ kN, $V_{mín} = -24$ kN, $M_{máx} = 20$ kN · m.

7.77 $V_{máx} = 2P/3$, $M_{máx} = 4Pa/3$.

7.81 $P_{mín} = -50$ k, $V_{máx} = 2$ k, $M_{máx} = 70$ k · in.

7.85 $M_{máx} = 4.17$ k · f, $M_{mín} = -24$ k · ft.

7.91 $V_{mín} = -65q_1a/72$, $M_{mín} = -11q_1a^2/24$.

Capítulo 8

8.1 367 kN · m.

8.5 1000 k · ft.

8.9 **(a)** $I_x = 60.8a^4$, $I_x/c = 13.5a^3$, $I_y = 0.75a^4$, $I_y/c = 1.5a^3$,

(b) $I_x = 16.8a^4$, $I_x/c = 6.7a^3$, $I_y = 4.75a^4$, $I_y/c = 3.17a^3$,

(c) ambos ejes: $I = 10.8a^4$, $I/c = 4.3a^3$.

8.13 $M_c = 310$ k · in, $M_t = 231$ k · in.

8.17 $T = 80$ kN, $e = 71.8$ mm.

8.21 $\sqrt{2}$.

8.25 26.9 k.

8.29 926 N · m.

8.33 15 mm.

8.37 1.7.

8.41 1.80.

8.45 2320 k · in.

8.49 $\sigma_{al} = \pm 26.8$ MN/m^2, $\sigma_{ac} = \pm 40.3$ MN/m^2,

8.53 11.9 kN/m.

8.57 $M_0 = 11.8$ k · in, $M_i = 7.0$ k · in.

Capítulo 9

9.1 $\sigma_{máx} = 4.19$ MPa.

9.5 $\sigma_{máx} = 72.6$ kPa.

9.9 $\sigma_B = 12.6$ MPa, $\sigma_C = -30.6$ MPa,
$\sigma_D = 12.6$ MPa, $x = 29.2$ mm.

9.13 $\sigma_{máx} = -21.0$ ksi.

9.17 $F_x = 4$ kN, $F_y = 120$ kN,

9.21 922 ksi.

9.25 R/4.

9.29 **(a)** $b^2h^2/24$,
(b) $-b^2h^2/72$.

9.33 $\sigma_B = -36.3$ MPa, $\sigma_F = -61.6$ MPa, $\beta = 77.2°$

Capítulo 10

10.1 $A_{fghi} = 7500$ mm^2, $\bar{y}_1 = 100$ mm, $\bar{y}_2 = 25$ mm^2.

10.5 $q = 3715$ N/mm, $S = 64.6$ mm.

10.9 $T = 2870$ Pa.

10.13 $t_{máx} = \dfrac{4}{3}\dfrac{V}{A}$.

10.17 $\tau_1 = 136$ MPa, $\tau_2 = 143$ MPa.

10.21 $Q = 265000$ mm^3, $V = 2.03 \times 10^5$N, $M = 4.31 \times 10^4$ N · m.

10.25 $V = 5.2$ kN, $\tau = 0.73$ MPa.

10.29 $(\sigma_{arriba})_L = 0$, $(\sigma_{abajo})_L = 16$ MPa, $(\sigma_{abajo})_R = 17.3$ MPa,
$\tau_{arriba} = 1$ MPa, $V_1 = 20$ kN.

10.33 **(a)** I $= 1.82 \times 10^6$ mm^4,
(b) $\tau_{aa} = 5.49$ MPa, $\tau_{bb} = 7.7$ MPa, $\tau_{cc} = 18.7$ MPa.

10.37 **(a)** $\bar{y} = 150$ mm, $P_t = 1.89$ kN,
(b) Fuerza/perno = 118 kN/perno.

10.41 $e = 15.9$ mm desde el centro de la placa

10.45 Centro de cortante en el centroide.

10.49 debido a flexión, $\sigma_A = 0$, $\sigma_B = 0.70$ MPa,
debido a cortante, $\tau_A = 0.104$ MPa, $\tau_B = 0$,
debido a torsión, $\tau_A = \tau_B = 0.05$ MPa,
total $\tau_A = 0.154$ MPa, $\tau_B = 0.05$.

10.53 $F_{máx} = 1.24$ kN.

Capítulo 11

11.1 $\sigma_A = P_1/A$, $\sigma_B = P_1/A + M_y/I$, $\sigma_C = P_1/A$, $\tau_C = VQ/(It)$, $\tau_D = T_r/I_p$, $\tau_E = T_r/I_p = P_1Q/(It)$.

11.5 **(a)** $\sigma = -5.92$ ksi, $\tau = -5.24$ ksi,
(b) $\sigma = -12.1$ ksi, $\tau = 5.24$ ksi.

11.9 El estado de esfuerzo de 242 kN/m^2 > 225 kN/m^2 no es permisible.

11.13 $\sigma_{x'} = 22.9$ ksi, $\tau_{x'y'} = 6.99$ ksi.

11.17 **(a)** $\sigma_1 = 18.3$ ksi, $\sigma_2 = -38.3$ ksi,
(b) $\tau_{máx} = 28.3$ ksi, $\sigma = -10$ ksi,
(c) $\sigma_1 + \sigma_2 = -20$ ksi $= \sigma_x + \sigma_y$.

11.21 **(a)** $\sigma_1 = 16.1$ ksi, $\sigma_2 = -56.1$ ksi,
(b) $\tau_{máx} = 36.1$ ksi, $\sigma = -20$ ksi,
(c) $\sigma_1 + \sigma_2 = -40$ ksi $= \sigma_x + \sigma_y$.

11.25 **(a)** $\theta_1 = 26.6°$, $\sigma_1 = 6$ ksi, $\sigma_2 = -4$ ksi,
(b) $\tau = 5$ ksi, $\theta_2 = 71.6°$, $\sigma = 1$ ksi.

11.29 **(a)** $\sigma_1 = -9.5$ MPa, $\sigma_2 = -60.5$ MPa, $\theta = 50.7°$,
(b) $\tau_{máx} = 25.5$ MPa, $\sigma = -35$ MPa.

11.33 $\sigma_\theta = -15$ ksi, $\tau_\theta = 8.7$ ksi

11.39 $\tau = -4.58$ ksi, $\theta = 14.8°$.

11.43 **(a)** $\alpha = 10°$, $\sigma_x = -\dfrac{P}{0.352\alpha}$.
(b) $\alpha = 45°$, $\sigma_x = -P/2\alpha$.

11.51 $\beta = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\text{sen}\,\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\cos\theta$

11.55 $\varepsilon_1 = 1130\ \mu$m/m, $\varepsilon_2 = -128\ \mu$m/m, $\theta = 4.58°$.

11.59 $\sigma_1 = 81.8$ MPa, $\sigma_2 = 11.5$ MPa, $\theta = 4.58°$.

Capítulo 12

12.1 $\bar{\sigma} = 6$,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 \\ 4 & -12 & 8 \\ -6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

12.5 **(a)** Los tres criterios tienen el mismo σ_{yp}.
(b) Criterio del esfuerzo normal máximo: $\sigma_{yp} = 111$ MPa,
Criterio de la energía de distorsión: $\sigma_{yp} = 143$ MPa,
Criterio del esfuerzo cortante máximo: $\sigma_{yp} = 80.8$ MPa,
(c) Criterio del esfuerzo normal máximo: $\sigma_{yp} = 100$ MPa,
Criterio de la energía de distorsión: $\sigma_{yp} = 152$ MPa,
Criterio del esfuerzo cortante máximo: $\sigma_{yp} = 87.5$ MPa.

12.9 **(a)** $\sigma_1 = 50$ ksi, $\sigma_2 = 20$ ksi, $\sigma_3 = -10$ ksi,
(b) $\sigma_1 = 57.7$ ksi, $\sigma_2 = 23.1$ ksi, $\sigma_3 = -11.5$ ksi.

Capítulo 13

13.1 $\sigma_\theta = -15/2$ MPa, $\tau_\theta = -15\sqrt{3}/2$ MPa.

13.5 $N = 97.7$ MN, $\sigma_\theta = 97.7$ MPa, $S = 33.8$ MN, $\tau_\theta = 33.8$ MPa.

13.9 $p = 1.2$ MPa, $T = 15.1$ kN · m.

13.13 $p = 117$ lb, $A_y = 58.9$ lb.

13.17 **(a)** $\sigma_A = 333$ MPa, $\tau_A = 578$ MPa,
(b) $\sigma_1 = 768$ MPa, $\sigma_2 = -435$ MPa.

13.21 $\sigma_A = 13.3$ psi, $\tau_A = 1.42$ psi, $\sigma_B = 9.91$ psi, $\tau_B = 1.52$ psi.

13.25 $p = 764$ lb.

13.29 $y + 27x/8 = 0$.

13.33 $\Delta = [3(\alpha_2 - \alpha_1)\delta T\, L_2]/(4h)$.

13.37 $\sigma_{máx} = 1180$ psi $< \sigma_{perm} = 1250$ psi,
$\tau_{máx} = 85.7$ psi $< \tau_{perm} = 95.0$ psi.

13.41 $w = 2.13$ kN/m.

13.45 S 10 × 25.4.

13.49 $d(x) = (x/l)^4/d_0$.

13.53 $d = 0.161$ m.

13.57 $\tau_{máx} = 500$ lb.

Capítulo 14

14.1 $\sigma_{máx} = 200$ MPa.

14.5 $q(x) = -kx$.

14.9 $v(x) = -\dfrac{P}{6EI}(x^3 - 3L^2x + 2L^3)$.

14.13 $v(x) = -\dfrac{k}{EI}\left(\dfrac{L}{\pi}\right)^4 \text{sen}\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$.

14.17 $v(x) = -\dfrac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$ para $0 \le x \le 42$.

14.21 $v(x) = \dfrac{Px^3}{12EI} - \dfrac{PLx^2}{16EI}$ para $0 \le x \le L$.

14.25 $EIv(x) = -\dfrac{kL^4}{\pi^4}\text{sen}\dfrac{px}{L} + \dfrac{kL^4}{2\pi^3}x^3 - \dfrac{3kL^2}{2\pi^3}x^2 + \dfrac{kL^3}{\pi^3}x$.

14.29 $EIv(x) = \dfrac{5P}{96}x^3 - \dfrac{PL^2}{32}x$ para $0 \le x \le L/2$,

$EIv(x) = \dfrac{5P}{96}x^3 - \dfrac{P}{6}\left(x - \dfrac{L}{2}\right)^3 - \dfrac{PL^2}{32}x$ para $L/2 \le x \le L$.

14.33 $E_s Iv(x) = \frac{P}{12}x^3 - \frac{5PL^2}{48}x$ para $(0 \le x \le L/2)$,

$$E_A Iv(x) = \frac{p}{12}(L-x)^3 - \frac{7PL^2}{144}(L-x) \text{ para } L/2 \le x \le L.$$

14.37 $v_B = 0.210$ in.

14.41 **(a)** $I_s = 830\ \text{in}^4$, use 18 I70
(b) $I_{AI} = 2490\ \text{in}^4$, use 24I,
(c) $\sigma_s = 14.15$ ksi, $\sigma_{AI} = 6.14$ ksi.

14.45 $EIv(x) = \frac{5w_0 a}{48}x^3 - \frac{95w_0 a^3}{96}x - \frac{w_0}{24}(x-a)^4 +$

$$+ \frac{w_0}{24}(x-2a)^4 \text{ para } 2a \le x \le 4a,$$

para $0 \le x \le a$ tome los dos primeros términos,
para $a \le x \le 2a$ tome los primeros tres términos.

14.49 $EIv(x) = -\frac{k}{120}x^5 + \frac{ka^2}{18}x^3 - \frac{41ka^4}{360}x$ para $0 \le x \le a$,

$$EIv(x) = -\frac{k}{120}x^5 + \frac{ka^2}{24}(x-a)^4 + \frac{k}{120}(x-a)^5$$
$$+ \frac{ka^2}{18}x^3 - \frac{41ka^4}{360}x \text{ para } a \le x \le 2a.$$

14.53 Para la carga de 6 k: $v_C = -0.061$ in,
para la carga de 3 k/ft $v_{C\,total} = -0.391$ in.

14.57 $v_{CX} = \frac{13PL^3}{192EI}$, $v_{CY} = \frac{PL^3}{8EI}$.

14.61 $P_S = 8.13$ lb.

14.65 $X = 531$ N, en los alambres laterales = 485 N.

14.69 $\delta T = 96.8°$ F.

14.73 $\gamma = 11.2°$, $22.5° + 11.2°$.

14.77 **(a)** $P = 11bh^2\sigma_{yp}/(12L)$.

Capítulo 15

15.1 $v_A = -\frac{744P}{EI}$, $\theta_A = -\frac{57P}{EI}$ rad.

15.5 $v_A = \frac{25Pa^3}{108EI}$, $\theta_A = \frac{19Pa^2}{108EI}$ rad.

15.9 $v_A = \frac{4M_1 a^2}{9EI}$, $\theta_A = -\frac{M_1 a}{3EI}$ rad.

15.13 $v_C = \frac{11PL^3}{768EI}$.

15.17 $v_{máx} = -\frac{4a^2 M_1}{9\sqrt{3}EI}$.

15.21 $v_{máx} = 0.10$ in, $v_{centro} = 0.0905$ in.

15.25 $v_C = 1240/EI$.

15.29 $M_C = 23.5$ kN · m.

15.33 $R_A = 4P/3$, $R_B = 2P/3$.

15.37 **(b)** $\tau_{máx} = 680\ \text{kN/m}^2 < \tau_{perm}$.

15.41 $\frac{v_f}{v_s} = \frac{1}{5}$.

15.45 $V_{máx} = 41.9$ k, $M_{máx} = 40.2$ k · ft.

15.49 $V_{máx} = 282$ kN, $M_{mín} = -504$ kN · m.

15.53 $V_{máx} = 12.6$ k, $M_{mín} = -25.5$ k · ft.

Capítulo 16

16.1 $P_{CR} = 3k/2$.

16.5 $0.586k/a$, $2k/a$, $3.41k/a$.

16.9 $F = 876$ kN.

16.13 $F = 5980$ N.

16.17 Use un tubo de 2 in. $L/r = 152$.

16.21 $P_{CR} = \pi^2 EI/(4L^2)$

16.25 $L_2 = 2$ m, $L_3 = 1$ m, $L_4 = L_5 = L_1 = 4$ m.

16.29 Para columnas articuladas en sus extremos $(L/r)_1 = 89.2$, $(L/r)_2 = 75.7$;
Para columnas empotradas en sus extremos $(L/r)_1 = 178$, $(L/r)_2 = 151$.

16.33 **(a)** $v_{máx} = 7.01$ mm, $M_{máx} = 332 \times 10^3$ N · mm,
(b) $v_{máx} = 7.06$ mm, $M_{máx} = 333\ 10^3$ N · mm,
(c) $\sigma_{máx} = 42$ ksi.

16.37 $v_1 = C_1 \operatorname{senh}(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 x + C_4$.

16.41 $M = -\frac{q_0 \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2 \operatorname{sen}(\lambda L)}$.

16.45 $P_{CR} = 1.67\,\pi^2 EI/L^2$.

16.49 $P_{perm} = 153$ kips.

16.53 **(a)** $P_{a1} = 1110$ kips, $P_{n2} = 219$ kips,

(b) $\frac{P_{n1}}{P_{perm}} = 1.87$, $\frac{P_{n2}}{P_{perm}} = 1.43$.

16.57 **(a)** $2b = 4.94$ in,
(b) $P_n = 94.6$ kips.

16.61 $P_{perm} = 10.8$ kips.

16.65 $P_{perm} \leq 173$ kips.

Capítulo 17

17.1 **(a)** $\Delta = \dfrac{PL}{AE} + \dfrac{2PL^3}{3EI} + \dfrac{20PL}{9GA} + \dfrac{PL^3}{GI}$,

(b) $\Delta = \dfrac{4PL}{\pi d^2 E}$,

$\dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0.5\%$, $\dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 33.6\%$, $\dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2.8\%$, $\dfrac{\Delta_4}{\Delta} = 63.3\%$,

(c) $\dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 0.02\%$, $\dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 34.7\%$, $\dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 0.1\%$, $\dfrac{\Delta_4}{\Delta} = 65.1\%$.

17.5 $\sigma_{máx} = 59.3$ MPa.

17.9 $\Delta_h = 546$ mm, $\Delta_v = 120$ mm.

17.13 $\Delta_{máx} = \dfrac{11PL^3}{384EI}$.

17.17 $v_c = \dfrac{518}{EI}$.

17.21 $\dfrac{M_0}{EI}\left(L_1 + \dfrac{L_2}{3}\right)$, $\dfrac{2M_0L_1}{6EI}(L_1 + 2L_2)$.

17.25 $\theta_A = 66P/EI$.

17.29 $\theta = \dfrac{61w_0a^3}{6EI}$.

17.33 $\Delta_V = 0.145\dfrac{PL^3}{EI}$, $\Delta_H = 0.108\dfrac{PL^3}{EI}$.

17.37 $\Delta_C = 0.604$ mm.

17.41 $\Delta = \dfrac{P}{EI}\left[\dfrac{2L^3}{3} + R\left(L^2\pi + \dfrac{R^2\pi}{2} + 4LR\right)\right]$.

17.45 **(a)** $T = 85.7°$,
(b) F = 398 lb, $\sigma_{BD} = 1940$ psi,
$\sigma_{BC} = 1550$ psi, $\sigma_{AB} = 1170$ psi.

17.49 **(a)** $R_A = 2P/3$,
(b) $M_B = PL/3$.

17.53 **(a)** $F_{BD} = -10.8$ kN, $F_{BC} = -14.4$ kN,
(b) $F_{AB} = 2.57$ kN, $F_{BD} = -12.9$ kN, $F_{BC} = -12.9$ kN,

Capítulo 18

18.1 $\Delta_H = 0.0133$ in.

18.5 $\Delta_V = 518/(EI)$.

18.9 $\Delta_H = -224P/(EI)$.

18.13 $\Delta_D = 1.57$.

18.17 $R_A = w_0L/2$, $M_A = w_0L^2/12$.

18.21 $P_{CR} = \pi^2EI/L^2$.

Capítulo 19

19.1 $EIv' = (2L^2 + 3a - 6La)/6$, $\theta_C = (2L^2 - 3a^2 + 6La)/(6L)$.

19.5 $R_A = 3$ kips.

19.9 $\begin{bmatrix} 2.00 & 0.89 & -0.80 \\ 0.89 & 2.00 & -0.45 \\ -0.80 & -0.45 & 2.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.40 \\ 20.00 \\ 0 \end{bmatrix}$

19.13 $M_{ab} = PL/6 - w_0L^2/9$, $M_{ba} = PL/24 + w_0L^2/9$,
$M_{bc} = PL/24 + 2w_0L^2/9$, $M_{cb} = -PL/48 + 7w_0L^2/18$.

19.17 $M_{ab} = -3PL/20 + 7w_0L^2/60$, $M_{ba} = 3PL/10 + w_0L^2/60$,
$M_{bc} = 3PL/10 + w_0L^2/60$, $M_{cb} = -PL/5 + w_0L^2/60$.

Capítulo 20

20.1 $P = 14M_p/(3L)$.

20.5 $W_{últ} = 12\,M_p/\mathrm{L}$.

20.9 $P_{últ} = 10.5\,M_p/L$.

20.13 $M_{últ} = w_0L^2/6$.

Índice

A

Acero estructural, fórmulas para columnas de, 702-4
Aleaciones de aluminio, fórmulas de columnas para, 704-5
Aluminum Association (AA), 705-5, 712
  manual de construcción, 714
American Institute of Steel Construction (AISC), 702
American Society for Testing and Materials (ASTM), 59
American Society of Mechanical Engineers (ASME):
  código para ejes de transmisión, 218
  Unfired Pressure Vessel Code, 190
Amplitud de la deformación unitaria, 86
Análisis de esfuerzos elásticos, 537-81
  diseño elástico por resistencia, 551-66
  estado de esfuerzo para casos básicos, 539-46
  exactitud comparada de las soluciones para vigas, 546-48
  métodos experimentales, de 549-50
Análisis elástico de sistemas, 791-818
  método de las fuerzas, 792-95
  método de los desplazamientos, 802-8
  métodos básicos, 792
  reciprocidad de los coeficientes de flexibilidad, 795-802
  reciprocidad de los coeficientes de rigidez, 808-14
Análisis plástico al límite, 819-40
  de vigas, 821-34
  de vigas y marcos continuos, 834-36
  y diseño sísmico, 820-21
Analogía de la membrana, 244-45
Analogía del montón de arena, 245-47
Ángulo de Lode, 494
Annual Book of ASTM Standards, 31
ASTM Standard for Metric Practice E380-86, 6

B

Barras cargadas axialmente:
  deformación de, 91-130
  diseño determinístico de, 33-37
  energía de deformación para, 734
  esfuerzo normal máximo en, 12-15
  secciones inclinadas en, 16-19
Barras circulares inelásticas, torsión de, 237-42
Barras prismáticas, 14
Barras rectas, fórmula de la torsión para, 450
Bernoulli, Jacob, 60, 326, 737

C

Cálculo de reacciones en vigas, 270-75
Calibradores de deformación unitaria eléctricos, 59
Caras cercanas del cubo, 7
Carga cíclica, 82-87
  carga de amplitud constante, 83-85
  ciclaje de amplitud variable, 85-86
  fatiga de bajo ciclaje, 86
Carga cíclica de amplitud aleatoria, 85-86
Carga crítica de pandeo, 678
Carga límite, 34
Carga plástica límite, 157
Carga última, 31, 34
Carga viva uniformemente distribuida, 560-61
Carga(s) de pandeo de Euler, 678, 693
  para columnas con extremos articulados, 677-79
  para columnas con restricciones de extremo diferentes, 679-82
Cargas de impacto, 116-19
Cargas de pandeo, energía elástica para, 786-88
Cargas dinámicas, 116-19
Cargas vivas, 560
Caso fundamental, 679
Castigliano, C. A., 776
Centro de cortante, 441-46
Centroide, 13, 276
Centroide de módulo ponderado, 334, 356
Ciclaje de amplitud variable, 83, 85-86
Cilindros de pared gruesa, 190-201
  casos especiales, 196-98
  comportamiento elastoplástico de, 200-201
  comportamiento idealmente plástico de, 198-201
  comportamiento plástico de, 199-200
  solución del problema general, 191-96
    compatibilidad geométrica, 192-93
    equilibrio estático, 192
    formulación de la ecuación diferencial, 194
    problema de un disco delgado, 195-96
    propiedades del material, 193
    solución de la ecuación diferencial, 194-95
Cinemática, 18, 158
Círculo de esfuerzos, 482
Círculos de esfuerzos de Mohr:
  definición, 482
  para problemas bidimensionales, 481-83
  transformación, construcción de, 483-91
Círculos principales de esfuerzos, 495
Clebsch, A., 307
Coeficiente de dilatación térmica lineal, 71-72
Coeficiente de varianza, 37
Columnas, 667-731
  Carga(s) de Euler:
    para columnas con diferentes restricciones de extremo, 679-82
    para columnas con extremos articulados, 677-79
  cargas excéntricas y fórmula de la secante, 687-90
  columnas cargadas axialmente, 702-10
    fórmulas de columnas de acero estructural, 702-4
    fórmulas de columnas de aleación de aluminio, 704-5
    fórmulas de columnas de madera, 705-10
  columnas cargadas excéntricamente, 710-17
    método de interacción, 711-17
    método del esfuerzo permisible, 711
  columnas en voladizo, 680
    carga crítica para, 680
  diseño de, 699-717
    consideraciones generales, 699-701
  equilibrio estático, criterios de estabilidad, 672-77
  estabilidad lateral de vigas, 717
  fórmulas para la carga de pandeo de Euler:
    generalizadas, 684-87
    limitaciones de, 682-84
  longitud efectiva de columnas, 681
  teoría del pandeo, 677-99
  vigas-columnas, 690-94
    ecuaciones diferenciales alternativas para, 694-99
Columnas cortas, 686
Columnas de longitud intermedia, 686
Columnas largas, 686
Compatibilidad geométrica, 132
Concentraciones de esfuerzos, torsión, 221-22
Condición de fluencia de Huber-Hencky-Mises, 527
Condición de fluencia de Tresca, 523, 535
Condiciones cinemáticas de frontera, 590, 592
Condiciones estáticas de frontera, 590, 592
Constante de resorte, 95, 452, 605
  torsionante (rigidez torsional), 224
Contornos de esfuerzo, 549
Convención de signos del analista, 803
Convención de signos del diseñador, 803
Coples con pestañas para flechas, 235-36
Coples flexibles, 235-36
Coples para flechas en torsión, 235-36
Coples rígidos, 235-36
Cortante, 6
Cortante doble, 20
Cortante en vigas, 277-78
Cortante simple, 20
Coulomb, C. A., 212, 521
Criterios de fluencia y fractura, 519-36
  comparación, 528-32
  comparación de teorías, 527-28
  superficie de falla para materiales frágiles, 532-34
  teoría de la energía máxima de distorsión, 523-27
  teoría del esfuerzo cortante máximo, 521-23
  teoría del esfuerzo normal máximo, 528
Curva elástica, 305

D

Da Vinci, Leonardo, 737
Daño por fatiga, 85
Deflexión inelástica de vigas, 620-23
Deflexiones:
  de vigas inelásticas, 620-23
  en flexión asimétrica, 615-17
  método de la energía para, 617-20
  por el método de la energía, 115-16
  por superposición, 610-15
Deflexiones en vigas por el método área-momento, 635-66
  observaciones generales, 635
  teoremas área-momento, 636-50
    primero, 637-38
    segundo, 638-39
  vigas estáticamente indeterminadas, 650-59
Deflexiones en vigas por integración directa, 582-634
  condiciones de frontera, 589-91
  deflexión inelástica de vigas, 620-23
  deflexiones en flexión asimétrica, 615-17
  deflexiones por superposición, 610-15
  ecuación diferencial gobernante, 585-88
    deducción alternativa de, 588-89
  funciones de singularidad para vigas, 608-10
  método de la energía para deflexiones e impacto, 617-20
  relación momento-curvatura, 583-85
  soluciones por integración directa, 591-608
Deformación axial de barras:
  sistemas estáticamente determinados, 91-130
    cargas de impacto, 116-19
    cargas dinámicas, 116-19
    deflexiones por el método de la energía, 115-16
    energía de deformación elástica para esfuerzo uniaxial, 111-5
    principio de Saint-Venant y concentraciones de esfuerzos, 104-9
    prueba de tensión, 109-1
  sistemas estáticamente indeterminados, 131-68
    consideraciones generales, 131-32
    enfoque de la ecuación diferencial para deflexiones, 157-60
    método de las fuerzas de análisis, 132-38
    métodos de los desplazamientos, 138-41
    métodos de los desplazamientos con grados de libertad, 141-44
    problemas no lineales, 144-57
Deformación unitaria, 57-90, 470
  amplitud, 86
  carga cíclica, 82-87
  definición matemática, 173-75
  densidad de la energía de deformación, 113
  diagramas esfuerzo-deformación unitaria:
    de ingeniería, 60-62, 64
    verdadera, 62-66
  endurecimiento, 73
  energía, 72-75
  extensómetros eléctricos, 59
  fatiga, 82-87
  irrotacional, 176
  lateral, 70

ley de Hooke, 66-68
logarítmica, 62
materiales linealmente viscoelásticos, 76-82
natural, 62
normal, 59, 174, 503
permanente, 79
plana, 177, 180, 193, 195, 507
prueba de tensión y deformación unitaria normal, 57-59
pura, 176
razón de Poisson, 70-71
región de ablandamiento por deformación, 61
región de endurecimiento por deformación, 61-62
relaciones constitutivas, 57, 60-66, 68-69, 72-76, 158
relaciones esfuerzo-deformación unitaria, 57, 60-66, 68-69
residual, 79
rosetas de deformación, 507-10
tensor de deformación unitaria, 176-77
verdadera, 62
unitaria cortante, 170-75
unitaria y deformación térmica, 71-72
Deformación unitaria en tensión, 59
Deformación unitaria extensional, 174
Delta de Dirac, 308
Densidad de la energía de deformación, 113
Densidad de la energía de deformación elástica, 733
Desplazamientos de cuerpo rígido, 499
Desplazamientos virtuales, 732-33
Desviación estándar de densidades de probabilidad, 38
Desviación estándar de la muestra, 37
Diagrama deformación-vida por fatiga, 83, 86
Diagrama esfuerzo-vida por fatiga, 83-85
Diagrama M/EI, 636-50
Diagramas de cortante antisimétrico, 297
Diagramas de cuerpo libre, 3-4
Diagramas de curvas de interacción, 396
Diagramas de fuerza axial, 281-91
Diagramas de fuerza cortante, 281-91
antisimétricos, 297
por integración de la carga, 293-94
simétricos, 297
Diagramas de momento flexionante, 281-91
efecto de un momento concentrado en, 301-4
por integración de la fuerza cortante, 295-301
Diagramas esfuerzo-deformación unitaria de ingeniería, 60-62, 64
Diagramas esfuerzo-deformación unitaria verdadera, 62-66
Diagramas ingenieriles esfuerzo-deformación unitaria, 60-62, 64
Diagramas *S-N*, 32, 83-85
Diagramas simétricos de fuerza cortante, 297
Dilatación, 183
Dipolo, 309
Diseño elástico de vigas no prismáticas, 561-63
Diseño elástico por resistencia, 551-66
de miembros cargados axialmente, 551
de miembros complejos, 563-66
de miembros en torsión, 551-52
de vigas no prismáticas, 561-63
de vigas prismáticas, 552-61
Diseño por esfuerzos permisibles (ASD), 34, 702
Fórmulas AISC para columnas, 702-3
Diseño por factores de carga y resistencia (LRFD), 702
fórmulas del AISC para columnas, 703-4
Disipación de la energía, 113
Distribución de la frecuencia, 37-38
Distribución gaussiana, 38
Distribución normal, 38, 42
Doblete, 309

E

Ecuación de compatibilidad, 156, 175
Ecuación de equilibrio, 145, 156
escrita en estado deformado, 690
Ecuación de equilibrio estático, 12
Ecuación de los tres momentos, 659
Ecuación diferencial gobernante, 585-88
deducción alternativa de, 588-89
Ecuaciones diferenciales de equilibrio, 10-12
Efecto de Poisson, 332
Eggenschwyler, A., 443
Eje neutro de una viga, 329
Ejes principales de inercia, 400
Elasticidad, módulo cortante de, 171
Elementos infinitesimales, 104
Empotramiento, 269, 590
Empuje, 276
Endurecimiento por deformación, 73
Energía, 732-70
deformación elástica, 733-35
en flexión pura, 347-48
para barras cargadas axialmente, 734
para esfuerzo uniaxial, 111-15
para esfuerzos cortantes, 172-73
para tubos circulares en torsión, 735
para vigas en cortante, 735
para vigas en flexión, 734
desplazamientos por conservación de, 735-36
elástica para cargas de pandeo, 786-88
métodos clásicos de, 771-90
sistemas estáticamente indeterminados, 782-86
Teoremas de Castigliano, 771, 776-85
teoremas de energía de deformación y deformación complementaria, 772-75
Véase también Trabajo virtual
Energía complementaria, 113
Energía de deformación unitaria, 72-75
vigas en cortante, 735
vigas en flexión, 734
Energía elástica interna de deformación, 111-12
Enfoque determinístico para la estimación de la seguridad estructural, 32
Engesser, F., 776
Equilibrio estático, criterios de estabilidad para, 672-77
Escalares, 8, 470
Esfuerzo, 1-54, 470
aplastamiento, 14, 20
barras axialmente cargadas:
diseño determinístico, 33-37
esfuerzo normal máximo en, 12-15
secciones inclinadas, 16-19
biaxial, 10
circunferencial, 185
compresivo, 5, 198
cortante (corte), 6, 19-22
análisis de, 22-31
en flechas circulares en el rango inelástico, 237-42
en vigas, 415-67
energía de deformación elástica, 172-73
relaciones esfuerzo-deformación unitaria para, 170-72
de aro o circunferencial, 185
de tensión, 5
definición, 4-7
diseño determinístico de miembros, 33-37
diseño estructural, 37-42
base teórica, 37-39
evidencia experimental, 39-41
formulaciones prácticas, 41-42
ecuaciones diferenciales de equilibrio, 10-12
fibra, 33
ingenieril, 60
local, 18, 94
longitudinal, 185
medio, 18
método de las secciones, 3-4
nominal, 60, 350
normal, 5-6, 13
análisis de, 22-31
permisible, 32
plano, 9-10, 180, 195, 506, 510
promedio, 18, 94, 104-5, 185
relaciones esfuerzo-deformación unitaria, 57, 60-66
residual, 15
resistencia del miembro como criterio de diseño, 31-33
tangencial, 191
tensor esfuerzo, 7-10
triaxial, 10
último, 31-32
uniaxial, 10, 13
energía de deformación elástica, 111-15
verdadero, 62-63
Esfuerzo cortante máximo, 478
en problemas bidimensionales, 477-81
Esfuerzo cortante permisible, 552
Esfuerzo de compresión, 5, 198
Esfuerzo de tensión, 5
Esfuerzo esférico, 495
Esfuerzo nominal de aplastamiento, 14
Esfuerzo permisible en fibras, 33
Esfuerzo uniforme de compresión, 352
Esfuerzos cortantes en vigas, 415-67
alabeo de secciones planas debido al cortante, 432-37
centro de cortante, 441-46
esfuerzos cortantes directos y torsionantes combinados, 446-48
flujo de cortante, 419-25
fórmula del esfuerzo cortante para vigas, 425-32
limitaciones, de la 438-41
resortes helicoidales estrechamente enrollados:
deflexión de, 451-53
esfuerzos en, 448-51
Esfuerzos planos generalizados, 546
Esfuerzos principales, 477, 492-93
Estabilidad de materiales, 2, 667, 669
Estabilidad lateral de vigas, 717
Estado axialsimétrico de esfuerzo, 495
Estado de esfuerzo cilíndrico, 495
Estado general de esfuerzo:
círculo de Mohr para, 495-98
esfuerzos principales para, 491-94
Estática, 18, 158
Estática de vigas, 267-324
cálculo de reacciones, 268-75
enfoque directo para P, V y M, 275-91
integración de V y M, 291-306
V y M por funciones de singularidad, 306-12
Estricción, 62
Euler, Leonard, 326, 586
Extensómetro, 59

F

Factor de amplificación de la deflexión, 693-94
Factor de concentración de esfuerzos, 106-7
Factor de corrección de Wahl, 451
Factor de flexión, 714
Factor de forma, 352
Factor de impacto, 118
Factor de seguridad (F.S.), 33
Factores de carga, 34
Falla dúctil, 19
Fatiga, 82-87
Fatiga de alto ciclaje, 83
Fatiga de bajo ciclaje, 83, 86
Flexibilidad torsional, 224
Flexión, 325-26
Flexión asimétrica de vigas, 325, 379-414
flexión elástica con carga axial, 384-94
flexión inelástica con cargas axiales, 394-97
flexión respecto a ambos ejes principales, 380-97
vigas con secciones transversales arbitrarias, 401-6
Flexión asimétrica, deflexiones en, 615-17
Flexión de vigas simétricas, 325-78
concentraciones de esfuerzos, 344-46
energía de deformación elástica en flexión pura, 347-48
flexión inelástica de vigas, 348-56
fórmula de la flexión elástica, 328-35
aplicaciones, 33
hipótesis cinemática básica, 326-28
Véase también Flexión asimétrica de vigas
vigas de sección transversal compuesta, 356-61
Flexión elástica con cargas axiales, 384-94
Flexión inelástica de vigas, 348-56
con carga axial, 394-97
Flexión pura, 285, 325-26, 552
Flujo de cortante, 249, 419-25
Flujo plástico, 32, 75, 80-81
Fórmula de la flexión, 331
Fórmula de la flexión elástica, 328-35, 422
Fórmula de la secante para columnas, 688-90
Fórmula de la torsión, 211-18
Fórmula de transferencia, 335
Fórmula del módulo tangente, 685
Fórmula generalizada de la flexión, 403
Fórmulas de carga de pandeo de Euler:
generalizadas, 684-87
limitaciones de, 682-84
Frahm, H., 225
Fuerza axial en vigas, 276-77

Fuerzas de cuerpo, 4
Fuerzas virtuales, 732-33
Función de deformabilidad al flujo plástico, 80-81
  constantes del material para, efecto de la temperatura sobre, 81-82
Función impulso unitario, 308
Función momento puntual unitario, 308-9
Función propia, 679
Funciones de densidad de probabilidad, 38
Funciones de singularidad para vigas, 608-10

G

Galileo Galilei, 2, 231, 737, 819
Gauss, Karl Friedrich, 38
Gigapascal (GPa), 6
Golovin, M., 361
Grados de libertad, 802
  método de los desplazamientos con, 141-44
Greene, Charles E., 636
Grietas por fatiga, 83

H

Heavside, O., 307
Hencky, H., 523
Higgins, T. R., 820
Hipótesis de Bernoulli-Euler, 326
Histograma, 38
Hooke, Robert, 67
Huber, M. T., 523

I

Indeterminación estática de primer grado, 23
Indeterminación estática de segundo grado, 23
Indeterminantes cinemáticos, 802
Índice de resorte, 450,451
Inestabilidad:
  ejemplos, 669-71
  estructural, 667-69
Intervalo de clase, 38

J

Jouravsky, D.I., 427

K

Kelvin, Lord, 76
Kilogramo (kg), 6
Kilogramo-metro/s 2, 6
Kilolibra (kip), 6
Kilómetro (km), 6
Kilonewton (kN), 6
Kilopascal (kPa), 6
Kips por pulgada cuadrada (ksi), 6, 13

L

Lamé, M. G., 179
Lazos histeréticos, 74
Ley de Hooke, 66-68, 76-77, 79, 93, 190, 210, 211-13, 362, 428
  extensión para esfuerzos y deformación unitaria cortante, 171
  generalizada, 169-206
    definición, 177
    para materiales isótropos, 177-81
Límite de fatiga, 85
Límite elástico de un material, 67-68
Límite proporcional de un material, 67-68
Línea isoclinal, 550
Líneas de Luders, 19
Longitud calibrada, 59
Longitud efectiva de columna, 681

M

Macauly, W. H., 307
Madera, fórmulas para columnas, 705-10
Maillart, R., 443
Manual de construcción en acero, 353
Marcos, análisis plástico al límite, 834-36
Margen de seguridad, 34
Material relajado, 80
Materiales anelásticos, 78
Materiales anisótropos, 68, 177
Materiales elástico lineales, 69, 144-45
Materiales elásticos no lineales, 69
Materiales frágiles, superficie de falla para, 532-34
Materiales hookeanos, 69
Materiales isótropos, 68
  ley de Hooke generalizada para, 177-81
Materiales ortotrópicos, 177
Materiales viscoelástico lineales, 76-82
Matrices cuadradas, 755
Matriz, 755
Matriz simétrica de rigidez, 143
Mecánica de materiales, 2, 12, 18
Mecánica de sólidos, 2
Mecanismo de colapso cinemáticamente admisible, 157, 823-34
Mecanismos disipadores de energía, 823
Media, 38
Media de una muestra, 37
Medida de la dispersión, 37
Megapascal (MPa), 6
Meseta de fluencia, 61
Método de área-momento, 635-66. *Véase* Deflexiones en vigas por el método de área-momento
  deflexión de vigas, 635-66
  observaciones generales, 635
  teoremas área-momento, 636-50
    primero, 637-38
    segundo, 638-39
  vigas estáticamente indeterminadas, 650-59
Método de la flexibilidad para el análisis, 134
Método de la rigidez, 139-40, 143, 808
Método de las fuerzas de análisis, 132
Método de los desplazamientos, 132, 138-41, 792
  con grados de libertad, 141-44
Método del desplazamiento virtual unitario, 742, 752
Método del elemento finito, 104-5
Método plástico de análisis y diseño, 352
Método probabilístico para estimar la seguridad estructural, 32
Metro (m), 6
Metro por segundo al cuadrado (m/s^2), 6
Miembros cargados axialmente y diseño elástico por resistencia, 551
Miembros complejos, y diseño elástico por resistencia, 563-66
Miembros en torsión, diseño elástico, 551-52
Miembros macizos no circulares: torsión, 242-48
    alabeo de secciones abiertas de pared delgada, 247-48
    barras macizas de sección transversal, 242-47
Miembros tubulares de pared delgada, torsión de, 248-52
Milímetro (mm), 6
Milinewton (mN), 6
Minimáx, 784
Modelo de daño acumulado, 85
Modelo de resistencia para materiales frágiles, 532-34
Módulo cortante de elasticidad, 171
Módulo de compresión, 183
Módulo de relajación, 80
Módulo de resiliencia, 74, 113
Módulo de rigidez, 171
Módulo de ruptura, 237,350
Módulo de sección elástico, 339
Módulo de tenacidad, 75
Módulo de Young, 67
Módulo elástico, 67
Módulo volumétrico, 183
Mohr, Otto, 530, 636
Momento concentrado, efecto sobre diagramas de momento flexionante, 301-4
Momento de inercia, 330
Momento de inercia rectangular, 330
Momento flexionante en vigas, 278-81
Momento interno resistente, 278-79
Momento plástico resistente de una viga, 352

N

National Forest Products Association (NFPA), 705-6, 712
Navier, M., 326, 331, 819
Newton (N), 6
Núcleo central, 393

P

Palmgren-Miner, hipótesis, 85
Pandeo, 1-2, 190
Parámetro de esbeltez de columna, 703
Parámetros de Lamé, 179
Pascal (Pa), 6
Plano de Rendulic, 533
Planos de deslizamiento, 19
Planos principales de esfuerzo, 477
Población muestra, 37
Poncelet, J. V., 60
Presión interna, 190
Primer teorema de área-momento, 637-38
Principio d'Alembert, 4
Principio de Saint-Venant, 18, 94, 105, 214, 242, 326, 334, 429, 546
  y concentraciones de esfuerzos, 104-9
Principio de superposición, 134, 610
Probabilidad de falla, 42
Problemas de valor en la frontera, 191
Problemas de vigas planas, 267
Producto matricial, 755-56
Prueba de compresión, 59
Prueba de tensión:
  elevadores de esfuerzos en, 109-1
  y deformación unitaria normal, 57-59
Pruebas de fatiga, 32, 83
Punto de bifurcación, 674
Punto de inflexión, 305
Punto de ramificación, 674
Punto nodal, 751

R

Radianes, 170
Radio de giro, 682-83, 688
Rankine, W. J. M., 528
Razón de Poisson, 70-71, 332
Recipientes a presión, 184-90
  cilíndricos, 184-88
  de pared delgada, 184-86, 188-90
  esféricos, 184-88
Redundancia, 23
Región de ablandamiento por deformación, 61
Región de endurecimiento por deformación, 61, 62
Región de esfuerzo posúltimo, 61-62
Región elástica lineal, 61
Regla de daño lineal, 85
Relación momento-curvatura, 583-85
Relaciones constitutivas, 57, 60-66, 68-69, 72-76, 132, 158
Relaciones entre E, G y v, 181-83
Relaciones esfuerzo-deformación unitaria, 57, 60-66, 68-69
  para cortante, 170-72
Relajación del esfuerzo, 76
Relajación, constantes del material para,
  efecto de la temperatura en; 81-82
Reología, 76
Resiliencia, 74
Resistencia a la fatiga, 85
Resistencia a la fluencia, 68
Resistencia como criterio de diseño, 31-33
Resistencia de materiales, 2, 667
Resistencia por flujo plástico, 75
Resistencia última, 31-32, 68, 620-21
Resortes helicoidales estrechamente enrollados, 448-49:
  deflexión de, 451-53
  esfuerzos en, 448-51
  índice de resorte, 450
Resultantes de esfuerzo, 7
Rigidez, 2, 95, 605, 667
Rigidez torsional, 224
Roseta de 60 grados, 509
Roseta de deformación a 45°, 509
Roseta de deformación unitaria, 507-10
Roseta delta, 509
Roseta equiangular, 509
Roseta rectangular, 509
Ruptura por flujo plástico, 75

S

Saint-Venant, B. de, 528
Secciones críticas, 22
Segundo(s), 6
Segundo teorema de área-momento, 638-39
Sistema primario, 133
Sistemas estáticamente determinados, 23
  deformación axial de barras, 91-130
    cargas de impacto, 116-19
    cargas dinámicas, 116-19
    deflexiones por el método de la energía, 115,116
    energía de deformación elástica para esfuerzo uniaxial, 111-15
    principio de Saint-Venant y concentraciones de esfuerzos, 104-9
    prueba de tensión, 109-1
Sistemas estáticamente indeterminados, 23
  deformación axial de barras, 131-68
    consideraciones generales, 131-32
    enfoque de la ecuación diferencial para deflexiones, 157-60
    método de las fuerzas de análisis, 132-38
    método de los desplazamientos, 138-41
    método de los desplazamientos con grados de libertad, 141-44
    problemas no lineales, 144-57
Sólido de Maxwell, 79-80

Sólido Voigt-Kelvin, 76, 80
Solución exacta, definición, 690
Solución fotoelástica y analítica de Wilson-Stokes, 547
Soluciones elementales para vigas, 546
Soporte articulado, 268-69, 590
Soporte de eslabón, 268
Soporte de rodillo, 268, 590
Soporte empotrado, 590
Soportes guiados, 590
Soportes simples, 269
Stevinus, 737
Superficie de falla para materiales frágiles, 532-34
Superposición, 415
  deflexiones por, 610-15
Superposición de deformaciones unitarias, 178

T

Tenacidad, 74-75, 113
Tensión axial, 276
Tensor de deformación unitaria, 176-77
Tensor de primer rango, 8
Tensor de rango cero, 8
Tensor de segundo rango, 8
Tensor esfuerzo, 7-10
Tensor esfuerzo desviatorio, 523
Tensor esfuerzo dilatacional, 524
Tensor esfuerzo distorsionante, 523
Tensor esfuerzo esférico, 524
Tensores, 8, 470
Teorema de los ejes paralelos, 335, 336
Teorema de Maxwell sobre desplazamientos recíprocos, 796
Teoremas de Castigliano, 771, 776-85
Teoría de deflexiones lineales pequeñas, 698
Teoría del doble módulo para el pandeo de columnas, 686
Teoría del esfuerzo cortante máximo, 521-23
Teoría del módulo reducido para el pandeo de columnas, 686
Teoría del pandeo, columnas, 677-99
Teoría matemática de la elasticidad, 104, 190
Torsión, 207-66
  concentraciones de esfuerzos, 221-22
  coples de flechas, 235-36
  de barras circulares inelásticas, 237-42
  de miembros macizos no circulares, 242-48
    alabeo de secciones abiertas de pared delgada, 247-48
    barras macizas, 242-47
  de miembros tubulares de pared delgada, 248-52
  energía y cargas de impacto, 233-35
  enfoque alternativo de la ecuación diferencial, 231-33
  esfuerzos y deformaciones cortantes en flechas circulares en el rango inelástico, 237-42
  fórmula de la torsión, 211-18
  método de las secciones, aplicación de, 208-10
  miembros circulares:
    ángulo de torsión, 222-28
    concentraciones de esfuerzos, 221-22
    diseño de, 218-21
    hipótesis básicas para, 210
  problemas estáticamente indeterminados, 228-31
  sección crítica, 209
Trabajo interno, 111
Trabajo virtual, 736-59
  desplazamientos virtuales por equilibrio, 751-55
  ecuaciones de fuerza virtual para sistemas elásticos, 742-48
    armaduras, 742
    vigas, 742-43
  fuerzas virtuales para deflexiones, 740-42
  fuerzas virtuales para problemas indeterminados, 748-51
  método de la fuerza virtual, 738-40
  método del desplazamiento virtual, 737-38
  principio del trabajo virtual, 736-40
  trabajo virtual para sistemas discretos, 755-59
Transformación de esfuerzos, 8
Transformación de esfuerzos y deformaciones unitarias, 469-518
  Círculo de Mohr:
    para deformación unitaria bidimensional, 504-7
    para estado general de esfuerzo, 495-98
  deformación unitaria bidimensional:
    círculo de Mohr para, 504-7
    enfoque analítico para la transformación, 502-4
    enfoque geométrico para la transformación, 499-502
  transformación de la deformación unitaria, 498-510
    deformación unitaria bidimensional, 499-507
    rosetas de deformación unitaria, 507-10
  transformación del esfuerzo, 470-98
    construcción de círculos de Mohr para, 483-91
    en problemas bidimensionales, 473-83
    esfuerzos principales para un estado general de esfuerzos, 491-94
    problema básico, 470-73
Traslación axial de cuerpo rígido, 93
Trayectorias de esfuerzos principales, 550
Tresca, H., 521
Tubos circulares en torsión, energía de deformación para, 735

U

Un grado de indeterminación cinemática, 139
Un grado de libertad, 139

V

Valor esperado de la muestra, 37
Valores propios, 675, 679
Varianza de la muestra, 37
Vectores, 8, 470
  columnas, 755
  propios, 675
Vectores esfuerzo/tracciones, 470
Vida a la iniciación de la fatiga, 83
Vida por propagación de la fatiga, 83
Vida total por fatiga, 83
Vigas:
  análisis al límite plástico, 821-34
  con secciones transversales arbitrarias, flexión de, 401-6
  cortante en, 277-78
  de sección transversal compuesta, 356-61
  definidas, 267
  diagramas de cortante, 281-91
    antisimétrico, 297
    por integración de la carga, 293-94
    simétrico, 297
  diagramas de fuerza axial, 281-91
  diagramas de momento flexionante, 281-91
    efecto de un momento concentrado en, 301-4
    por integración de la fuerza cortante, 295-301
  Diagramas *P*, *V* y *M*, 281-91
  ecuaciones diferenciales de equilibrio para un elemento de viga, 291-93
  eje neutro, 329
  energía de deformación:
    para vigas en cortante, 735
    para vigas en flexión, 734
  esfuerzos cortantes en, 415-67
  fuerza axial en, 276-77
  funciones de singularidad para, 608-10
  funciones de singularidad, aplicaciones de, 306-12
  momento flexionante en, 278-81
  reacciones, cálculo de, 270-75
  restringidas, 650
  soportes/cargas:
    convención diagramática para, 268-70
    pasadores, 268-69
    rodillos/eslabones, 268
    soportes fijos, 269
    soportes simples, 269
  Véase también Flexión en vigas simétricas
Vigas columnas, 690-94
  ecuaciones diferenciales alternativas para, 694-99
Vigas de resistencia constante, 561
Vigas prismáticas, 344
  diseño elástico, 552-61
Vigas y marcos continuos, análisis plástico al límite de, 834-36
Voigt, W., 76
von Mises, condición de fluencia, 527, 535
von Mises, R., 523

W

Wahl, A. M., 451
Winkler, E., 361

Y

Young, Thomas, 67

Factores de conversión entre las unidades del sistema inglés y las del SI

Para convertir	*A*	*Multiplique por*
pulgadas (in)	milímetros (mm)	25.400
pulgadas (in)	metros (m)	0.025 400
pie (ft)	metros (m)	0.304 800
pulgadas cuadradas (in^2)	metros cuadrados (m^2)	0.000 645
pies cúbicos (ft^3)	metros cúbicos (m^3)	0.028 317
ciclos por segundo (cps)	hertz (Hz)	1.0
aceleración de la gravedad, estándar	metros/segundo^2 (m/s^2)	9.81
libra masa (lb)	kilogramo (kg)	0.453 592
libra fuerza (lbf)	newtons (N)	4.448 222
kilolibra fuerza (kip)	kilonewtons (kN)	4.448 222
libra fuerza por pie cuadrado (psf)	newtons/metro^2 (N/m^2 = Pa)	47.880
libra fuerza por pulgada cuadrada (psi)	kilonewtons/metro^2 (kN/m^2 = kPa)	6.894 757
kilolibra fuerza por pulgada cuadrada (ksi)	meganewtons/metro^2 (MN/m^2 = N/mm^2 = MPa)	6.894 757
newtons por metro cuadrado (N/m^2)	pascales (Pa)	1.0
pulgada-libra fuerza (in-lbf)	newton-metro (N · m)	0.112 985
pie-libra fuerza (ft-lbf)	newton-metro (N · m)	1.355 818
caballo de potencia (hp = 550 ft-lbf/s)	newton-metro por segundo (N · m/s = watt (w))	745.700

Aceleración gravitacional	Unidades U.S.: g = 32.1740 ft/seg^2 Unidades SI: g = 9.806 65 m/s^2
1 kgf = 9.81 N	1000 lb = 1 kilolibra = 1 kip = kg

Unidades SI
Sistema Internacional de Unidades

Unidades SI básicas

Cantidad	*Unidad (Símbolo)*
longitud	metro (m)
masa	kilogramo (kg)
fuerza*	newton (N)*
tiempo	segundo (s)

*Unidad derivada ($kg \cdot m/s^2$)

Múltiplos y submúltiplos recomendados de unidades

Factor de multiplicación	*Prefijo*	*Símbolo SI*
1 000 000 000	giga	G
1 000 000	mega	M
1 000	kilo	k
0.001	mili	m
0.000 001	micro	μ
0.000 000 001	nano	n

Algunas reglas para la escritura y uso del SI*

Se debe usar un punto para separar unidades al multiplicar éstas. Por ejemplo, un newton-metro se escribe N · m y no debe confundirse con mN, que significa milinewtons.

Debe evitarse el uso de prefijos en el denominador de unidades compuestas, excepto por kg, ya que kg es una unidad SI básica.

Para números con cuatro o más dígitos, éstos deben escribirse en grupos de tres, separados por espacios en vez de comas, contándolos a la izquierda y a la derecha del punto decimal. Por ejemplo, escriba 37 638.246 15 en vez de 37,638.24615, como se escribe en el sistema inglés.

*Para mayores detalles vea *Standard for Metric Practice*, E380-86, ASTM, Philadelphia, PA, y *Recommended Practice for the Use of Metric (SI) Units in Building Design and Construction*, Nota técnica NBS 938, U.S. Department of Commerce, Washington, DC.

Factores de conversión entre las unidades del sistema inglés y las del SI

Para convertir	*A*	*Multiplique por*
pulgadas (in)	milímetros (mm)	25.400
pulgadas (in)	metros (m)	0.025 400
pie (ft)	metros (m)	0.304 800
pulgadas cuadradas (in^2)	metros cuadrados (m^2)	0.000 645
pies cúbicos (ft^3)	metros cúbicos (m^3)	0.028 317
ciclos por segundo (cps)	hertz (Hz)	1.0
aceleración de la gravedad, estándar	metros/segundo^2 (m/s^2)	9.81
libra masa (lb)	kilogramo (kg)	0.453 592
libra fuerza (lbf)	newtons (N)	4.448 222
kilolibra fuerza (kip)	kilonewtons (kN)	4.448 222
libra fuerza por pie cuadrado (psf)	newtons/metro^2 (N/m^2 = Pa)	47.880
libra fuerza por pulgada cuadrada (psi)	kilonewtons/metro^2 (kN/m^2 = kPa)	6.894 757
kilolibra fuerza por pulgada cuadrada (ksi)	meganewtons/metro^2 (MN/m^2 = N/mm^2 = MPa)	6.894 757
newtons por metro cuadrado (N/m^2)	pascales (Pa)	1.0
pulgada-libra fuerza (in-lbf)	newton-metro (N · m)	0.112 985
pie-libra fuerza (ft-lbf)	newton-metro (N · m)	1.355 818
caballo de potencia (hp = 550 ft-lbf/s)	newton-metro por segundo (N · m/s = watt (w))	745.700

Aceleración gravitacional	Unidades U.S.: g = 32.1740 ft/seg^2 Unidades SI: g = 9.806 65 m/s^2
1 kgf = 9.81 N	1000 lb = 1 kilolibra = 1 kip = kg